

【論 説】

不確実性下での不可逆的投資決定モデル

永 富 隆 司

目 次

1. はじめに
2. Bertola モデルにおける不可逆的投資と不確実性の相関
3. Caballero モデルにおける不可逆的投資と不確実性の相関
4. おわりに

記号一覧

注

References

1. はじめに

不可逆的投資に対する不確実性の影響を考える場合には、企業による資本財の所有形態が重要な問題となってくる。もし、企業が資本財をレンタルして、その資本サービスを消費するという形で生産を行うなら、資本の需要関数において重要な変数となるのは資本の使用者費用（User Cost of Capital）である。このとき、資本財はスポット価格でレンタルされ、レンタル期間が終了すると企業は契約を継続するか、あるいは資本財を返却するかを選択を行うことになる。したがって、このような資本への投資は可逆的である。

ところが、実際には、企業は資本財を所有している場合が多い。特に、資本設備が大規模な装置産業等ではそうした傾向が強い。このような資本設備は、企業特有の性質を有しており、また他の用途への転用も一般に困難である。資本財の中古市場も発達していない場合が多く、たとえ中古市場で売却できたとしても、その売却価格は大きく割り引かれてしまうことが多い。つまり、一度、資本設備が設置されると、それは生産活動に使用されないかぎ

不確実性下での不可逆的投資決定モデル（永富）

り、ほとんど価値がなくなってしまう。したがって、このような資本への投資は不可逆的である。

投資に対する不確実性の影響については、これまでも多くの研究が行われてきた¹⁾。不確実性は、企業のリスク選好、市場の競争性、生産技術に関する規模の収穫、投資の調整費用構造、投資の不可逆性などの様々な要因と結びついて企業の投資活動に影響を与える。このうち、企業のリスク選好の回避性と不完全競争市場を仮定した場合には、不確実性と投資との間に負の相関が現われることが指摘されている²⁾。しかし、中立的リスク選好と完全競争市場を仮定した場合には正の相関と負の相関の両方が報告されており、不確実性と投資との間の関係性については未だ一意的な結論が得られていない³⁾。

本稿では、不可逆的投資に対する不確実性の影響に焦点を当てて、これら2つの間に如何なる相関が存在するかについて議論する⁴⁾。本研究で検討する Bertola（1998）および Caballero（1991）でも不可逆的投資と不確実性の間の相関について異なる指摘を行っている。すなわち、Bertola は不可逆的投資と不確実性の間に負の相関が存在すると指摘するのに対し、Caballero は両者の間に正の相関が存在すると指摘する。これら2つの議論を詳細に検討してみると、両者の相違は生産技術の規模の収穫と市場の競争性に関する仮定の相違に依存していることがわかる。

本論文の構成は以下の通りである。第2節では、Bertola のモデルを詳細に検討して、不可逆的投資と不確実性の間に負の相関が存在すると指摘するに至った議論を整理する。第3節では、Caballero のモデルを詳細に検討して、不可逆的投資と不確実性の間に正の相関が存在すると指摘するに至った議論を整理する。そして、最後にこれら2つの理論分析の相違点を整理して本稿を締めくくる。

2. Bertola モデルにおける不可逆的投資と不確実性の相関

企業が資本設備を所有している場合には、動学的な最適投資経路、すなわ

ち最適な資本ストックを達成するためのプロセスを明らかにすることが重要となる。本節では、資本が不可逆的である場合の最適投資ルールについて、Bertola(1998) の議論を詳細に検討する。Bertola は、企業のリスク選好、不確実性、投資の不可逆性、生産技術に関する規模の収穫、市場の競争条件について以下のような仮定をおいて議論する。

1. 企業のリスク選好は中立的である。
2. 不確実性は、需要、技術進歩、賃金率、資本財価格が幾何ブラウン運動の確率過程に従うという形で導入する。
3. 投資の不可逆性は、企業価値最大化問題の中で投資の非負制約という形で導入する。
4. 生産技術に関する規模の収穫は正、また市場は不完全競争市場であると仮定するモデルを導出する。

Bertola は、こうした仮定に基づいて、不確実性の増大は企業の不可逆的投資に対して抑制的な影響を及ぼすという結果を報告している。これは、動学的投資プロセスにおいて、不確実性の増大は望ましい資本ストックの水準を低下させる要因であることを意味している。以下、Bertola（1998）のモデルを詳細に検討する⁵⁾。

生産技術が Cobb-Douglas 型の企業を考える。

$$Q_{i,\tau} = \left[K_{i,\tau}^\alpha (A_{i,\tau} N_{i,\tau})^{1-\alpha} \right]^\phi \quad (1)$$

(1) 式は、生産物が物的資本と技能労働力（あるいは人的資本）の2つの生産要素の結合で生産されることを示している。また、規模の収穫については必ずしも一定と仮定していない。個々の記号については以下の通りである。

不確実性下での不可逆的投資決定モデル（永富）

Q は生産量, K は資本ストック, N は労働投入量, A は労働増大的な技術進歩, α は $0 < \alpha < 1$ の値をとるパラメータ, ϕ は正の値をとる規模の収穫を表すパラメータ, i は企業の識別記号, τ は時間を表す。労働投入量は, 他のすべての変数が判明した後に決定される完全に可変的な生産要素（Completely Variable Factor）と仮定する。なお, 資本ストックは準固定生産要素（Quasi Fixed Factor）と考える。

需要関数は, 一定の弾力性を持った関数（Constant Elasticity Demand Function）として定義される。

$$p_{i,\tau} = D_{i,\tau} Q_{i,\tau}^{\mu-1} \quad (2)$$

ここで, p は生産物価格, D は需要ショック（Demand Shock）, μ は企業の独占力を表すパラメータで, マーク・アップ要因（Markup Factor）の逆数に等しい⁶⁾。 $\mu \rightarrow 0$ となることは, それだけマーク・アップ要因が増大, すなわち企業の独占力が増すことを意味する。逆に, 完全競争市場であれば, $\mu \rightarrow 1$ となる。Bertola は, 規模の収穫と独占力のパラメータの積について, $0 < \phi\mu < 1$ を仮定する。これは, 生産関数の規模の収穫が一定 ($\phi = 1$), あるいは逓増的 ($\phi > 1$) であるとする, $\mu < 1$, すなわち当該企業は何らかの市場独占力を持った不完全競争企業であることを示す。逆に, 企業が完全競争企業 ($\mu = 1$) であれば, 規模の収穫は逓減的 ($\phi < 1$) であることになる。

資本ストックを所与としたとき, 短期の利潤関数 (Π) は収入から可変生産要素費用を差し引いた残額として定義される。企業が利潤最大化を目的に行動するとき, 目的関数は以下のように与えられる。

$$\Pi(K_{i,\tau}, w_\tau, D_{i,\tau}, A_{i,\tau}) = \max_N [p_{i,\tau} Q_{i,\tau} - w_\tau N_{i,\tau}] \quad (3)$$

(3) 式では、利潤を最大化するために最適な労働投入量 (N^*) が選択されることを示している。ここで、 w は名目賃金率である⁷⁾。利潤最大化問題は、(1) 式と (2) 式を制約条件として解くことができる。(1) 式と (2) 式を (3) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}\Pi &= p_{i,\tau} Q_{i,\tau} - w_{\tau} N_{i,\tau} \\ &= D_{i,\tau} Q_{i,\tau}^{\mu} - w_{\tau} N_{i,\tau} \\ &= D_{i,\tau} \left[K_{i,\tau}^{\alpha} (A_{i,\tau} N_{i,\tau})^{1-\alpha} \right]^{\phi\mu} - w_{\tau} N_{i,\tau}\end{aligned}\quad (4)$$

が得られる。(4) 式を労働投入量 N で微分して、最大化のための 1 階の条件を求めると、

$$\frac{\partial \Pi}{\partial N_{i,\tau}} = \phi\mu D_{i,\tau} \left[K_{i,\tau}^{\alpha} (A_{i,\tau} N_{i,\tau})^{1-\alpha} \right]^{\phi\mu-1} (1-\alpha) K_{i,\tau}^{\alpha} (A_{i,\tau} N_{i,\tau})^{-\alpha} A_{i,\tau} - w_{\tau} = 0$$

となるが、これを、 N について解くことによって、最適な労働投入量 (N^*) を決定する労働需要関数を導くことができる。すなわち、

$$\begin{aligned}N_{i,\tau}^* &= \left[(1-\alpha)\phi\mu \right]^{\frac{1}{1-(1-\alpha)\phi\mu}} \left(w_{\tau} \right)^{\frac{1}{(1-\alpha)\phi\mu-1}} \left(D_{i,\tau} \right)^{\frac{1}{1-(1-\alpha)\phi\mu}} \left(A_{i,\tau} \right)^{\frac{(1-\alpha)\phi\mu}{1-(1-\alpha)\phi\mu}} \\ &\quad \left(K_{i,\tau} \right)^{\frac{\alpha\phi\mu}{1-(1-\alpha)\phi\mu}}\end{aligned}\quad (5)$$

不確実性下での不可逆的投資決定モデル（永富）

である。(5) 式を (4) 式に代入すると、利潤関数は、

$$\begin{aligned}
\Pi &= D_{i,\tau} \left\{ K_{i,\tau}^\alpha \left\{ A_{i,\tau} \left[(1-\alpha)\phi\mu \right]^{\frac{1}{1-(1-\alpha)\phi\mu}} \left(w_\tau \right)^{\frac{1}{(1-\alpha)\phi\mu-1}} \left(D_{i,\tau} \right)^{\frac{1}{1-(1-\alpha)\phi\mu}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(A_{i,\tau} \right)^{\frac{(1-\alpha)\phi\mu}{1-(1-\alpha)\phi\mu}} \left(K_{i,\tau} \right)^{\frac{\alpha\phi\mu}{1-(1-\alpha)\phi\mu}} \right\}^{1-\alpha} \right\}^{\phi\mu} - w_\tau \left\{ \left[(1-\alpha)\phi\mu \right]^{\frac{1}{1-(1-\alpha)\phi\mu}} \right. \\
&\quad \left. \left(w_\tau \right)^{\frac{1}{(1-\alpha)\phi\mu-1}} \left(D_{i,\tau} \right)^{\frac{1}{1-(1-\alpha)\phi\mu}} \left(A_{i,\tau} \right)^{\frac{(1-\alpha)\phi\mu}{1-(1-\alpha)\phi\mu}} \left(K_{i,\tau} \right)^{\frac{\alpha\phi\mu}{1-(1-\alpha)\phi\mu}} \right\} \\
&= \left[(1-\alpha)\phi\mu \right]^{\frac{(1-\alpha)\phi\mu}{1-(1-\alpha)\phi\mu}} \left(w_\tau \right)^{\frac{(1-\alpha)\phi\mu}{(1-\alpha)\phi\mu-1}} \left(D_{i,\tau} \right)^{\frac{1}{1-(1-\alpha)\phi\mu}} \left(A_{i,\tau} \right)^{\frac{(1-\alpha)\phi\mu}{1-(1-\alpha)\phi\mu}} \\
&\quad \left(K_{i,\tau} \right)^{\frac{\alpha\phi\mu}{1-(1-\alpha)\phi\mu}} - \left[(1-\alpha)\phi\mu \right]^{\frac{1}{1-(1-\alpha)\phi\mu}} \left(w_\tau \right)^{\frac{(1-\alpha)\phi\mu}{(1-\alpha)\phi\mu-1}} \left(D_{i,\tau} \right)^{\frac{1}{1-(1-\alpha)\phi\mu}} \\
&\quad \left(A_{i,\tau} \right)^{\frac{(1-\alpha)\phi\mu}{1-(1-\alpha)\phi\mu}} \left(K_{i,\tau} \right)^{\frac{\alpha\phi\mu}{1-(1-\alpha)\phi\mu}} \\
&= \left\{ \left[(1-\alpha)\phi\mu \right]^{\frac{(1-\alpha)\phi\mu}{1-(1-\alpha)\phi\mu}} - \left[(1-\alpha)\phi\mu \right]^{\frac{1}{1-(1-\alpha)\phi\mu}} \right\} \left(\frac{w_\tau}{A_{i,\tau}} \right)^{-\frac{(1-\alpha)\phi\mu}{1-(1-\alpha)\phi\mu}} \\
&\quad \left(D_{i,\tau} \right)^{\frac{1}{1-(1-\alpha)\phi\mu}} \left(K_{i,\tau} \right)^{\frac{\alpha\phi\mu}{1-(1-\alpha)\phi\mu}} \\
&= \frac{1}{1+\beta} K_{i,\tau}^{1+\beta} H_{i,\tau}
\end{aligned} \tag{6}$$

と表すことができる。ただし、(6) 式において、

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{\phi\mu - 1}{1 - (1 - \alpha)\phi\mu} \\ H_{i,\tau} &= (1 + \beta)H'_{i,\tau} \\ &= (1 + \beta) \left\{ \left[(1 - \alpha)\phi\mu \right]^{\frac{(1 - \alpha)\phi\mu}{1 - (1 - \alpha)\phi\mu}} - \left[(1 - \alpha)\phi\mu \right]^{\frac{1}{1 - (1 - \alpha)\phi\mu}} \right\} \left(\frac{w_\tau}{A_{i,\tau}} \right)^{-\frac{(1 - \alpha)\phi\mu}{1 - (1 - \alpha)\phi\mu}} \\ &\quad \left(D_{i,\tau} \right)^{\frac{1}{1 - (1 - \alpha)\phi\mu}}\end{aligned}$$

である。ここで H は、各時点における当該企業の事業環境（Business Conditions）を要約する変数である。なお、 H は、 $0 < \alpha < 1$ および $0 < \phi\mu < 1$ より、需要 D および技術進歩 A に対してはプラス $\left(\frac{\partial H}{\partial D} > 0, \frac{\partial H}{\partial A} > 0 \right)$ 、賃金率 w に対してはマイナス $\left(\frac{\partial H}{\partial w} < 0 \right)$ である。また、 β は $-1 < \beta < 0$ となる。したがって、 $\frac{\partial \Pi}{\partial K} = K^\beta H > 0$ 、かつ $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial K^2} = \beta K^{\beta-1} H < 0$ となるから、利潤関数は資本ストックに対して強い意味での凹関数である。

ところで、 D 、 A 、 w がそれぞれ確率変数であるとする、利潤関数は確率モデルとなる。ここで、 D, A, w が幾何ブラウン運動の確率過程（Geometric Brownian Motion Stochastic Processes）に従うと仮定する。もし、 H の確率過程のパラメータが D 、 A 、 w の確率過程の該当する各パラメータと線形結合であるとするれば、 H も幾何ブラウン運動の確率過程に従うと考えることができる。

不確実性下での不可逆的投資決定モデル（永富）

$$dH = \theta_H H_{i,\tau} d\tau + \sigma_H H_{i,\tau} dz_H \quad (7)$$

(7) 式は、企業の事業環境の要約変数 H の運動方程式である。ここで、 θ_H はドリフト率（平均成長率）、 σ_H はボラティリティ、 dz_H は平均ゼロ、分散 1 のウィーナー過程（Wiener Process）の増分である。したがって、(7) 式において、 H の増分は時間とともに線形的に増大する（ $\theta_H > 0$ ）が、分散（ σ_H ）をともなっているため不確実である。

また、資本財価格 p^I も幾何ブラウン運動に従うと仮定する。

$$dp^I = \theta_{p^I} p^I_\tau d\tau + \sigma_{p^I} p^I_\tau dz_{p^I} \quad (8)$$

(8) 式は、資本財価格も分散（ σ_{p^I} ）をともなっているため、その増分は不確実であることを示している⁸⁾。

次に、資本蓄積および投資の不可逆性（投資の非負制約）を制約条件とする企業価値（目的汎関数）の最大化問題を考える。なお、企業のリスク選好は中立的であるとする。

$$V(K_{i,\tau}, H_{i,\tau}, p^I_\tau) = \max_I E_{i,\tau} \int_{\tau=t}^{\infty} \exp[-\rho(\tau-t)] [\Pi(K_{i,\tau}, H_{i,\tau}) d\tau - p^I_\tau I_{i,\tau}] \quad (9)$$

$$\text{s.t.} \quad \dot{K} = I_{i,\tau} - \delta K_{i,\tau} \quad (10)$$

$$I_{i,\tau} \geq 0 \quad (11)$$

不確実性下での不可逆的投資決定モデル（永富）

ここで、 V は企業価値、 E は期待オペレータ、 ρ は割引率（一定）、 δ は減価償却率（一定）、 I は投資率である。Bertola は、この企業価値最大化問題の解として、不可逆性が存在する場合の最適投資政策の必要条件を示した。

λ を Lagrange 乗数とすると、ラグランジュ被積分関数（Lagrangian Integrand Function）は、

$$L = \exp[-\rho(\tau - t)] \left\{ \Pi(K_{i,\tau}, H_{i,\tau}) - p'_{\tau} I_{i,\tau} \right\} + \lambda [I_{i,\tau} - \delta K_{i,\tau} - \dot{K}] \quad (12)$$

と与えられる。ラグランジュ被積分関数 L を K , I , \dot{K} で偏微分して、最大化のための 1 階の条件を求めると、

$$\frac{\partial L}{\partial K_{i,\tau}} = \exp[-\rho(\tau - t)] \frac{\partial \Pi(K_{i,\tau}, H_{i,\tau})}{\partial K_{i,\tau}} - \lambda \delta \quad (13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial I_{i,\tau}} = \exp[-\rho(\tau - t)] (-p'_{\tau}) + \lambda \quad (14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{K}} = -\lambda \quad (15)$$

が得られる。(14) 式より、Lagrange 乗数 λ は、

$$\lambda = \exp[-\rho(\tau - t)] p'_{\tau} \quad (16)$$

不確実性下での不可逆的投資決定モデル（永富）

で与えられるから, (16) 式を (13) 式および (15) 式にそれぞれ代入すると, Euler-Lagrange Equation をつくることのできる。すなわち,

$$\begin{aligned}
 L_K - \frac{d}{d\tau} L_{\dot{K}} &= \exp[-\rho(\tau-t)] \frac{\partial \Pi(K_{i,\tau}, H_{i,\tau})}{\partial K_{i,\tau}} - \delta \exp[-\rho(\tau-t)] (p^I_{\tau}) \\
 &\quad - \frac{d}{d\tau} \{ -\exp[-\rho(\tau-t)] p^I_{\tau} \} \\
 &= \exp[-\rho(\tau-t)] \frac{\partial \Pi(K_{i,\tau}, H_{i,\tau})}{\partial K_{i,\tau}} - \delta \exp[-\rho(\tau-t)] (p^I_{\tau}) \\
 &\quad + \left\{ \exp[-\rho(\tau-t)] (-\rho) p^I_{\tau} + \exp[-\rho(\tau-t)] \left[\frac{d p^I_{\tau}}{d\tau} \right] \right\} \\
 &= \frac{\partial \Pi(K_{i,\tau}, H_{i,\tau})}{\partial K_{i,\tau}} - (\delta + \rho) p^I_{\tau} + \left[\frac{d p^I_{\tau}}{d\tau} \right] = 0 \tag{17}
 \end{aligned}$$

である。(17)式に時間と減耗率を考慮した割引率, $\exp[-(\delta + \rho)(\tau + t)]$ を掛け, さらに時間変数 τ に関して積分すると,

$$\begin{aligned}
 &\int_{\tau=t}^{\infty} \exp[-(\delta + \rho)(\tau-t)] \frac{\partial \Pi(K_{i,\tau}, H_{i,\tau})}{\partial K_{i,\tau}} d\tau \\
 &= \int_{\tau=t}^{\infty} \exp[-(\delta + \rho)(\tau-t)] (\delta + \rho) [p^I_{\tau}] d\tau \\
 &\quad - \int_{\tau=t}^{\infty} \exp[-(\delta + \rho)(\tau-t)] \left[\frac{d p^I_{\tau}}{d\tau} \right] d\tau \tag{18}
 \end{aligned}$$

が得られる。(18) 式は、現在価値で表わされた最大化のための必要条件である。(18) 式の右辺第 2 項について部分積分を行う。ここで、 $f = \exp[-(\delta + \rho)(\tau - t)]$, $f_\tau = \frac{df}{d\tau} = -(\delta + \rho)\exp[-(\delta + \rho)(\tau - t)]$, $g_\tau = \frac{dg}{d\tau} = \frac{dp^I_\tau}{d\tau}$, $g = \int g_\tau d\tau = p^I_\tau$ とおくと, $\int fg_\tau d\tau = fg - \int f_\tau g d\tau$, より

$$\begin{aligned} & \int_{\tau=t}^{\infty} \exp[-(\delta + \rho)(\tau - t)] \left[\frac{dp^I_\tau}{d\tau} \right] d\tau \\ &= \exp[-(\delta + \rho)(\tau - t)] [p^I_\tau] \\ &+ \int_{\tau=t}^{\infty} \left\{ \exp[-(\delta + \rho)(\tau - t)] (\delta + \rho) [p^I_\tau] \right\} d\tau \end{aligned} \quad (19)$$

が得られる。(19) 式を (18) 式に代入すると,

$$\begin{aligned} & \int_{\tau=t}^{\infty} \exp[-(\delta + \rho)(\tau - t)] \frac{\partial \Pi(K_{i,\tau}, H_{i,\tau})}{\partial K_{i,\tau}} d\tau \\ &= \int_{\tau=t}^{\infty} \exp[-(\delta + \rho)(\tau - t)] (\delta + \rho) [p^I_\tau] d\tau \\ &- \exp[-(\delta + \rho)(\tau - t)] [p^I_\tau] \\ &- \int_{\tau=t}^{\infty} \left\{ \exp[-(\delta + \rho)(\tau - t)] (\delta + \rho) [p^I_\tau] \right\} d\tau \\ &= -\exp[-(\delta + \rho)(\tau - t)] [p^I_\tau] \end{aligned} \quad (20)$$

が得られるが, (20) 式の右辺は、初期時点と終期時点の関係から,

不確実性下での不可逆的投資決定モデル（永富）

$$\begin{aligned} -\exp[-(\delta + \rho)(\tau - t)] [p^I_\tau] \Big|_{\tau=t}^{\infty} &= -\exp(-\infty) [p^I_\tau] - \left\{ -\exp(0) [p^I_\tau] \right\} \\ &= p^I_\tau \end{aligned} \quad (21)$$

となる。したがって、(20) 式および (21) 式より最大化のための必要条件を導出することができる。

$$\int_{\tau=t}^{\infty} \exp[-(\delta + \rho)(\tau - t)] \frac{\partial \Pi(K_{i,\tau}, H_{i,\tau})}{\partial K_{i,\tau}} d\tau = p^I_\tau \quad (22)$$

(22) 式は、不可逆的な投資が実施される場合の最適投資政策（Optimal Irreversible Investment Policy）の条件式である。(22) 式の左辺は、資本を追加的に 1 単位増加させた場合に得られる追加的収益の割引現在価値を表す。割引率は、資本が購入される時点で要求される必要収益率と資本の減価償却率から構成される。つまり、(22) 式の左辺は資本の影の価格（Shadow Price）である。一方、(22) 式の右辺は資本 1 単位あたりの購入費用である。したがって、資本が不可逆である場合の最適投資量は、単位資本当たりの純収益の割引現在価値と資本 1 単位あたりの購入費用が等しくなる水準に決定されることになる。

なお、(22) 式が満たされない場合、すなわち、

$$\int_{\tau=t}^{\infty} \exp[-(\delta + \rho)(\tau - t)] \frac{\partial \Pi(K_{i,\tau}, H_{i,\tau})}{\partial K_{i,\tau}} d\tau < p^I_\tau \quad (23)$$

不確実性下での不可逆的投資決定モデル（永富）

のときは，資本の限界収益の割引現在価値が資本の購入費用を下回っているため投資は実施されない。不可逆的投資に関する非負制約から，(23) 式が再び等式で成立するためには，他の事情が一定であるかぎり，資本減耗によって資本量が減少することが必要である。

なお，(22) 式の最適投資条件を満たす投資政策は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \Pi(K_{i,\tau}, H_{i,\tau})}{\partial K_{i,\tau}} = p^I_{\tau} \omega(\rho + \delta + \delta\beta - \theta_H) \quad (24)$$

ここで，

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\xi}{\xi - 1} \succ 1 \\ \xi &= \frac{-\left(\theta_H - \delta\beta - \theta_{p'} - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sqrt{\left(\theta_H - \delta\beta - \theta_{p'} - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2(\rho + \delta - \theta_{p'})\sigma^2}}{\sigma^2} \succ 1 \\ \beta &= \frac{\phi\mu - 1}{1 - (1 - \alpha)\phi\mu} \\ \sigma^2 &= \sigma_H^2 + \sigma_{p'}^2 - 2\gamma\sigma_H\sigma_{p'} \succ 0 \\ \gamma &= \frac{dz_{p'} dz_H}{d\tau} \end{aligned}$$

である。(24) 式は，不確実性が増大すると，投資が不可逆的であるために，投資の実施基準が引き上がることを示している。これは，資本の必要限界収

不確実性下での不可逆的投資決定モデル（永富）

益が不確実性が存在しない場合や投資が可逆的である場合の投資コストを上回ることを意味する。

(24) 式を書き換えると,

$$\frac{1}{\rho + \delta + \delta\beta - \theta_H} \frac{\partial \Pi(K_{i,\tau}, H_{i,\tau})}{\partial K_{i,\tau}} = p^I_{\tau} \omega \quad (25)$$

となる。(25) 式の左辺は、資本の限界収益の割引現在価値である。つまり、企業が不可逆的な投資を実施するのは、投資から期待される限界収入の割引現在価値が資本の購入費用より少なくとも ω 分だけ上回る場合である。

また、(6) 式より,

$$\frac{\partial \Pi(K_{i,\tau}, H_{i,\tau})}{\partial K_{i,\tau}} = K_{i,\tau}^{\beta} H_{i,\tau}$$

であるから、(25) 式を,

$$\frac{1}{(\rho + \delta + \delta\beta - \theta_H)} K_{i,\tau}^{\beta} H_{i,\tau} = p^I_{\tau} \omega$$

と書き直すことができる。

以上から、最適資本ストックを決定する最適投資ルール (Optimal

Irreversible Investment Rule）を導出することができる。

$$K^*_{i,\tau}(H_{i,\tau}, p^l_{\tau}) = \left[\omega \frac{(\rho + \delta + \delta\beta - \theta_H) p^l_{\tau}}{H_{i,\tau}} \right]^{\frac{1}{\beta}} \quad (26)$$

(26) 式において、 $-1 < \beta < 0$ より $\frac{\partial K^*}{\partial H} > 0$, $\frac{\partial K^*}{\partial \omega} < 0$, $\frac{\partial K^*}{\partial p^l} < 0$ であることがわかる。また、(7) 式より、需要 D の不確実性の増大は事業環境の要約変数 H の不確実性 (σ_H) を増大させるため、それは σ^2 の増大要因であることがわかる。同様に、(8) 式より、資本財価格の不確実性 (σ_p) の増大も σ^2 の増大要因であることがわかる。つまり、 $\frac{\partial \xi}{\partial \sigma^2} > 0$ であり、かつ $\frac{\partial \omega}{\partial \xi} > 0$ であるから、 $\frac{\partial \omega}{\partial \sigma^2} > 0$ となる。これは、不確実性の増大が ω の上昇を通じて投資コストを上昇させることを意味する。投資コストが上昇すると、それだけ採算のとれる有利な投資機会が減少してしまうから投資量は減少する。つまり、不確実性の増大は企業の投資行動に対して抑制的に作用するため、その結果として、最適資本ストックの水準は低下することになる。

3. Caballero モデルにおける不可逆的投資と不確実性の相関

Bertola は、生産技術に関する規模の収穫は正、また市場は不完全競争市場であると仮定する投資モデルを導出し、不確実性の増大は不可逆的な投資に対して抑制的に作用することを示した。しかし、Bertola は規模の収穫一定や完全競争市場を仮定した場合でも、そうした不確実性と不可逆的投資の間の負の相関がそのまま維持されるかどうかについては議論していない。

こうした Bertola の議論に対して、Caballero (1991) は不確実性の増大は投資を増加させる要因であると指摘する。これら 2 つの結果の相違を比較するためには、Caballero (1991) における企業のリスク選好、不確実性、投

不確実性下での不可逆的投資決定モデル（永富）

資の不可逆性，生産技術の規模の収穫，市場の競争条件に関する仮定についても検討しておく必要がある。

1. 企業のリスク選好は中立的である。
2. 不確実性は，需要が対数正規のランダム・ウォーク過程に従うという形で導入する。
3. 投資の不可逆性は，投資が正の場合と負の場合とで反応が非対称であるような調整費用関数を仮定するという形で導入する。
4. 生産技術は規模に関して収穫一定，また市場は完全競争市場であると仮定するモデルを導出する。

Bertola と Caballero の議論において本質的に異なる点は上記の第 4 の点である。すなわち，両者の結果の相違は，規模の収穫と企業の競争条件に関する仮定の相違に依存するということである。これは，投資が不可逆的な性質を有している場合であっても，規模の収穫一定の生産関数を有する完全競争企業の場合には，不確実性の増大は投資を増加させることを示唆している。換言すれば，不確実性の増大が投資に対して抑制要因となるのは，企業が完全競争企業ではないか，あるいは生産技術が規模に関して収穫逦減的であるかのいずれか，またはその両方が成立する場合である。

規模の収穫一定という性質，および完全競争市場という性質の 2 つを仮定した場合に Caballero のような結果が得られる主な理由は，利潤関数が資本ストックに対して線形となるという点に求められる。つまり，利潤関数が資本ストックに対して線形であれば，資本の限界収入は資本ストックに依存しなくなる。その場合，企業にとって今期の資本ストックの水準と将来時点における資本ストックの水準は無差別となる。換言すれば，完全競争企業という性質および規模の収穫一定という性質の下では，投資が異時点間の資本ストックの水準に依存しないという意味で，時間上の結びつきの連鎖が切れることになる。これは，投資の不可逆性が企業の最適投資行動に対して影響を

与えないことを意味する。

以下ではまず、Bertola のモデルと同様に、需要関数ならびに生産関数について市場や技術構造を特定化しない一般化された関数形から議論を始めることにする。その後、完全競争と規模に関する収穫一定を仮定したモデルの構築を行う⁹⁾。

需要関数を以下のように定義する。

$$p_{i,\tau} = D_{i,\tau} \left(Q_{i,\tau} \right)^{\frac{(1-\psi)}{\psi}} \quad (27)$$

ここで、 p は生産物価格、 Q は生産量、 ψ はマーク・アップ要因（Markup Factor）、 D は対数正規ランダム・ウォーク過程（Lognormal Random Walk Process）に従う需要ショックを表す¹⁰⁾。なお、 $D_\tau = D_{\tau-1} e^{\varepsilon_\tau}$ を仮定し、 ε は平均が $D \left(-\frac{\sigma^2}{2} \right)$ 、分散が (σ^2) の正規分布をするパラメータである。

生産関数については、Bertola と同様、Cobb-Douglas 型生産関数を仮定する¹¹⁾。

$$Q_{i,\tau} = \left[A N_{i,\tau}^\alpha K_{i,\tau}^{1-\alpha} \right]^\phi \quad (28)$$

ここで、 ϕ は正の値をとる規模の収穫を表すパラメータである。

資本ストックを所与としたとき、短期の利潤関数（ Π ）は、(27) 式と (28) 式より、

不確実性下での不可逆的投資決定モデル（永富）

$$\begin{aligned}
 \Pi(D_{i,\tau}, N_{i,\tau}, K_{i,\tau}; A, w) &= p_{i,\tau} Q_{i,\tau} - wN_{i,\tau} \\
 &= D_{i,\tau} Q_{i,\tau}^{\frac{1}{\psi}} - wN_{i,\tau} \\
 &= D_{i,\tau} \left(A N_{i,\tau}^{\alpha} K_{i,\tau}^{1-\alpha} \right)^{\frac{\phi}{\psi}} - wN_{i,\tau} \quad (29)
 \end{aligned}$$

と表すことができる。ここで、 w は名目賃金率（一定）である。(29) 式を労働投入量 N で微分して、最大化のための 1 階の条件を求めると、

$$\frac{\partial \Pi}{\partial N_{i,\tau}} = D_{i,\tau} \left(\frac{\phi}{\psi} \right) \left[A N_{i,\tau}^{\alpha} K_{i,\tau}^{1-\alpha} \right]^{\frac{\phi-\psi}{\psi}} \alpha A N_{i,\tau}^{\alpha-1} K_{i,\tau}^{1-\alpha} - w = 0$$

となるが、これを N について解くことによって、最適な労働投入量 (N^*) を決定する労働需要関数を導くことができる。すなわち、

$$N_{i,\tau}^* = \left[\frac{\alpha \phi}{w \psi} \right]^{\frac{1}{1-\frac{\alpha \phi}{\psi}}} \left(A \right)^{\frac{\frac{\phi}{\psi}}{1-\frac{\alpha \phi}{\psi}}} \left(D_{i,\tau} \right)^{\frac{1}{1-\frac{\alpha \phi}{\psi}}} \left(K_{i,\tau} \right)^{\frac{\frac{(1-\alpha)\phi}{\psi}}{1-\frac{\alpha \phi}{\psi}}} \quad (30)$$

である。(30) 式を (29) 式に代入すると、利潤関数は、

$$\begin{aligned}
 \Pi &= D_{i,\tau} \left\{ A \left\{ \left[\frac{\alpha\phi}{w\psi} \right]^{\frac{1}{1-\frac{\alpha\phi}{\psi}}} \left(A \right)^{\frac{\frac{\phi}{\psi}}{1-\frac{\alpha\phi}{\psi}}} \left(D_{i,\tau} \right)^{\frac{1}{1-\frac{\alpha\phi}{\psi}}} \left(K_{i,\tau} \right)^{\frac{(1-\alpha)\phi}{\psi}} \right\}^\alpha \right. \\
 &\quad \left. \left(K_{i,\tau} \right)^{1-\alpha} \right\}^{\frac{\phi}{\psi}} - w \left\{ \left[\frac{\alpha\phi}{w\psi} \right]^{\frac{1}{1-\frac{\alpha\phi}{\psi}}} \left(A \right)^{\frac{\frac{\phi}{\psi}}{1-\frac{\alpha\phi}{\psi}}} \left(D_{i,\tau} \right)^{\frac{1}{1-\frac{\alpha\phi}{\psi}}} \right. \\
 &\quad \left. \left(K_{i,\tau} \right)^{\frac{(1-\alpha)\phi}{\psi}} \right\} \\
 &= \left[\frac{\alpha\phi}{w\psi} \right]^{\frac{\alpha\phi}{\psi}} \left(\frac{1}{1-\frac{\alpha\phi}{\psi}} \right) \left(A \right)^{\frac{\frac{\phi}{\psi}}{1-\frac{\alpha\phi}{\psi}}} \left(D_{i,\tau} \right)^{\frac{1}{1-\frac{\alpha\phi}{\psi}}} \left(K_{i,\tau} \right)^{\frac{(1-\alpha)\phi}{\psi}} \\
 &\quad - w \left[\frac{\alpha\phi}{w\psi} \right]^{\frac{1}{1-\frac{\alpha\phi}{\psi}}} \left(A \right)^{\frac{\frac{\phi}{\psi}}{1-\frac{\alpha\phi}{\psi}}} \left(D_{i,\tau} \right)^{\frac{1}{1-\frac{\alpha\phi}{\psi}}} \left(K_{i,\tau} \right)^{\frac{(1-\alpha)\phi}{\psi}} \\
 &= \left\{ \left[\frac{\alpha\phi}{w\psi} \right]^{\frac{\alpha\phi}{\psi}} \left(\frac{1}{1-\frac{\alpha\phi}{\psi}} \right) \left\{ 1 - w \frac{\left(\frac{\alpha\phi}{w\psi} \right)^{\frac{1}{1-\frac{\alpha\phi}{\psi}}}}{\left(\frac{\alpha\phi}{w\psi} \right)^{\frac{\alpha\phi}{\psi}}} \right\} \right\} \left(A \right)^{\frac{\frac{\phi}{\psi}}{1-\frac{\alpha\phi}{\psi}}}
 \end{aligned}$$

不確実性下での不可逆的投資決定モデル（永富）

$$\begin{aligned}
 & \left(D_{i,\tau} \right)^{\frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha\phi}{\psi} \right)^{\frac{(1-\alpha)\phi}{\psi}}}} \left(K_{i,\tau} \right)^{\frac{\frac{(1-\alpha)\phi}{\psi}}{\left(1 - \frac{\alpha\phi}{\psi} \right)^{\frac{(1-\alpha)\phi}{\psi}}}} \\
 &= \left\{ \left[\frac{\alpha\phi}{w\psi} \right]^{\frac{\frac{\alpha\phi}{\psi}}{\left(1 - \frac{\alpha\phi}{\psi} \right)^{\frac{(1-\alpha)\phi}{\psi}}}} \left(1 - \frac{\alpha\phi}{\psi} \right) \right\} \left(A \right)^{\frac{\frac{\phi}{\psi}}{\left(1 - \frac{\alpha\phi}{\psi} \right)^{\frac{(1-\alpha)\phi}{\psi}}}} \left(D_{i,\tau} \right)^{\frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha\phi}{\psi} \right)^{\frac{(1-\alpha)\phi}{\psi}}}} \left(K_{i,\tau} \right)^{\frac{\frac{(1-\alpha)\phi}{\psi}}{\left(1 - \frac{\alpha\phi}{\psi} \right)^{\frac{(1-\alpha)\phi}{\psi}}}} \\
 &= h D_{i,\tau}^{\eta} K_{i,\tau}^{\mu} \tag{31}
 \end{aligned}$$

と表すことができる。ここで、

$$\begin{aligned}
 h &= \left\{ \left[\frac{\alpha\phi}{w\psi} \right]^{\frac{\frac{\alpha\phi}{\psi}}{\left(1 - \frac{\alpha\phi}{\psi} \right)^{\frac{(1-\alpha)\phi}{\psi}}}} \left(1 - \frac{\alpha\phi}{\psi} \right) \right\} \left(A \right)^{\frac{\frac{\phi}{\psi}}{\left(1 - \frac{\alpha\phi}{\psi} \right)^{\frac{(1-\alpha)\phi}{\psi}}}} \\
 \eta &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha\phi}{\psi} \right)^{\frac{(1-\alpha)\phi}{\psi}}} > 1 \\
 \mu &= \frac{\frac{(1-\alpha)\phi}{\psi}}{1 - \frac{\alpha\phi}{\psi}} \leq 1
 \end{aligned}$$

である。

ところで、完全競争企業を仮定すると、 $\psi = 1$ である。また、生産関数の

不確実性下での不可逆的投資決定モデル（永富）

一次同次性（規模に関して収獲一定）を仮定すると、 $\phi = 1$ である。つまり、これらの条件を考慮すると、 $h = (1-\alpha) \left(A \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{w} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$, $\eta = \frac{1}{1-\alpha}$, $\mu = 1$ となる。したがって、完全競争市場と生産技術の規模に関する収獲一定を仮定した場合の利潤関数は、

$$\begin{aligned} \Pi &= (1-\alpha) \left(A \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{w} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(D_{i,\tau} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} K_{i,\tau} \\ &= g D_{i,\tau}^{\kappa} K_{i,\tau} \end{aligned} \quad (32)$$

と表すことができる。ここで、

$$\begin{aligned} g &= (1-\alpha) \left(A \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{w} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ \kappa &= \frac{1}{1-\alpha} \end{aligned}$$

である。

さて、Bertola は資本の購入費用を投資コストとみなして議論を行った。また、投資の不可逆性については、実施される投資量の範囲を非負の領域 ($I \geq 0$) に限定し、それを最大化問題の制約条件に加味するという形でモデルの解を求めた。それに対して、Caballero は一括型の調整費用関数 (Lump-sum Cost Function) を仮定し、それを目的関数の中に組み込んで議論している。

不確実性下での不可逆的投資決定モデル（永富）

$$C(I_{i,\tau}) = p^I_{\tau} I_{i,\tau} + [I > 0] \vartheta_1 p^I_{\tau} I_{i,\tau}^{\zeta} + [I < 0] \vartheta_2 p^I_{\tau} |I_{i,\tau}|^{\zeta} \quad (33)$$

(33) 式では、投資コストとして、資本の購入費用（第1項）のみならず投資量に対して指数的に増加する費用の調整分（第2項および第3項）も一括して含まれるという構造になっている¹²⁾。特に後者については、2つのケースを考慮している。1つは投資量が正の場合、 $[I > 0]$ 、もう1つは負の場合 $[I < 0]$ である。なお、(33) 式において、 $\zeta \geq 1$ 、かつ $\vartheta_1 \neq \vartheta_2 > 0$ を仮定している。ここでもし、 $\zeta > 1$ 、かつ $\vartheta_1 = \vartheta_2 > 0$ であるとすると、(33) 式は凸型で対称的な構造を持つ調整費用関数となる。また、 $\zeta = 1$ 、かつ $\vartheta_1 = 0$ および $\vartheta_2 = \infty$ であるときは、投資が完全に不可逆であることを示す。

資本蓄積方程式を制約条件とする企業価値の最大化問題について、以下では簡単化のため2期間モデルで定式化する。投資の調整費用関数を考慮した場合の Bellman Equation は、

$$V_{i,1}(K_{i,1}, D_{i,1}) = \max_{I_{i,1}} \{ \Pi(K_{i,1}, D_{i,1}) - C(I_{i,1}) + E_{i,1}[V_{i,2}(K_{i,2}, D_{i,2})] \} \quad (34)$$

$$\text{s.t. } K_{i,1} = K_{i,0} + I_{i,1}$$

で与えられる¹³⁾。なお、企業のリスク選好は中立的であると仮定する。

(34) 式を第1期の投資量 $I_{i,1}$ で偏微分して、最大化のための1階の条件を求めると、

不確実性下での不可逆的投資決定モデル（永富）

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V_{i,1}(K_{i,1}, D_{i,1})}{\partial I_{i,1}} &= \frac{\partial \Pi(K_{i,1}, D_{i,1})}{\partial K_{i,1}} \frac{\partial K_{i,1}}{\partial I_{i,1}} - \frac{dC(I_{i,1})}{dI_{i,1}} + \frac{\partial E_{i,1}[V_{i,2}(K_{i,2}, D_{i,2})]}{\partial K_{i,1}} \frac{\partial K_{i,1}}{\partial I_{i,1}} \\
 &= \Pi_{K_{i,1}}(K_{i,2}, D_{i,1}) - C_{I_{i,1}}(I_{i,1}) + E_{i,1}[V_{i,2,K_{i,1}}(K_{i,2}, D_{i,2})] = 0
 \end{aligned} \tag{35}$$

が得られる。

一方、終期時点（ $\tau = 2$ ）の価値関数は、

$$\begin{aligned}
 V_{i,2}(K_{i,2}, D_{i,2}) &= \max_{I_{i,2}} \{ \Pi(K_{i,2}, D_{i,2}) - C(I_{i,2}) \} \\
 &= \max_{I_{i,2}} \{ \Pi(K_{i,1} + I_{i,2}, D_{i,2}) - C(I_{i,2}) \}
 \end{aligned} \tag{36}$$

で表される。(36) 式を第 2 期の投資量 $I_{i,2}$ で偏微分して、第 2 期の価値関数に関する最大化のための 1 階の条件を求めると、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V_{i,2}(K_{i,2}, D_{i,2})}{\partial I_{i,2}} &= \frac{\partial \Pi(K_{i,2}, D_{i,2})}{\partial K_{i,2}} \frac{\partial K_{i,2}}{\partial I_{i,2}} - \frac{dC(I_{i,2})}{dI_{i,2}} \\
 &= \Pi_{K_{i,2}}(K_{i,1} + I_{i,2}, D_{i,2}) - C_{I_{i,2}}(I_{i,2}) = 0
 \end{aligned} \tag{37}$$

が得られる。

(32) 式より、第 2 期の資本の限界利潤は、

不確実性下での不可逆的投資決定モデル（永富）

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial K_{i,2}} &= (1-\alpha) \left(A \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{w} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(D_{i,2} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &= g D_{i,2}^{\kappa}\end{aligned}\tag{38}$$

である。

また、(33) 式より、第 2 期の限界資本コストは、

$$\frac{dC(I_{i,2})}{dI_{i,2}} = p_{i,2}' + [I > 0] \vartheta_1 p_{i,2}' \zeta I_{i,2}^{\zeta-1} + [I < 0] \vartheta_2 p_{i,2}' \zeta |I_{i,2}|^{\zeta-1}$$

である。

したがって、(37) 式は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{i,2}(K_{i,2}, D_{i,2})}{\partial I_{i,2}} &= g D_{i,2}^{\kappa} - [I > 0] p_{i,2}' (1 + \vartheta_1 \zeta I_{i,2}^{\zeta-1}) \\ &\quad - [I < 0] p_{i,2}' (1 - \vartheta_2 \zeta |I_{i,2}|^{\zeta-1}) = 0\end{aligned}\tag{39}$$

と表すことができる。したがって、(39) 式から第 2 期の投資決定モデルを 2 つのケースに分けて示すことができる。

I. $I_{i,2} > 0$, あるいは, $\frac{g D_{i,2}^{\kappa}}{p_{i,2}'} \geq 1$, のケース

$$\begin{aligned}
 I_{i,2} &= \left[\frac{\frac{g D_{i,2}^{\kappa}}{p_{i,2}'} - 1}{\vartheta_1 \zeta} \right]^{\frac{1}{\zeta-1}} \\
 &= \left[\frac{g D_{i,2}^{\kappa} - p_{i,2}'}{p_{i,2}' \vartheta_1 \zeta} \right]^{\frac{1}{\zeta-1}} \quad (40)
 \end{aligned}$$

II. $I_{i,2} < 0$, あるいは, $\frac{g D_{i,2}^{\kappa}}{p_{i,2}'} < 1$, のケース

$$\begin{aligned}
 I_{i,2} &= - \left[\frac{1 - \frac{g D_{i,2}^{\kappa}}{p_{i,2}'}}{\vartheta_2 \zeta} \right]^{\frac{1}{\zeta-1}} \\
 &= - \left[\frac{p_{i,2}' - g D_{i,2}^{\kappa}}{p_{i,2}' \vartheta_2 \zeta} \right]^{\frac{1}{\zeta-1}} \quad (41)
 \end{aligned}$$

これら2つのケースのいずれを見ても、第2期の投資は第1期の資本ストックに依存していないことがわかる。資本の限界価値 $V_{i,2, K_{i,1}}$ は、 $\Pi_{K_{i,1}}(K_{i,1} + I_{i,2}, D_{i,2})$ に等しい。完全競争市場の場合、(38) 式より、 $V_{i,2, K_{i,1}} = g D_{i,2}^{\kappa}$ となる。すなわち、資本の限界価値は資本ストックに依存していないから、第2期の価値関数は資本ストックに関して線形であることがわかる。

こうした議論は、第1期についても当てはまる。(32) 式より、第1期の資本の限界利潤は、

不確実性下での不可逆的投資決定モデル（永富）

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial K_{i,1}} &= (1-\alpha) \left(A \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{w} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(D_{i,1} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &= g D_{i,1}^{\kappa}\end{aligned}\quad (42)$$

である。

また、(33) 式より、第 1 期の資本の限界調整費用は、

$$\frac{dC(I_{i,1})}{dI_{i,1}} = p'_{i,1} + [I > 0] g_1 p'_{i,1} \zeta I_{i,1}^{\zeta-1} + [I < 0] g_2 p'_{i,1} \zeta |I_{i,1}|^{\zeta-1}$$

である。

したがって、(35) 式は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{i,1}(K_{i,1}, D_{i,1})}{\partial I_{i,1}} &= g D_{i,1}^{\kappa} - [I > 0] p'_{i,1} (1 + g_1 \zeta I_{i,1}^{\zeta-1}) \\ &\quad - [I < 0] p'_{i,1} (1 - g_2 \zeta |I_{i,1}|^{\zeta-1}) + E_{i,1} [V_{i,2,K_{i,1}}(K_{i,2}, D_{i,2})] = 0\end{aligned}\quad (43)$$

と表すことができる。

ところで、(43) 式の右辺第 4 項については、(36) 式および (42) 式より、

$$\begin{aligned}
 V_{i,2,K_{i,1}}(K_{i,2}, D_{i,2}) &= \frac{\partial V_{i,2}(K_{i,2}, D_{i,2})}{\partial K_{i,1}} \\
 &= \frac{\partial \Pi(K_{i,1} + I_{i,2}, D_{i,2})}{\partial K_{i,1}} \\
 &= g D_{i,2}^{\kappa}
 \end{aligned} \tag{44}$$

であるから,

$$E_{i,1}[V_{i,2,K_{i,1}}(K_{i,2}, D_{i,2})] = E_{i,1}(g D_{i,2}^{\kappa})$$

となる。

また, 仮定 $D_{\tau} = D_{\tau-1}e^{\varepsilon_{\tau}}$ より,

$$E_{i,1}(g D_{i,2}^{\kappa}) = E_{i,1}\left[g(D_{i,1}e^{\varepsilon_2})^{\kappa}\right]$$

であるから, (43) 式は,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V_{i,1}(K_{i,1}, D_{i,1})}{\partial I_{i,1}} &= g D_{i,1}^{\kappa} - [I > 0] p_{i,1}^I (1 + \vartheta_1 \zeta I_{i,1}^{\zeta-1}) \\
 &\quad - [I < 0] p_{i,1}^I (1 - \vartheta_2 \zeta |I_{i,1}|^{\zeta-1}) + E_{i,1}\left[g(D_{i,1}e^{\varepsilon_2})^{\kappa}\right] = 0
 \end{aligned} \tag{45}$$

不確実性下での不可逆的投資決定モデル（永富）

となる。

ここで、 $E_{i,1}(e^{\varepsilon_2})^\kappa$ について、Ito's Lemma を用いると、

$$E_{i,1}(e^{\varepsilon_2})^\kappa = \frac{\sigma^2}{2} \kappa(\kappa-1)$$

となるから、(45) 式は、

$$\begin{aligned} & g D_{i,1}^\kappa - p_{i,1}^I \left\{ [I > 0] (1 + \vartheta_1 \zeta I_{i,1}^{\zeta-1}) - [I < 0] (1 - \vartheta_2 \zeta |I_{i,1}|^{\zeta-1}) \right\} \\ & \quad + g D_{i,1}^\kappa E_{i,1} \left[(e^{\varepsilon_2})^\kappa \right] \\ & = g D_{i,1}^\kappa - p_{i,1}^I \left\{ [I > 0] (1 + \vartheta_1 \zeta I_{i,1}^{\zeta-1}) - [I < 0] (1 - \vartheta_2 \zeta |I_{i,1}|^{\zeta-1}) \right\} \\ & \quad + g D_{i,1}^\kappa \left[\frac{\sigma^2}{2} \kappa(\kappa-1) \right] \\ & = g D_{i,1}^\kappa \left\{ 1 + e^{\left[\frac{\kappa(\kappa-1)}{2} \right] \sigma^2} \right\} \\ & \quad - p_{i,1}^I \left\{ [I > 0] (1 + \vartheta_1 \zeta I_{i,1}^{\zeta-1}) - [I < 0] (1 - \vartheta_2 \zeta |I_{i,1}|^{\zeta-1}) \right\} = 0 \quad (46) \end{aligned}$$

と書き直すことができる。したがって、(46) 式から第 1 期の投資決定モデルを 2 つのケースに分けて示すことができる。

I. $I_{i,1} \succ 0$, あるいは, $\frac{g D_{i,1}^\kappa}{p_{i,1}'} \left\{ 1 + e^{\left[\frac{\kappa(\kappa-1)}{2} \right] \sigma^2} \right\} \geq 1$ のケース

$$\begin{aligned}
 I_{i,1} &= \left\{ \frac{\frac{g D_{i,1}^\kappa}{p_{i,1}'} \left[1 + e^{\left[\frac{\kappa(\kappa-1)}{2} \right] \sigma^2} \right] - 1}{\vartheta_1 \zeta} \right\}^{\frac{1}{\zeta-1}} \\
 &= \left\{ \frac{g D_{i,1}^\kappa \left[1 + e^{\left[\frac{\kappa(\kappa-1)}{2} \right] \sigma^2} \right] - p_{i,1}'}{p_{i,1}' \vartheta_1 \zeta} \right\}^{\frac{1}{\zeta-1}} \tag{47}
 \end{aligned}$$

II. $I_{i,1} \prec 0$, あるいは, $\frac{g D_{i,1}^\kappa}{p_{i,1}'} \left\{ 1 + e^{\left[\frac{\kappa(\kappa-1)}{2} \right] \sigma^2} \right\} < 1$ のケース

$$\begin{aligned}
 I_{i,1} &= - \left\{ \frac{1 - \frac{g D_{i,1}^\kappa}{p_{i,1}'} \left[1 + e^{\left[\frac{\kappa(\kappa-1)}{2} \right] \sigma^2} \right]}{\vartheta_2 \zeta} \right\}^{\frac{1}{\zeta-1}} \\
 &= - \left\{ \frac{p_{i,1}' - g D_{i,1}^\kappa \left[1 + e^{\left[\frac{\kappa(\kappa-1)}{2} \right] \sigma^2} \right]}{p_{i,1}' \vartheta_2 \zeta} \right\}^{\frac{1}{\zeta-1}} \tag{48}
 \end{aligned}$$

(47) 式および (48) 式を見ると、第 1 期の投資も資本ストックに依存していないことがわかる。これは、第 1 期の価値関数も資本ストックに関して

不確実性下での不可逆的投資決定モデル（永富）

線形であることを意味している。投資に対する不確実性の効果については、 $\kappa > 1$ かつ $\zeta \geq 1$ であるから、 $\frac{\partial I}{\partial \sigma^2} > 0$ となる。また、仮定より、 $\vartheta_j > 0$ ($j = 1, 2$) であるから、調整費用関数のパラメータは不確実性の増大が投資の増加要因であるという結果に影響を与えない。投資が完全に不可逆的であるようなケースは、(33) 式において一般に、 $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = \infty$, $\zeta_1 = 1$ で示される。しかし、 $\vartheta_1 = 0$ と仮定すると、(47) 式の分母はゼロとなってしまう定義でなくなる。また、 $\zeta = 1$ を仮定すると、(47) 式、(48) 式ともに右辺が 1 となってしまう。つまり、完全競争という性質および規模に関して収穫一定という性質の 2 つを仮定する場合、調整費用関数について何らかの凸性を導入しなければ投資決定モデルを導出することができなくなる。それゆえに、投資の不可逆性の存在を反映させながら、かつ Caballero のモデルを解くためには、投資の調整費用構造（パラメータ）について、 $\vartheta_1 > 0$ および $\zeta > 1$ という条件を仮定する必要がある。ただし、このように仮定したとしても不確実性の増大が投資を増加させるという結果に影響を与えない。したがって、リスク選好が中立的で、規模の収穫が一定であるような完全競争企業については、不確実性の増大は常に不可逆的投資に対してプラスの影響を与えることがわかる。

4. おわりに

本研究では、不可逆的投資に対する不確実性の影響について、Bertola (1998) と Caballero (1991) の議論を考察した。Bertola と Caballero では不可逆的投資と不確実性の間の相関について異なった結果を報告している。Bertola では、次のような仮定に基づいて議論を展開している。1. 企業のリスク選好は中立的である。2. 不確実性は、需要、技術進歩、賃金率、資本財価格が幾何ブラウン運動の確率過程に従うという形で導入する。3. 投資の不可逆性は、企業価値最大化問題の中で投資の非負制約という形で導入する。4. 生産技術の規模の収穫は正、また市場は不完全競争市場であるとす

るモデルを導出する。一方、Caballero では次のような仮定に基づいて議論が行われている。1. 企業のリスク選好は中立的である。2. 不確実性は、需要が対数正規のランダム・ウォーク仮定に従うという形で導入する。3. 投資の不可逆性は、投資が正の場合と負の場合とで反応が非対称であるような調整費用関数を仮定するという形で導入する。4. 生産技術は規模に関して収穫一定、また市場は完全競争市場であると仮定するモデルを導出する。

分析の結果、Bertola と Caballero の相関に関する相違は、上記の仮定の第4の点、すなわち生産技術の規模に関する収穫と市場の競争性に関する仮定の相違にその原因が求められることがわかった。それは、投資が不可逆的な性質を有している場合であっても、規模に関する収穫一定の生産関数を有する完全競争企業の場合には、不確実性の増大は投資の増加要因として作用するということである。換言すれば、不確実性の増大が不可逆的投資に対して抑制要因となるのは、企業が完全競争企業でないか、あるいは規模に関して収穫逓減的であるかのいずれか、またはその両方の場合であるということである。

最後に、今後の研究の方向性について若干述べておきたい。本稿で検討した Caballero (1991) や Bertola (1998) のモデルで共通している点は、資本が完全に不可逆的であると想定している点である。それに対して、新古典派投資モデルでは投資は完全に可逆的であると仮定される。実際の資本の不可逆性の程度はその中間であると思われる。資本が部分的に不可逆的であるようなケースを想定したとき、そのような資本への投資と不確実性との間の相関はどのように変化するであろうか。今後はこうした点についてさらに研究を進めていきたいと考えている。

記号一覧

- A 技術進歩
- C 投資コスト

不確実性下での不可逆的投資決定モデル（永富）

D	需要
E	期待オペレータ
H	企業の事業環境の要約変数
I	投資量
i	企業の識別記号
K	資本ストック
\dot{K}	資本ストックの時間微分
L	Lagrange 被積分関数
N	労働投入量
N^*	最適労働投入量
p	生産物価格
p^I	資本財価格
Q	生産量
V	企業価値
w	名目賃金率
α	生産関数のパラメータ
δ	減価償却率
ϕ	規模の収穫を表すパラメータ
λ	Lagrange 乗数
μ	企業の独占力を表すパラメータ
$\Pi(\cdot)$	短期の利潤関数
ρ	割引率
τ	時間変数
ψ	マーク・アップ要因

注

- 1) 不確実性の投資への影響に関する先行研究については、永富（2011a, 2011b, 2011c, 2011d）およびそれらの参考文献を参照されたい。

- 2) 例えば, Zeira (1990) 等を参照せよ。
- 3) 不確実性と投資の間の正の相関を報告する文献には, 例えば, Hartman(1972), Abel(1983,1984,1985), Caballero(1991) などがある。一方, 両者の間に負の相関があることを報告する文献には, 例えば, Pindyck(1988), Bertola(1998) などがある。
- 4) 投資の不可逆性と不確実性の関係を分析した研究として, 例えば, Bernanke (1983), McDonald and Siegel (1986), Pindyck (1988), Caballero (1991), Dixit and Pindyck (1994), Bertola (1998), Abel and Eberly (1999) などがある。
- 5) モデルの導出ならびに議論の詳細については, Bertola (1998) を参照せよ。
- 6) 需要関数の位置を決定する需要ショックのパラメータ D は, 消費者の所得水準や代替財の価格水準等の関数として表わされる。なお, 本節では不完全競争市場のケースをも含んだより一般的なケースについて考察するため, 需要ショックおよび生産物価格の変数の添え字に企業の識別記号 i を付している。もちろん, 完全競争市場のケースを議論する場合は, i が消去されることは言うまでもない。
- 7) 本稿では, 生産物市場の部分均衡モデルを議論するため, 労働市場は完全競争市場であると仮定している。そのため, 賃金率については企業の識別記号である添え字の i を付けない。
- 8) 注 7) を参照せよ。すなわち, 資本財市場も完全競争市場と仮定している。
- 9) モデルの導出ならびに議論の詳細については, Caballero (1991) を参照せよ。なお, Caballero (1991) では, 簡単化のため技術進歩および名目賃金率が経時的に一定であると仮定して議論している。しかし, これらの仮定を外すことは何ら難しい問題ではない。
- 10) ここで, $\frac{1}{\psi} = \mu$ とおけば, Caballero の需要関数は Bertola (1998) で定義された需要関数, すなわち前節の (2) 式と等しくなる。
- 11) Caballero の生産関数と Bertola の生産関数では, 技術進歩に関する捉え方が若干異なるものの, 以下の議論において何ら本質的な影響は生じない。
- 12) Caballero は, 調整費用関数において資本財価格を 1 に基準化 ($p^I = 1$) して議論を行っている。しかし, 本稿ではモデルの一般化という観点から, $p^I \neq 1$ を仮定し, 資本財価格を明示して議論することにした。
- 13) 以下の議論では, 割引率と減価償却率を無視する。

References

- Abel, A. B. (1983), "Optimal Investment under Uncertainty", *American Economic Review*, 73, 228-233.

- Abel, A. B. (1984), “The Effects of Uncertainty on Investment and the Expected Long-Run Capital Stock”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 7, 39–54.
- Abel, A. B. (1985), “A Stochastic Model of Investment, Marginal q and the Market Value of the Firm”, *International Economic Review*, 26, 305–322.
- Abel, A. B. and O. J. Blanchard, (1986), “The Present Value of Profits and Cyclical Movements in Investment”, *Econometrica*, 54, 249–273.
- Abel, A. B. and J. C. Eberly (1999), “The Effects of Irreversibility and Uncertainty on Capital Accumulation”, *Journal of Monetary Economics*, 44, 339–377.
- Bernanke, B. S. (1983), “Irreversibility, Uncertainty and Cyclical Investment”, *Quarterly Journal of Economics*, 98, 85–106.
- Bertola, G. (1998), “Irreversible Investment”, *Research in Economics*, 52, 3–37.
- Caballero, R. J. (1991), “On the Sign of the Investment-Uncertainty Relationship”, *American Economic Review*, 81, 279–288.
- Dietrich, J. K. and D. G. Heckerman (1980), “Uncertain Inflation and the Demand for Capital”, *Economic Inquiry*, 18, 461–471.
- Dixit, A. K. and R. S. Pindyck (1994), *Investment under Uncertainty*: Princeton University Press.
- Ghosal, V. (1995), “Input Choices under Price Uncertainty”, *Economic Inquiry*, 33, 142–158.
- Hartman, R. (1972), “The Effect of Price and Cost Uncertainty on Investment”, *Journal of Economic Theory*, 5, 258–266.
- Hartman, R. (1976), “Factor Demand with Output Price Uncertainty”, *American Economic Review*, 66, 675–681.
- Lucas, R. E. and E. C. Prescott (1971), “Investment under Uncertainty”, *Econometrica*, 39, 659–681.
- McDonald, R. and D. Siegel (1986), “The Value of Waiting to Invest”, *Quarterly Journal of Economics*, 101, 707–728.
- Pindyck, R. S. (1988), “Irreversible Investment, Capacity Choice, and the Value of the Firm”, *American Economic Review*, 78, 969–985.
- Pindyck, R. S. (1993), “A Note on Competitive Investment under Uncertainty”, *American Economic Review*, 83, 273–277.
- Zeira, J. (1990), “Cost Uncertainty and the Rate of Investment”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 14, 53–63.
- 永富隆司 (2011a) 「生産活動および市場価格の不確実性の影響について」『政経論叢』国士舘大学政経学会 No.154 49–69.
- 永富隆司 (2011b) 「設備投資に対する価格の不確実性の影響について」『グローバル

不確実性下での不可逆的投資決定モデル（永富）

時代の政治・経済・経営』所収 国士舘大学政経学会編 629-671.

永富隆司 (2011c) 「非中立的なリスク選好企業に対する不確実性の影響について—平均・分散・共分散モデル—」『政経論叢』国士舘大学政経学会 No.156 31-64.

永富隆司 (2011d) 「投資の不可逆性と最適投資基準—投資の Option Approach—」『政経論叢』国士舘大学政経学会 No.157 53-82.