【論　説】

投資の不可逆性と最適投資基準
—投資の Option Approach—

永　冨　隆　司

目　次

1. はじめに

投資の意思決定過程では，採算のハードルを明らかにして投資を実施するかどうかの妥当性を判断することと，その投資をいつ実施するかというタイミングが重要な問題となってくる。つまり，最適な投資基準あるいは最適な投資政策という場合，それは２つの意味内容をもつことになる。１つは，投資を実施するかどうかの妥当性を判断する基準とはどのようなものであるかということであり，もう１つは，投資のタイミングを決定する判断基準とは何かということである。

最適投資基準の形式は，離散時間モデルと連続時間モデルのどちらで議論（定式化）するかによって異なる。すなわち，離散時間モデルでは投資のタイミングという形で最適な投資基準が示されるのに対して，連続時間モデル

では投資を実施すべきかどうかの妥当性を判断する臨界値の式という形でそれが示される。

いったん投資が実施されると，投下資本の回収は極めて困難であるか，あるいは完全に埋没費用（Sunk Cost）となってしまう場合がある。投資が不可逆的（Irreversible）であると不確実性の増大は企業の投資行動（投資量および投資のタイミング）に対してマイナスの影響を与える可能性がある。わが国における近年の投資行動の不活発さの背景には，先行き不透明感（不確実性）が増しているということの他に,そもそも投資が不可逆的な側面を持っているということがその背景にあると考えられる。こうした理由から本研究では，投資の不可逆性が不確実性下における投資行動に対してどのような影響を及ぼすかという問題について，最適投資決定基準とは何かという議論の中で理論的に考察することにする。

本論文の構成は以下の通りである。第2節では，Servэn（1997）のモデルを詳細に検討し，タイミングに関する最適投資基準について議論する。第3節では，McDonald and Siegel（1986）および Dixit and Pindyck（1994）のモデルを詳細に検討し，不確実性下における不可逆的な投資の最適実施基準について議論する。また，新古典派投資理論において重要な役割を果たしている投資の純現在価値基準が，オプション・アプローチにおいてどのように修正されるかという点についても議論する。最後に，これらの理論分析の結果を整理して本稿を締めくくる。

2. Option Approach による投資のタイミング基準

本節では，投資の不可逆性が不確実性下における投資のタイミングに対してどのような影響を与えるかを分析する Servэn（1997）のモデルを詳細に検討する。Servэn の議論は，投資決定に対するオプション・アプローチ（Option Approach）である。オプション・アプローチでは，即時に投資を実施していれば得られたであろう利益を投資を延期した場合の機会費用（遺失利益）と考えてコストとみなす。他方，新しい情報を得るために投資を延期することで得ら

れる期待収益を待つことによる利益(the option value to wait)と考える。そして，これらのコストと利益を均衡させることが当該企業にとっての最適投資政策となる。投資のオプション・アプローチで重要なことは，企業が即時に投資を実施するときその時点で投資を延期する（待つ）という選択権を失うこと，すなわち投資 Option を放棄するという行為を考慮に入れて議論するという点である。つまり，投資 Option の放棄は即時的に投資を行うことのコストの一部を構成するわけである。

投資のオプション・アプローチは，新古典派投資理論の投資基準の1つである純現在価値基準（Net Present Value Rule）を修正するアプローチである[1)]。純現在価値基準は，追加的な資本1単位当たりの期待利潤が資本の購入費用等の限界的なコストを上回っていれば投資を行うことが妥当であると判断する投資基準である。また，最適な投資量は両者が一致する点で与えられる。ところが，純現在価値基準では，上記のような投資 Option の放棄をコストとして認識していない。投資が不可逆的な性質を有していると，将来の収益環境に関するより多くの，あるいはより正確な情報が得られるまで投資を延期する方が利益は大きいかもしれない。つまり，不確実性の下では投資の不可逆性は投資のタイミングを遅らせる要因となる可能性があるということである。

さて，不確実性の下で不可逆的な投資を実施するリスク中立的な企業の企業価値最大化問題を考える[2)]。今期（$\tau = 0$）の期首時点で投資を行うと，期末時点において π_0 の収益が確実に得られるものとする。ただし，来期以降の収益は不確実である。したがって，来期以降の収益については $\tau = 0$ 時点において期待値 $E_0(\pi)$ として評価される。企業が $\tau = 0$ 時点で投資を行うと，無限期間にわたって発生する収益の期待割引現在価値は，

$$V_{i,0} = -p^I I_{i,0} + \frac{1}{1+\rho}\pi_{i,0} + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^2 E_{i,0}(\pi_{i,1}) + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^3 E_{i,0}(\pi_{i,2}) + \cdots\cdots$$

$$= -p^I I_{i,0} + \frac{1}{1+\rho}\pi_{i,0} + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^2 \left[E_{i,0}(\pi_{i,1}) + \left(\frac{1}{1+\rho}\right) E_{i,0}(\pi_{i,2}) + \cdots\cdot\right]$$

$$= -p^I I_{i,0} + \frac{1}{1+\rho}\pi_{i,0} + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^2 \sum_{\tau=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{\tau} E_{i,0}(\pi_{i,\tau+1}) \qquad (1)$$

と表される。ここで, V_0 は初期時点で評価する企業価値, p^I は資本財価格（一定）, I は投資量, ρ は割引率（一定）, π はキャッシュ・フロー, E は期待オペレータ, i は企業の識別記号, τ は時点を表す。将来発生するキャッシュ・フローが第１期（$\tau = 1$）に実現するキャッシュ・フロー（$\pi_{i,1}$）で一定であるとすると,（1）式は,

$$V_{i,0} = -p^I I_{i,0} + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)\left[\pi_{i,0} + \left(\frac{1}{\rho}\right) E_{i,0}(\pi_{i,1})\right] \qquad (2)$$

と表わすことができる。投資の純現在価値基準にしたがえば,（2）式において $V_{i,0} \succ 0$ であれば企業は $\tau = 0$ 時点において投資を実施することが妥当であると判断される。

（2）式の両辺を投資額 $p^I I$ で割ると,

$$\frac{V_{i,0}}{p^I I_{i,0}} = -1 + \frac{\left(\frac{1}{1+\rho}\right)\left[\pi_{i,0} + \left(\frac{1}{\rho}\right) E_{i,0}\left(\pi_{i,1}\right)\right]}{p^I I_{i,0}} \qquad (3)$$

が得られる。(3) 式の右辺第2項の分子は，投資計画から得られる収益の期待割引現在価値である。また，分母は資本財の購入費用である。つまり，右辺第2項は概念的には Tobin's q である[3)]。したがって，

$$\frac{\left(\frac{1}{1+\rho}\right)\left[\pi_{i,0}+\left(\frac{1}{\rho}\right)E_{i,0}\left(\pi_{i,1}\right)\right]}{p^{I}I_{i,0}}=q_{i,0}\succ 1 \tag{4}$$

であれば，(3) 式の左辺は $\frac{V_{i,0}}{p^{I}I_{i,0}}\succ 0$ となるから，投資の純現在価値基準は Tobin's q が $q\succ 1$ であれば投資を実施することが妥当であると判断する基準であるとみなすことができる。

あるいはまた，(2) 式について $V_{i,0}\succ 0$ ならば，

$$-p^{I}I_{i,0}+\left(\frac{1}{1+\rho}\right)\left[\pi_{i,0}+\left(\frac{1}{\rho}\right)E_{i,0}\left(\pi_{i,1}\right)\right]\succ 0$$

であるから，投資の純現在価値基準に基づく投資の実施条件を

$$\left(\pi_{i,0}-\rho\, p^{I}I_{i,0}\right)+\frac{\left[E_{i,0}\left(\pi_{i,1}\right)-\rho\, p^{I}I_{i,0}\right]}{\rho}\succ 0 \tag{5}$$

と表すこともできる。ここで，$\rho p^{I}I$ は投資の使用者費用（User Cost）であ

る[4]。投下資本を任意の時点ですべて回収できるならば，すなわち投資が完全に可逆的であるならば，企業は将来の期待純収益について考慮する必要はない。なぜなら，投資が不利であると判明した時点で投下資本を回収すればよいからである。つまり，投資が完全に可逆的であるときは（5）式の左辺の第２項を無視することができる。したがって，投資が可逆的な場合の投資条件は，初期時点における投資収益が資本の使用者費用を上回ること，すなわち $\pi_{i,0} \succ \rho p^I I_{i,0}$ と表わされる。

ところが，投資が不可逆的である場合には以上の議論は成立しない。企業は,投資のタイミングについてある程度の自由性を持っていると考えられる。もし，初期時点で投資を実施してしまえば，その時点で投資を延期するという選択権（Option）は喪失する。逆に，投資を延期すれば投資の実施時期に関する選択権は企業の手元に残る。つまり，投資の選択権（Option）を考慮するということがモデルにおいて投資の不可逆的側面を反映しているということになる。

初期時点においては投資収益が使用者費用を上回っている $\pi_{i,0} \succ \rho p^I I_{i,0}$ としても，期待収益が使用者費用を下回る $E_{i,0}(\pi_{i,1}) \prec \rho p^I I_{i,0}$ という状況が発生するかもしれない。つまり，投資が不可逆的であるほど将来の収益環境に関するより正確な情報が得られるまで企業は投資を延期するかもしれない。ただし，投資を延期するという意思決定を行うと本来得られたであろう初期時点での投資からの収益は得られなくなるという機会費用（遺失利益）が発生する。

第１期（$\tau = 1$）において投資を実施する場合に期待される企業価値を初期時点（$\tau = 0$）で評価すると，

$$E_{i,0}\left(V_{i,1}\right) = \left(\frac{1}{1+\rho}\right) E_{i,0}\left(-p^I I_{i,1}\right) + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^2 E_{i,0}\left(\pi_{i,1}\right) + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^3 E_{i,0}\left(\pi_{i,2}\right) + \cdots\cdot$$

$$= \left(\frac{1}{1+\rho}\right) E_{i,0}\left(-p^I I_{i,1}\right) + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^2 \left[E_{i,0}\left(\pi_{i,1}\right) + \left(\frac{1}{1+\rho}\right) E_{i,0}\left(\pi_{i,2}\right) + \cdots\cdots \right]$$

$$= \left(\frac{1}{1+\rho}\right) E_{i,0}\left(-p^I I_{i,1}\right) + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^2 \sum_{\tau=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{\tau} E_{i,0}\left(\pi_{i,\tau+1}\right) \qquad (6)$$

と表すことができる。投資量は各期一定（$I_{i,\tau} = I_i$），また将来の投資収益の流列は第１期に実現する投資収益で一定（$\pi_{i,\tau} = \pi_{i,1}$）であると仮定する。投資を１期延期した場合，期待収益が資本の購入費用を上回っていれば，またそのときに限って企業は投資を実施する。この場合，第１期（$\tau = 1$）で評価される企業価値（V_1）は，(6) 式より，

$$\begin{aligned} V_{i,1} &= \Pr\left[\pi_{i,1} \succ \rho p^I I_i\right] \left[\frac{1}{1+\rho}\left(-p^I I_i\right) \right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^2 \sum_{\tau=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{\tau} E_{i,0}\left[\pi_{i,1} \middle| \pi_{i,1} \succ \rho p^I I_i\right] \right] \\ &= \Pr\left[\pi_{i,1} \succ \rho p^I I_i\right] \left[\frac{1}{1+\rho}\left(-p^I I_i\right) + \frac{1}{\rho(1+\rho)} E_{i,0}\left[\pi_{i,1} \middle| \pi_{i,1} \succ \rho p^I I_i\right] \right] \\ &= \left(\frac{1}{1+\rho}\right) \Pr\left[\pi_{i,1} \succ \rho p^I I_i\right] \left[\frac{1}{\rho} E_{i,0}\left[\pi_{i,1} - \rho p^I I_i \middle| \pi_{i,1} \succ \rho p^I I_i\right] \right] \end{aligned} \qquad (7)$$

となる。ここで，$\Pr[\pi \succ \rho p^I I]$ は投資収益が使用者費用を上回る状況（$\pi \succ \rho p^I I$）が発生する確率を表す。投資 Option の価値 $X(V)$ は, 初期時点（$\tau = 0$）で投資を実施した場合の企業価値（V_0）と１期待って第１期に投資を実施した場合の企業価値（V_1）の差として計算することができる。すなわち，(2) 式と（7）式より，初期時点での投資 Option の価値 $X_{i,0}(V)$ は，

$$V_{i,1}-V_{i,0}=X_{i,0}(V)=\left(\frac{1}{1+\rho}\right)\Pr\left[\pi_{i,1}\succ\rho p^I I_i\right]\left[\frac{1}{\rho}E_{i,0}\left[\pi_{i,1}-\rho p^I I_i \,\middle|\, \pi_{i,1}\succ\rho p^I I_i\right]\right]$$

$$-\left[-p^I I_i+\left(\frac{1}{1+\rho}\right)\left[\pi_{i,0}+\frac{1}{\rho}E_{i,0}\left(\pi_{i,1}\right)\right]\right]$$

$$=\left[p^I I_i-\frac{\pi_{i,0}}{1+\rho}\right]$$

$$+\left(\frac{1}{1+\rho}\right)\Pr\left[\pi_{i,1}\succ\rho p^I I_i\right]\frac{1}{\rho}E_{i,0}\left[\pi_{i,1}-\rho p^I I_i \,\middle|\, \pi_{i,1}\succ\rho p^I I_i\right]$$

$$-\left(\frac{1}{1+\rho}\right)\frac{1}{\rho}E_{i,0}\left(\pi_{i,1}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1+\rho}\right)\left(p^I I_i+\rho p^I I_i-\pi_{i,0}\right)$$

$$+\frac{1}{\rho(1+\rho)}\left\{\Pr\left[\pi_{i,1}\succ\rho p^I I_i\right]E_{i,0}\left[\pi_{i,1}-\rho p^I I_i \,\middle|\, \pi_{i,1}\succ\rho p^I I_i\right]\right.$$

$$\left.-E_{i,0}\left(\pi_{i,1}\right)\right\} \tag{8}$$

と表すことができる。

（8）式において純収益の期待値$E_{i,0}(\pi_{i,1}-\rho p^I I_i)$は，定義より，

$$E_{i,0}\left(\pi_i-\rho p^I I_i\right)=\Pr\left[\pi_i\succ\rho p^I I_i\right]E_{i,0}\left[\pi_i-\rho p^I I_i \,\middle|\, \pi_i\succ\rho p^I I_i\right]$$

$$+\Pr\left[\pi_{i,1}\leq\rho p^I I_i\right]E_{i,0}\left[\pi_{i,1}-\rho p^I I_i \,\middle|\, \pi_{i,1}\leq\rho p^I I_i\right] \tag{9}$$

であるから，（9）式を考慮すると，（8）式は，

$$
\begin{aligned}
V_{i,1} - V_{i,0} &= \left(\frac{1}{1+\rho}\right)\left(p^I I_i + \rho p^I I_i - \pi_{i,0}\right) + \frac{1}{\rho(1+\rho)}\left\{E_{i,0}\left(\pi_{i,1} - \rho p^I I_i\right)\right. \\
&\qquad \left. - \Pr\left[\pi_{i,1} \le \rho p^I I_i\right] E_{i,0}\left[\pi_{i,1} - \rho p^I I_i \,\middle|\, \pi_{i,1} \le \rho p^I I_i\right] - E_{i,0}\left(\pi_{i,1}\right)\right\} \\
&= \left(\frac{1}{1+\rho}\right)\left\{ p^I I_i + \rho p^I I_i - \pi_{i,0} + \frac{E_{i,0}\left(\pi_{i,1}\right)}{\rho} - p^I I_i \right. \\
&\qquad \left. - \frac{\Pr\left[\pi_{i,1} \le \rho p^I I_i\right] E_{i,0}\left[\pi_{i,1} - \rho p^I I_i \,\middle|\, \pi_{i,1} \le \rho p^I I_i\right]}{\rho} - \frac{E_{i,0}\left(\pi_{i,1}\right)}{\rho} \right\} \\
&= \left(\frac{1}{1+\rho}\right)\left\{ \Pr\left[\pi_{i,1} \le \rho p^I I_i\right] \frac{E_{i,0}\left[\rho p^I I_i - \pi_{i,1} \,\middle|\, \pi_{i,1} \le \rho p^I I_i\right]}{\rho} \right. \\
&\qquad \left. - \left(\pi_{i,0} - \rho p^I I_i\right) \right\} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

と表すことができる。(10) 式を見ると，投資を延期するコストは初期時点（$\tau = 0$）で投資を実施していれば得られたであろう純収益（機会費用）として計算されている。すなわち，$\pi_{i,0} - \rho p^I I_i$ がそれである。他方，投資を延期することの価値は投資収益が資本の使用者費用に等しいか，あるいは下回っている（この場合の確率は $\Pr[\pi \le \rho p^I I]$ である）にもかかわらず，取り返しのつかないこうした不可逆的な投資を実施してしまった場合に蒙る損失額の期待割引現在価値として計算されている。すなわち，$\dfrac{E_{i,0}\left[\rho p^I I_i - \pi_{i,1} \,\middle|\, \pi_{i,1} \le \rho p^I I_i\right]}{\rho}$ がそれである。Servϑn（1997）は，投資を実施する最適なタイミングが（10）式で示される投資 Option の価値の符号に依存するという投資基準を示した。

以下では，Servϑn の議論を踏まえて 3 つのケースに分けて整理する。

Ⅰ．$V_{i,1} - V_{i,0} \prec 0$ のケース

$$\left(\pi_{i,0} - \rho p^I I_i\right) \succ \Pr\left[\pi_{i,1} \leq \rho p^I I_i\right] \frac{E_{i,0}\left[\rho p^I I_i - \pi_{i,1} \middle| \pi_{i,1} \leq \rho p^I I_i\right]}{\rho} \tag{11}$$

（11）式では，投資を延期する（待つ）ことの費用が投資を延期する（待つ）ことの価値を上回っている。つまり，（11）式のようなケースは（10）式において投資 Option の価値が負となる状況を表している。これは，企業において投資を延期する（待つ）インセンティブが働かず，したがって初期時点（τ = 0）において投資を実施することが最適な投資のタイミングであることを意味している。

Ⅱ．$V_{i,1} - V_{i,0} \succ 0$ のケース

$$\left(\pi_{i,0} - \rho p^I I_i\right) \prec \Pr\left[\pi_{i,1} \leq \rho p^I I_i\right] \frac{E_{i,0}\left[\rho p^I I_i - \pi_{i,1} \middle| \pi_{i,1} \leq \rho p^I I_i\right]}{\rho} \tag{12}$$

（12）式では，投資を延期する（待つ）ことの費用が投資を延期する（待つ）ことの価値を下回っている。つまり，（12）式のようなケースは（10）式において投資 Option の価値が正となる状況を表している。これは，企業において投資を延期する（待つ）インセンティブが働くため，初期時点（τ = 0）では投資を実施せずに第 1 期において投資を実施することが最適な投資のタイミングであることを意味している。

Ⅲ．$V_{i,1} - V_{i,0} = 0$ のケース

$$\left(\pi_{i,0} - \rho p^I I_i\right) = \Pr\left[\pi_{i,1} \leq \rho p^I I_i\right] \frac{E_{i,0}\left[\rho p^I I_i - \pi_{i,1} \middle| \pi_{i,1} \leq \rho p^I I_i\right]}{\rho} \quad (13)$$

（13）式では，投資を延期する（待つ）ことの費用と投資を延期する（待つ）ことの価値が等しい。つまり，（13）式のようなケースは（10）式において投資 Option の価値がゼロである状況を表している。これは, 企業にとって今期に投資を実施することと来期へ投資を延期することとが無差別であることを意味しており，最適な投資のタイミングは一意的に決定できない状況である。

以上，本節では不確実性下での不可逆的投資のタイミングに関する投資基準について検討してきた。そして，投資を実施する最適なタイミングは投資 Option の価値の符号に依存することが示された。この結果は，投資が不可逆的であると不確実性の増大は投資のタイミングを遅らせるように作用するため，今期の投資行動に対して負の影響を与える可能性があることを示唆している。

3. Option Approach による投資の実施基準

前節では，投資の不可逆性と投資のタイミングの関係について，Servϑn（1997）の議論を検討した。Servϑn は，期待収益（企業価値）に関する不確実性について，不確実性は今期にのみ存在し来期になると消滅するという極めて簡単な仮定を設定した上で，最適な投資のタイミングは投資 Option の価値の符号に依存するという投資基準を示した。

それに対して本節では，企業価値の変動に確率過程を導入して分析を行う McDonald and Siegel（1986）および彼らのモデルを若干単純化した Dixit and Pindyck（1994）のモデルを詳細に検討する[5)]。これらのモデルでは，投資の不可逆的な性質を考慮すると新古典派投資理論における純現在価値基準（Net Present Value Rule）は成立しないことが示される。投資の純現在価値基準によれば，資本 1 単位あたりの限界収益が限界費用を上回れば投資を実施することが妥当であると判断される。また，最適な投資水準は両者が一致する点において与えられる。ところが，投資が不可逆的であると投資 Option の価値を考慮する必要が生じるため，そうした一致性条件は満たされなくなる。つまり，投資を延期すればより大きな収益を獲得する可能性（権利）は企業の手元に残るが，初期時点で即時的に投資を実施してしまうとそうした権利（投資を延期するという選択権）は失われてしまうため，投資 Option の価値がコストとなってしまうからである。

リアル･オプション（Real Option）は, 証券投資におけるコール・オプション（Call Option）の考え方を実物投資の意思決定問題に応用した議論である。コール・オプションは，ある一定の期間中にあらかじめ決められた価格（行使価格）で資産を購入する権利を意味する。投資家は資産を購入した時点で，それ以降の資産購入の権利（Option）を失う。つまり，Option は不可逆的な性質を有しているわけである。

投資収益の最大化問題において決定的に重要な点は，権利をいつ，どのような状態のときに行使するかということである。不確実な投資機会に直面している投資家は，実際的な価値を持つ情報が得られるまで意思決定を延期するという選択をするかもしれない。投資家が，投資のタイミングを自ら決めることができるかどうかは投資機会の性質や当該企業の置かれている状況，あるいは企業それ自体の体力その他に依存する。企業の時間的な意味での最適な投資基準は，待つことによる利益と待つことによって即時的に投資を実施していれば得られたであろう遺失利益（機会費用）を一致させることである。ただし，即時的に投資を実施する場合においては，先に指摘した投資 Option の放棄をコストとして埋め合わせる必要が生じてくる。これは，純現在価値基準による投資基準を投資の期待収益が投資 Option の価値をも加

えた総投資コストを上回らなければ投資は実施されないという投資基準へと修正する必要があることを意味する。

いったん投資が実施されると，投下資本の回収が困難であったり，あるいは完全に埋没費用（Sunk Cost）となってしまう場合がある。将来の不確実性が増大している経済状況の下では投資の実施時期を遅らせる，あるいは待つということによる利益は大きいかもしれない。したがって，投資が不可逆的であるほど，不確実性の増大は投資のタイミングのみならず，投資量に対しても抑制要因として作用する可能性がある。

投資は将来時点で発生する収益を獲得するために投下される初期費用と定義される。企業は，今期に投資を実施するか，あるいは来期以降に延期するかという選択権（Option）についてはある程度の自由性をもっていると考えられる。将来のキャッシュ・フロー流列の期待割引現在価値の総和として定義される企業価値（事業の価値）の変動が幾何ブラウン運動（Geometric Brownian Motion）に従うと仮定する。以下では，企業価値の変分に関する確率過程を制約条件とする投資 Option の価値の最大化問題を考える[6)]。本節では，連続時間モデルで議論するが，連続時間モデルでは投資の妥当性の判断基準となる事業価値の臨界値，および臨界値で評価した投資 Option の価値が明らかにされる。

$$X_{i,0}\left(V_{i,t}\right) = \max E\left[\exp\ (-\rho t)\ \left(V_{i,t} - p^I I_{i,t}\right)\right] \tag{14}$$

$$\text{s.t.}\quad dV = \alpha_V V_{i,\tau}\, d\tau + \sigma_V V_{i,\tau}\, dz_v \tag{15}$$

ここで，$X_{i,0}(V_{i,t})$ は投資 Option の価値（投資機会の価値，すなわち今期の投資の機会費用），V は投資を実施した時点で評価される企業価値（投資の事

業価値，すなわちキャッシュ・フローの期待割引現在価値），E は期待オペレータ，ρ は割引率（一定），p^I は資本財価格（一定），I は投資量，α_V はドリフト率，σ_V は企業価値のボラティリティー，dz_V はウィーナー過程（Wiener Process）の増分，i は企業の識別記号，t は将来における任意の投資時点を表す。また，τ は時間変数であるが，添え字の τ は各変数が時間の関数であることを示す。なお，$V_{i,t} - p^I I_{i,t}$ は任意の t 時点において実施される投資から得られる純収益を表す。

（14）式は，投資 Option の価値が事業の純収益の期待割引現在価値によって表されることを示している。初期時点（$\tau = 0$）において投資を実施することは，（14）式で表される投資 Option の価値 $X_{i,0}(V_{i,t})$ を失うことを意味する。一方，（15）式は企業価値の運動方程式である。つまり，企業価値の変分（dV）は時間とともに線形的に増大する（$\alpha_V \succ 0$）が，分散 σ_V をともなっているため不確実であることを示している。

以下では，投資 Option の価値の増大は割引率を下回る（$\rho \succ \alpha_V$）と仮定する。なぜなら，$\rho \prec \alpha_V$ であると企業は投資を実施せずに常に投資を延期する（待つ）という選択をする方が有利となり，企業価値は収束せず，時間とともに無限大に発散してしまうからである。投資の不可逆性は，投資 Option の価値を考慮するという形でモデルに反映される。こうした方法は，前節の議論と同様である。

投資 Option の価値の最大化問題は，動的計画法（Dynamic Programming）の手法を用いて解くことができる[7)]。一般的な Bellman Equation で表すと，単位期間あたりの投資機会の総期待収益は，

$$\rho X_{i,0}\left(V_{i,t}\right) d\tau = \max\left(V_{i,t} - p^I I_{i,t}\right) + E\left[dX\left(V\right)\right] \tag{16}$$

で表される。（16）式において，投資 Option の価値は 1 つの状態変数（V）に依存している。企業価値の変分は Wiener Process に従うから，$dX(V)$ を

求めるために Ito’s Lemma が用いられる。投資 Option の価値の変化量が 3 回以上連続微分可能であるとする。このとき，$X(V)$ について 2 次までの Tailor 展開を行うと，

$$dX(V) = \frac{dX(V)}{dV}dV + \frac{1}{2}\frac{d^2X(V)}{dV^2}(dV)^2 + R_3 \tag{17}$$

が得られる。ここで，R_3 は剰余項である。企業価値の確率過程の（15）式を考慮すると，投資 Option の価値の変分の期待値 $E[dX(V)]$ は，

$$\begin{aligned}E[dX(V)] &= \frac{dX(V)}{dV}V(\alpha_V d\tau + \sigma_V dz_V)\\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{d^2X(V)}{dV^2}V_{i,\tau}{}^2(\alpha_V d\tau + \sigma_V dz_V)^2 + R_3\\ &= \frac{dX(V)}{dV}V_{i,\tau}(\alpha_V d\tau + \sigma_V dz_V) + \frac{1}{2}\frac{d^2X(V)}{dV^2}V_{i,\tau}{}^2\\ &\quad \left[\alpha_V{}^2(d\tau)^2 + 2\alpha_V\sigma_V(d\tau)(dz_V) + \sigma_V{}^2(dz_V)^2\right] + R_3\end{aligned} \tag{18}$$

と表すことができる。Wiener Process において，$(d\tau)^2 = 0$，$(d\tau)(dz_V) = 0$，$dz_V = 0$, $(dz_V)^2 = d\tau$ であり, かつ $R_3 \to 0$ であることを考慮すると, (18)式は,

$$E[dX(V)] = \frac{dX(V)}{dV}V_{i,\tau}(\alpha_V)d\tau + \frac{1}{2}\frac{d^2X(V)}{dV^2}V_{i,\tau}{}^2(\sigma_V)^2 d\tau \tag{19}$$

となる[8]。（19）式を（16）式に代入して，両辺を $d\tau$ で割ると，

$$\rho X_{i,\tau}\left(V_{i,t}\right)=\max\left\{\left(V_{i,t}-p^{I}I_{i,t}\right)\frac{1}{d\tau}+\frac{dX(V)}{dV}V_{i,\tau}\left(\alpha_V\right)+\frac{1}{2}\frac{d^2X(V)}{dV^2}V_{i,\tau}{}^2\left(\sigma_V\right)^2\right\} \quad (20)$$

が得られる。

ところで，投資が実施される時点までは投資機会からの収益はゼロである。このとき，投資機会を持っていることから得られる収益は投資機会そのものの資産価値という形で潜在的に評価される。つまり，投資が実施されていない期間（投資の実施について待つという選択を企業がしている期間）においては，（20）式において $(V - p^I I)$ の項はゼロとなる。このときの投資Optionの価値の最大化のための条件式は，

$$\frac{1}{2}\frac{d^2X(V)}{dV^2}V_{i,\tau}{}^2\left(\sigma_V\right)^2+\frac{dX(V)}{dV}V_{i,\tau}\left(\alpha_V\right)-\rho X_{i,\tau}\left(V_{i,t}\right)=0 \quad (21)$$

で与えられる。（21）式を解くにあたり，両辺を $\frac{\left(\sigma_V\right)^2}{2}$ で割ると，

$$V_{i,\tau}{}^2\frac{d^2X(V)}{dV^2}+\frac{2\alpha_V}{\sigma_V{}^2}V_{i,\tau}\frac{dX(V)}{dV}-\frac{2\rho}{\sigma_V{}^2}X_{i,\tau}\left(V_{i,t}\right)=0 \quad (22)$$

が得られる。（22）式は，企業価値 V については2次の2階同次微分方程式である。この微分方程式は，$V = e^\tau$ と置いて従属変数 V を時間変数 τ に変換することにより，定係数線形同次微分方程式へと変換することができる。$V = e^\tau$ の両辺を V で微分すると，$1=e^\tau\frac{d\tau}{dV}$ となるから，

$$\frac{d\tau}{dV} = e^{-\tau} \tag{23}$$

が得られる。したがって，投資 Option の価値 $X(V)$ について，

$$X'(V) = \frac{dX(V)}{dV} = \frac{dX(V)}{d\tau}\frac{d\tau}{dV}$$

$$= \frac{dX(V)}{d\tau}e^{-\tau} \tag{24}$$

および

$$X''(V) = \frac{d^2X(V)}{dV^2} = \frac{d}{dV}\left[\frac{dX(V)}{d\tau}e^{-\tau}\right]$$

$$= \frac{d}{d\tau}\left[\frac{dX(V)}{d\tau}e^{-\tau}\right]\frac{d\tau}{dV}$$

$$= \left\{\frac{d}{d\tau}\left[\frac{dX(V)}{d\tau}\right]e^{-\tau} + \frac{dX(V)}{d\tau}\frac{d}{d\tau}\left(e^{-\tau}\right)\right\}\frac{d\tau}{dV}$$

$$= \left\{\frac{d^2X(V)}{d\tau^2}e^{-\tau} + \frac{dX(V)}{d\tau}\left(-e^{-\tau}\right)\right\}e^{-\tau}$$

$$= \left[\frac{d^2X(V)}{d\tau^2} - \frac{dX(V)}{d\tau}\right]e^{-2\tau} \tag{25}$$

が得られる。(24) 式を用いると，

$$e^{\tau}X'(V)=e^{\tau}\frac{dX(V)}{dV}e^{-\tau}$$

$$=\frac{dX(V)}{d\tau} \tag{26}$$

が得られる。同様に，（25）式を用いると，

$$e^{2\tau}X''(V)=e^{2\tau}\frac{d^2X(V)}{dV^2}$$

$$=e^{2\tau}\left[\frac{d^2X(V)}{d\tau^2}-\frac{dX(V)}{d\tau}\right]e^{-2\tau}$$

$$=\frac{d^2X(V)}{d\tau^2}-\frac{dX(V)}{d\tau} \tag{27}$$

が得られる。ここで，$\frac{dX(V)}{d\tau}=\dot{X}(V)$，$\frac{d^2X(V)}{d\tau^2}=\ddot{X}(V)$ と表記することにすると，$V=e^{\tau}$ であったから，（26）式より，

$$V_{i,\tau}X'(V)=e^{\tau}X'(V)$$

$$=e^{\tau}\frac{dX(V)}{dV}$$

$$=e^{\tau}\frac{dX(V)}{d\tau}e^{-\tau}$$

$$=\dot{X}(V) \tag{28}$$

となる。同様に，（27）式より，

$$
\begin{aligned}
V_{i,\tau}{}^{2}X''(V) &= \left(e^{\tau}\right)^{2}X''(V) \\
&= \left(e^{\tau}\right)^{2}\frac{d^{2}X(V)}{dV^{2}} \\
&= e^{2\tau}\left[\frac{d^{2}X(V)}{d\tau^{2}}-\frac{dX(V)}{d\tau}\right]e^{-2\tau} \\
&= \ddot{X}(V)-\dot{X}(V) \qquad (29)
\end{aligned}
$$

となる。(28) 式および (29) 式を (22) 式に代入すると，

$$
\left[\ddot{X}(V)-\dot{X}(V)\right]+\frac{2\alpha_{V}}{\sigma_{V}{}^{2}}\dot{X}(V)-\frac{2\rho}{\sigma_{V}{}^{2}}X_{i,\tau}\left(V_{i,t}\right)=0
$$

となるから，項を整理すると，

$$
\ddot{X}(V)+\left(\frac{2\alpha_{V}}{\sigma_{V}{}^{2}}-1\right)\dot{X}(V)-\frac{2\rho}{\sigma_{V}{}^{2}}X_{i,\tau}\left(V_{i,t}\right)=0 \qquad (30)
$$

が得られる。(30) 式は $X(V)$ に関する 2 階定係数線形同次微分方程式 (Linear Second Order Homogeneous Differential Equation) である。(30)式より，特性方程式は，

$$
\lambda^{2}+\left(\frac{2\alpha_{V}}{\sigma_{V}{}^{2}}-1\right)\lambda-\frac{2\rho}{\sigma_{V}{}^{2}}=0
$$

となるから，特性根 λ について，

$$\lambda_j = \frac{-\left(\frac{2\alpha_V}{\sigma_V{}^2}-1\right) \pm \sqrt{\left(\frac{2\alpha_V}{\sigma_V{}^2}-1\right)^2 + \frac{8\rho}{\sigma_V{}^2}}}{2} \qquad (j=1,2)$$

が求められる。ここで，解の収束条件（$\alpha_V \prec \rho$）を考慮すると，

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha_V}{\sigma_V{}^2}-1\right) + \sqrt{\frac{\left(\frac{2\alpha_V}{\sigma_V{}^2}-1\right)^2}{4} + \frac{8\rho}{4\sigma_V{}^2}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\alpha_V}{\sigma_V{}^2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_V}{\sigma_V{}^2}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\rho}{\sigma_V{}^2}} \\ &\succ 1 \end{aligned} \tag{31}$$

および

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha_V}{\sigma_V{}^2}-1\right) - \sqrt{\frac{\left(\frac{2\alpha_V}{\sigma_V{}^2}-1\right)^2}{4} + \frac{8\rho}{4\sigma_V{}^2}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\alpha_V}{\sigma_V{}^2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha_V}{\sigma_V{}^2}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\rho}{\sigma_V{}^2}} \\ &\prec 0 \end{aligned} \tag{32}$$

が得られる[9)]。したがって，求める一般解は（31）式および（32）式より，

$$X_{i,\tau}\left(V_{i,t}\right)=C_1e^{\lambda_1\tau}+C_2e^{\lambda_2\tau} \tag{33}$$

となる。ここで再び $V = e^{\tau}$ を考慮すると，（33）式は，

$$X_{i,\tau}\left(V_{i,t}\right)=C_1V_{i,\tau}{}^{\lambda_1}+C_2V_{i,\tau}{}^{\lambda_2} \tag{34}$$

となる。ここで，C_1，C_2 は任意定数である。

次に，企業が投資を実施すべきかどうかの妥当性を判断する投資基準となる企業価値の臨界値 V^* および任意定数 C を求めることにする。モデルを解くための境界条件（Boundary Conditions）は以下の通りである。

$$X_{i,\tau}\left(0\right)=0 \tag{35}$$

$$X_{i,\tau}\left(V_{i,t}{}^*\right)=V_{i,t}{}^*-p^I I_{i,t} \tag{36}$$

$$\frac{dX\left(V^*\right)}{dV^*}=1 \tag{37}$$

（35）式は，事業価値がゼロのとき，投資 Option の価値はゼロであることを示す。（36）式は，臨界値 V^* で実施される投資からは $V^* - p^I I$ の収益が得られ，それが投資 Option の価値に等しいことを示す条件（Value-matching Condition）である。（37）式は投資 Option の価値 $X(V)$ が臨界値 V^* において連続であることを示す条件（Smooth-Pasting Condition）である [10)]。これらの境界条件を用いると，臨界値 V^* および任意定数 C を求めることができる。

ところで，特性根が$\lambda \prec 0$であると，（34）式において$C\left(\frac{1}{V}\right)^{\lambda}$となる項が現れてしまい，$V=0$が定義できなくなる。したがって，境界条件の（34）式を満たすためには$\lambda \prec 0$となる解をあらかじめ排除しておく必要がある。つまり，（34）式において経済的に意味のある解は第1項のみとなる。すなわち，投資 Option の価値の一般解は，

$$X_{i,\tau}\left(V_{i,t}\right)=C_1 V_{i,\tau}{}^{\lambda_1} \tag{38}$$

で表される。臨界値V^*で評価したとき，（38）式は，（36）式より，

$$X_{i,\tau}\left(V_{i,t}{}^*\right)=C_1 V_{i,t}{}^{*\lambda_1}=V_{i,t}{}^*-p^I I_{i,t} \tag{39}$$

となる。また，（38）式は（37）式から

$$\frac{dX\left(V^*\right)}{dV^*}=\lambda_1 C_1 V_{i,t}{}^{*\lambda_1-1}=1 \tag{40}$$

となる。（40）式を

$$\lambda_1 C_1 V_{i,t}{}^{*\lambda_{i,1}}=V_{i,t}{}^*$$

と変形し，さらに（39）式を考慮すると，

$$\lambda_1\left(V_{i,t}{}^{*}-p^{I}I_{i,t}\right)=V_{i,t}{}^{*}$$

が得られる。以上から，企業価値の臨界値 V^* を求めることができる。

$$V_{i,t}{}^{*}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1-1}p^{I}I_{i,t} \tag{41}$$

（31）式より, $\lambda_1 \succ 1$ であるから,（41）式から $V^* \succ p^I I$ であることがわかる。投資の純現在価値基準によれば，$V \geq p^I I$ である限り投資を行うことは妥当であると判断され，最適投資水準は $V = p^I I$ となる点で与えられる。つまり，$V = p^I I$ が成立する V が純現在価値基準による臨界値 $(\tilde{V})$ となる。ところが，（41）式が示唆するように $V \succ p^I I$ であっても V が $\tilde{V} \prec V^*$ の領域にある場合は投資が実施されないことになる。

また，（39）式が示すように臨界値では企業価値は V ではなく，$V^* - X(V^*)$ だけしか増加しない。つまり，投資が不可逆的な場合の投資基準は，$V \geq p^I I$ ではなく，$V^* - X(V^*) \succ p^I I$ であることがわかる。これは，事業価値が資産の購入費用等に加えて，即時に投資を行うことによって失われる投資 Option の価値（コスト）をも上回ったときに初めて投資が行われることを示す投資基準である。つまり，投資が不可逆的な場合においては，$V^* \succ p^I I + X(V^*)$ が投資基準となり，最適投資量は $V^* = p^I I + X(V^*)$ が成立する投資量 I^* となる。

また，Tobin's q による投資基準についても，$q=\frac{\tilde{V}}{p^I I}\succ 1$から，$q^*=\frac{\left[V^*-X\left(V^*\right)\right]}{p^I I}\succ 1$ へと修正される。つまり，投資が不可逆的であると，$q \succ 1$ であっても，それが $q^* - q \prec 0$ の領域にある場合においては投資が実施されないということである。

最後に，任意定数 C について求め，臨界値で評価した投資 Option の価値を求める。（41）式を（39）式に代入すると，

$$C_1\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1-1}p^I I_{i,t}{}^*\right)^{\lambda_1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1-1}p^I I_{i,t}{}^*-p^I I_{i,t}{}^*$$

となるから，任意定数は，

$$\begin{aligned}C_1&=\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1-1}p^I I_{i,t}{}^*\right)^{-\lambda_1}\left(\frac{\lambda_1 p^I I_{i,t}{}^*-\lambda_1 p^I I_{i,t}{}^*+p^I I_{i,t}{}^*}{\lambda_1-1}\right)\\&=\left(\frac{\lambda_1-1}{\lambda_1 p^I I_{i,t}{}^*}\right)^{\lambda_1}\frac{p^I I_{i,t}{}^*}{\lambda_1-1}\\&=\frac{(\lambda_1-1)^{\lambda_1-1}}{\lambda_1{}^{\lambda_1}\left(p^I I_{i,t}{}^*\right)^{\lambda_1-1}}\end{aligned}\tag{42}$$

と表すことができる。したがって，（40）式および（41）式から，臨界値で評価した投資 Option の価値 $X(V^*)$

$$X_{i,\tau}\left(V_{i,t}{}^*\right)=\left[\frac{(\lambda_1-1)^{\lambda_1-1}}{\lambda_1{}^{\lambda_1}\left(p^I I_{i,t}{}^*\right)^{\lambda_1-1}}\right]\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1-1}p^I I_{i,t}{}^*\right]^{\lambda_1}\tag{43}$$

を導出することができる。

以上，本節では投資が不可逆的である場合の投資基準について，および純現在価値基準による投資基準がどのように修正されるかについて議論してきた。その結果，事業価値（投資収益）が投資 Option の価値をも加えた総投資コストを上回らなければ投資は実施されないという投資条件が示された。これは，投資が不可逆的であると不確実性の増大は投資を実施するかどうかの採算のハードルを引き上げてしまうため，投資決定（投資量）に対してマ

イナスの影響を与えることを示唆している。

4. おわりに

本稿では，投資の不可逆性が投資のタイミングおよび投資の実施基準に対してどのような影響を及ぼすかについて議論してきた。新古典派投資理論における重要な投資基準の1つに純現在価値基準がある。この投資基準においては，追加的な資本1単位当たりの期待利潤が資本の購入費用等の限界的なコストを上回っていれば投資を行うことは妥当であると判断される。また，最適な投資量は両者が一致する点で与えられる。

ところが,投資が不可逆的性質を有していると投下資本は埋没費用となる。企業は，投資の実施時期を遅らせる，あるいは待つという選択をすることによって，より大きな投資収益を手にする投資機会に恵まれるかもしれない。即時的に投資を実施することはこうした収益機会を獲得する権利（Option）を放棄することを意味する。つまり，投資Optionの価値は即時的に投資を実施する場合のコストとなる。ところが，純現在価値基準ではこうした投資Optionの放棄をコストとして認識していない。これは，純現在価値基準を投資Optionの価値をも加えた総投資コストを上回らなければ投資は実施されないという投資基準へと修正しなければならないことを意味する。こうした意味で投資のオプション・アプローチは純現在価値基準を修正する投資基準ということができる。

本研究では，企業の最適な投資基準について離散時間モデルと連続時間モデルの2つの枠組みで議論を行った。それは，離散時間モデルと連続時間モデルのどちらで議論するかによって最適投資基準の形式が異なってくるからである。すなわち，離散時間モデルでは投資のタイミングという形で最適な投資基準が示されるのに対して，連続時間モデルでは投資を実施すべきかどうかの妥当性を判断する臨界値の式という形でそれが示される。

まず，離散時間モデルでは投資のタイミングは投資Optionの価値の符号

に依存するという投資基準が示された。すなわち，投資 Option の価値が負の場合は即時に投資を実施することが最適な投資政策となるが，それが正の場合には投資を延期することが最適な投資政策となるという投資基準である。この結果は，不確実性の増大が不可逆的投資のタイミングを遅らせる可能性があるという理由で，今期における投資行動にマイナスの影響を与えることを示唆している。

他方，連続時間モデルでは投資は事業価値が投資 Option の価値をも加えた総投資コストを上回らなければ投資は実施されないという投資基準が示された。この結果は，投資の不可逆性は投資を実施するかどうかの妥当性を判断する基準のハードルを引き上げてしまうため，不確実性の増大は投資量に対してマイナスの影響を与える可能性があることを示唆している。

最後に，今後の研究の方向性について若干述べておく。本稿では，投資のタイミングおよび投資を実施するかどうかの臨界値という 2 つの最適投資基準について検討してきた。しかし，これらのモデルは投資モデルとはなっていない。そこで，今後は投資の不可逆性および投資の時間的遅れ現象を考慮に入れた動学的投資モデルの導出についてさらに研究を進めていきたいと考えている。

記号一覧

C	任意定数
dz_V	Wiener Process の増分
E	期待オペレータ
I	投資量
i	企業の識別記号
p^I	資本財価格
q	投資の純現在価値基準による Tobin’s q
q^*	投資のオプション・アプローチによる Tobin’s q

t　　将来における任意の投資時点

V　　企業価値

$\tilde{V}$　　投資の純現在価値基準による V の臨界値

V^*　　投資のオプション・アプローチによる V の臨界値

$X(\cdot)$　投資 Option の価値

α_V　　確率過程におけるドリフト項（パラメータ）

λ　　特性根

ρ　　割引率

σ_V　　確率過程における分散項（パラメータ）

τ　　時点および時間変数であることを示す記号

π　　キャッシュ・フロー

注

1）Jorgenson（1996）は，企業の最適資本ストックは資本の限界生産性とユーザーコストが一致するところで決定されることを示した。

2）モデルの導出等に関する議論の詳細は，Servϑn（1997）を参照されたい。

3）詳細は，Tobin（1969）等を参照せよ。

4）ここでは，減価償却を考慮していない。

5）McDonald and Siegel（1986）では，投資費用が企業価値と同様に幾何ブラウン運動（Geometric Brownina Motion）に従うと仮定して議論を展開しているが，Dixit and Pindyck（1994）では単純化して投資費用は一定であると仮定して議論している。本稿では，Dixit and Pindyck（1994）にしたがって議論を行っている。

6）モデルの導出等に関する議論の詳細は，McDonald and Siegel（1986）およびDixit and Pindyck（1994）を参照されたい。

7）以下では，投資 Option の評価時点を任意の時点表記（τ）で議論する。なお，初期時点を表す場合は，$\tau = 0$ である。また，将来の任意の投資時点については これまでと同様，t のままで議論する。

8）剰余項 $R_3 \rightarrow 0$ については，補論 A を参照せよ。

9）（31）式および（32）式の符号については，補論 B を参照せよ。

10）これらの条件に関する議論の詳細は，Dixit and Pindyck（1994）を参照せよ。

補論 A　剰余項 $R_3 \to 0$ について

（17）式において剰余項 R_3 は，

$$R_3 = \frac{1}{3!}\left\{\frac{d^3X(V)}{dV^3}(dV)^3\right\} \tag{a-1}$$

である。（a-1）式に V に関する確率過程 $dV = \boldsymbol{\alpha}_V d\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\sigma}_V dz_V$ を代入して展開すると，

$$\begin{aligned}
R_3 &= \frac{1}{3!}\left\{\frac{d^3X(V)}{dV^3}(\alpha_V V d\tau + \sigma_V V dz_V)^3\right\} \\
&= \frac{1}{3!}\left\{\frac{d^3X(V)}{dV^3}V^3\left[(\alpha_V)^3(d\tau)^3 + 3(\alpha_V)^2(d\tau)^2\sigma_V dz_V + 3\alpha_V d\tau(\sigma_V)^2(dz_V)^2\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + (\sigma_V)^3(dz_V)^3\right]\right\} \\
&= \frac{1}{3!}\left\{\frac{d^3X(V)}{dV^3}V^3\left[(\alpha_V)^3(d\tau)(d\tau)^2 + 3(\alpha_V)(d\tau)^2\sigma_V dz_V + 3\alpha_V d\tau(\sigma_V)^2 d\tau\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + (\sigma_V)^3 dz_V d\tau\right]\right\}
\end{aligned}$$

が得られる。Wiener Process において，$(d\boldsymbol{\tau})^2 = 0$，$(d\boldsymbol{\tau})(dz_V) = 0$，$dz_V = 0$，$(dz_V)^2 = d\boldsymbol{\tau}$ であるから，1 次より大きい $(d\boldsymbol{\tau})$ や (dz) の項は急速にゼロに近づく。したがって，関数 $X(V)$ が 3 回以上連続して微分可能であっても剰余項は $R_3 \to 0$ となることがわかる。

補論 B （31）式および（32）式の符号条件について

平方根の中を展開すると，

$$\left(\frac{\alpha_V}{\sigma_V{}^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2\rho}{\sigma_V{}^2}=\left(\frac{\alpha_V}{\sigma_V{}^2}\right)^2-\frac{\alpha_V}{\sigma_V{}^2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2\rho}{\sigma_V{}^2} \tag{b-1}$$

となるが，解の収束条件 $\alpha_V \prec \rho$ が仮定されていたから，（b-1）式は正であることがわかる。また，（31）式の右辺の第 2 項 $\left(\frac{\alpha_V}{\sigma_V{}^2}\right)$ の符号は負であるが，平方根の中の展開式（b-1）式の第 1 項を見ると同じ項が二乗されて入っている。したがって，この項は計算過程において平方根の外に出たときに次数は 1 次となり，符号は逆に正であるから，これら 2 つの項は相互に相殺し合うことになる。

他方，（31）式の第 1 項の $\left(\frac{1}{2}\right)$ についても平方根内に $\left(\frac{1}{2}\right)$ が二乗された形で存在し，かつ符号も等しく正であるから，計算過程においてこれらの項は足し合わされて 1 になる。また，解の収束条件から $\frac{2\rho}{\sigma_V{}^2}-\frac{\alpha_V}{\sigma_V{}^2}\succ 0$ となる。（31）式において平方根の項はプラスの符号が付されているから，結果として $\lambda_1 \succ 1$ となるであろうことが予想される。

一方，（32）式についても上記と同様の議論が成立するが，平方根の項には逆にマイナスの符号が付されているため，$\lambda_1 \prec 0$ となるであろうことが予想される。

References

Abel, A. B. and J, C, Eberly (1996), “Optimal Investment with Costly Reversibility”, *Review of Economic Studies*, 63, 581–593.

Abel, A. B. and J. C. Eberly (1999), “The Effects of Irreversibility and Uncertainty on Capital Accumulation”, *Journal of Monetary Economics*, 44, 339–377.

Arrow, K. J. (1968), “Optimal Capital Policy with Irreversible Investment”, in *Value, Capital and Growth, Essays in Honor of Sir John Hicks*, ed., J. N. Wolfe, Edinburgh, Scotland: Edinburgh University Press.

Bertola, G. (1998), “Irreversible Investment”, *Research in Economics*, 52, 3–37.

Boyarchenko, S. (2004), “Irreversible Decisions and Record Setting News Principles”, *The American Economic Review*, 94, 557–568.

Caballero, R, J. (1991), “On the Sign of the Investment-Uncertainty Relationship”, *The American Economic Review*, 81, 279–288.

Caballero, R. J. and R. S. Pindyck (1996), “Uncertainty, Investment, and Industry Revolution”, *International Economic Review*, 37, 641–662.

Dixit, A. K. and R. S. Pindyck (1994), *Investment under Uncertainty*: Princeton University Press.

Hartman, R. (1972), “The Effect of Price and Cost Uncertainty on Investment”, Journal of Economic Theory, 5, 258–266.

Hartman, R. (1976), “Factor Demand with Output Price Uncertainty”, *The American Economic Review*, 66, 675–681.

Jorgenson, D. W., Investment: Vol.1 (*Capital Theory and Investment Behavior*, 1996), Vol.2 (*Tax Policy and the Cost of Capital*, 1996), Vol.3 (*Lifting the Burden: Tax Reform, the Cost of Capital, and U.S. Economic Growth*, 2001), The MIT Press.

Leahy, J. and T. M. Whited (1996), “The Effects of Uncertainty on Investment: Some Stylized Facts”, *Journal of Money, Credit, and Banking*, 28, 64–83.

McDonald, R. and D. Siegel (1986), “The Value of Waiting to Invest”, *Quarterly Journal of Economics*, 101, 707–728.

Pindyck, R. S. (1988), “Irreversible Investment, Capacity Choice, and the Value of the Firm”, *The American Economic Review*, 78, 969–985.

Pindyck, R. S. (1993), “A Note on Competitive Investment under Uncertainty”, *The American Economic Review*, 83, 273–277.

Servϑn, L. (1997), “Uncertainty, Instability, and Irreversible Investment”, *Policy Research Working Paper* 1722: World Bank.

Tobin, J.(1969), “A General Equilibrium Approach to Monetary Theory”, *Journal of Money, Credit, and Banking*, 1, 15–29.

永冨隆司（2011a）「生産活動および市場価格の不確実性の影響について」『政経論叢』国士舘大学政経学会　No.154　49–69.

永冨隆司（2011b）「設備投資に対する価格の不確実性の影響について」国士舘大学政経学部創設 50 周年記念論文集『政経論叢　特別記念号』国士舘大学政経学会　629–671.