

計量経済モデルの頑健推定について

原 田 桂一郎

目 次

- 1 はじめに
- 2 計量経済モデルの誤差項
- 3 誤差項の非正規性と推定法
- 4 頑健推定
- 5 むすび——頑健推定の一方法——

1 はじめに

経済現象の数量的関係を推定するために計量経済学の方法が採られる。経済関係の大きさをあらわすパラメータの値を推定するには、経済現象を経済理論にもとづいて経済変数間の関係として特定化したモデルが必要である。経済現象を単一数式によるモデルで表現する場合、回帰形式（通常線形回帰）が用いられ、誤差項の確率モデルとして、正規分布が仮定される。また一般にパラメータの値は最小二乗推定される。最小二乗推定量（推定方式）は誤差項の正規分布の仮定の下で、一様最小分散不偏推定量、すなわち、“ばらつき”の小さな偏りのない推定値を定める。誤差項の確率モデル（データの確率分布）が経済変数のデータに適合しているかぎり安定的な量的経済関係（パラメータの値）が推定される。

しかし、誤差項の確率モデルを正規分布とすることについては、現実的にその根拠を示しうる場合は殆どなく、この仮定の現実的妥当性には疑問がある。この確率モデルが経済データの確率分布に完全に一致しない場合、パラメータ

計量経済モデルの頑健推定について（原田）

の最小二乗推定量は先に挙げた特性を完全に保持できない。つまり、経済データの確率分布が正規分布よりも裾野の厚いものであるとき、最小二乗推定量の効率が低下し（推定量の分散が大きくなり）、あるいは、また同時に、経済データの確率分布が非対称なものになると、この推定量は不偏推定量とならない。

以下の節において、先ず計量経済モデルの誤差項について考察し、つぎに誤差項の確率モデルとして正規分布が必ずしも現実的妥当性がないことを示唆する、さらに、経済データの分布が正規分布でない場合の計量経済モデルのパラメータの推定について検討し、最後に頑健推定の^①一方式を提示する。

注

- ① 詳細については Harada, K., and Shirogane, R. (1990). A Procedure for Robust Estimates of Regression.

2 計量経済モデルの誤差項

経済現象（economic reality）をモデル表現するとき、それを経済変数間の関係として特定化するため、経済理論にもとづいた抽象化がおこなわれる。したがって、現象のモデルによる叙述は不完全かつ不十分となる。現象とそのモデルの乖離が“モデルの誤差”である。

現象を実際に数量的に捉えるには、これを観測（測定）して観測値を得ることであるが、観測値には“観測誤差”が付随する。観測値は現象の“真”の値（これは理論でしか想定できない）に観測誤差が付加されたものと考えられる。現象の真の値はモデルとモデルの誤差によってあらわされるから、観測値としての現象は、モデル、モデルの誤差、それに観測誤差の三者の和である。経済現象の計量経済モデルによる表現では、現象のモデル表現の誤差（モデルの誤差）と現象の観測誤差の両者を一括して誤差項とする。

モデルの誤差を導入する根拠として、第一は数式としてのモデルの説明変数として採り上げなかった数多くの要因の存在である。この点を、家計消費支出を例にすると、次のようになろう。

消費支出に作用する全ての要因が判り、それらのデータが入手可能であれば、全ての家計の消費支出を十分にモデルとして記述が可能である。しかし、たとえば同じ規模の消費支出をする家計の間でさえ、そこに作用する数多くの要因、すなわち、夫婦の年齢、子供の数・年齢、結婚後の年数、夫の消費パターン、妻の消費のパターン、家計所得が増加しているか減少しているか、等々に大きな差異がある。さらに、消費行動を説明する要因を挙げていくと数限りなく拡大されていく。しかし、それらの殆どが数量化できず、たとえそれができたとしても、全ての要因のデータを得ることは不可能である。このようなことが可能だとしても、全ての要因の数は実際の観測値の数（サンプル・サイズ）を上回り、要因の影響を推定する統計手法が存在しない。しかも、多くの要因は、それぞれが極く僅かな効果（影響）しかもたない。したがって、それらのデータを使用しても、それらの影響を統計学的に推定することは困難であり、不明確である。

経済現象を描写する数式モデルに全ての要因を採り入れることは不可能であるから、現象に大きな影響を与え、測定可能な経済変数を説明要因（変数）とし、他は一括してモデルの誤差とする。

そして第二は予め想定することができない偶然的変動の存在である。モデルの誤差は現象のモデル表現のための説明変数として採り上げなかった数多くの要因と偶然的変動の総和と考える。これらの数多くの要因のそれぞれは変数として定義し観測することが不可能である。モデルの誤差の作用を数量化するために、次のような考え方により、確率変数として表現する。すなわち、この誤差は無数の独立な要因の和であり、また、それぞれの要因は、同一分布にしたがう独立の確率変数と仮定すると、中心極限定理により、正規分布にしたがう確率変数（ランダム変数）とすることができる。

ところで、クロス・セクション・データにおいて、その中に他よりも並外れた値をもつ観測値が現れることがある。このような観測値は、経済主体の行動が特定の要因に強い影響を受けたことによると考えられる。このような場合は、経済データの確率分布は正規分布ではなく、モデルの誤差を正規分布と仮

計量経済モデルの頑健推定について（原田）

定することの妥当性はないといえよう。

現象の観測誤差（データの誤差）はデータを採る実験・観測の場が十分に管理された理想的な条件の下にあれば、ランダム・エラーのみであるから、その確率モデルとしては正規分布が仮定できる。観測誤差の分布が正規分布に一致しないケースが自然科学分野で経験的に確かめられているが、データ採取の場が理想的な条件の下では、正規分布の仮定は合理的である。しかし、経済データは下記のような様々な原因による観測誤差が入り、しかも自然科学のそれよりも大きいと考えられる。

経済データは十分に管理された実験からエコノミストによって採取されたのではない。経済主体の活動や意思決定の結果を記録したものである。自然科学と社会科学のデータ使用における決定的な相違は、前者ではデータの測定者がその使用者だということである。使用者が自らデータを採らないときには、その測定法やその他の情報を測定者に伝える。しかし、社会科学では事情が全く異なる。エコノミストはいかなる段階においても測定者ではない。経済データは集団を対象とする統計調査によって複数の手を経て採られる。統計調査は全数調査、様々な事情・理由によりそれが不可能なときには標本調査（標本抽出法）によっておこなわれる。統計調査および集計の過程で、様々な原因により誤差が入り込む。

統計調査における誤差の原因は、次の三種類に分類できよう。第一は無回答の誤差である。これは調査客体として指定された集団（標本）の一部が現実には調査から漏れること、あるいは社会集団の場合には調査客体の不在等による面接不能および調査拒否等から発生する。第二は回答の誤差であり、回答側に起因するものと、調査側に原因するものがある。回答側から発生するものは回答者の調査事項の解釈の誤りや不注意による誤回答である。この誤りは避けがたいものであり、結果を不正確にするが、誤りの方向が不規則であるから結果に偏りを生じる可能性は少ない。これにたいし、回答者による情報の隠蔽、虚偽は結果に偏りをあたえる。統計調査にたいし回答者が利害や偏見があるとき、その回答は作為的に歪められたものとなる。統計調査では、この誤りにたいす

るチェックを完全におこなうことは不可能である。また調査側の原因には、調査方法の設計の不備により正確な回答が得られないことが挙げられる。大規模な調査では、その設計・企画から実施までに多くの人員や組織が介在し、その活動が不統一になりやすく、誤差が入り込む。また、調査員の熟練・訓練の程度も回答に影響をあたえる。このような回答の誤差は結果に偏りやばらつきを発生させる。第三は集計の過程で生じるエラーである。これらの原因による誤差は観測値を大きく偏らせ、他の観測値からかけ離れた値とする。

以上のような原因により、経済データの観測誤差の中にはランダム・エラーだけでなく、組織的な原因による大きな誤差（グロス・エラー）が存在する可能性がおおきい。グロス・エラーには正規分布は仮定できない。

ところで、説明変数として採られた経済変数のデータにも当然、観測誤差が存在する。しかし、これをモデルに取り込むことができないので、観測誤差は現象（被説明変数）のもののみとする。後に述べる頑健推定においては、説明変数の異常値にも対処できる方式が提示される。

計量経済モデルの誤差項、すなわちモデルの誤差と観測誤差の和、の確率モデルに正規分布のような大きな誤差が発生する確率は小さいものと仮定すると、その現実的妥当性は疑わしい。むしろ正規分布を中心モデルとして、それにグロス・エラーを生ずる任意の分布が加わった正規分布の近傍を仮定するほうが妥当であろう。

通常、誤差項は正規分布が仮定される。しかし、計量経済モデルのパラメータの推定に際して、被説明変数と説明変数の双方の経済データについて正規分布にしたがうものかどうかを^②チェックすることが必要である。推定に用いるデータが正規分布にしたがうものでないときの対処法を3節に述べる。

注

- ② データが正規分布にしたがうものかどうかを検定する方法として、Shapiro and Wilk (1965) の検定法がある。この検定量は頑健性をもつ (Hampel (1985))。

3 誤差項の非正規性と推定法

計量経済モデルの誤差項にたいして設けられた正規性分布の仮定が、パラメータの推定に用いる経済データに完全にあてはまらない場合には、その最小二乗推定値は安定した経済関係（パラメータ）ではない。

現実には、誤差項の分布（データの分布）の正規性の仮定は、データの中の異常値（データの他の観測値とは異なる母集団から取り出された観測値）の存在により実際のデータの確率分布に適合しなくなる。しかもこの異常値は計量経済モデルのパラメータの最小二乗推定に甚大な影響をあたえる。大標本の場合でも、一つの異常値は最小二乗推定値に偏りを発生させる。

異常値は被説明変数と説明変数の双方のデータにあらわれる。通常、モデルには複数の説明変数が採り入れられるから、そのデータの中に異常値が出現する可能性は高い。しかも、説明変数データの異常値（high leverage）がパラメータの最小二乗推定値にあたえる影響（推定値を偏らせる）は被説明変数のそれよりも甚大である。

現実の経済データの確率分布が正規分布に適合しているか否かをチェックせずに、計量経済モデルのパラメータを最小二乗推定すると、その推定値は正規分布を前提にした特性が損なわれる。さらに、この場合に、推定値の検定に用いる、 t -値、 F -値にも偏りが生じてしまう。故に、経済データの非正規性が明らかになったとき、最小二乗推定を実行することは避けねばならない。現在、データの異常値の存在（データが正規分布でないこと）に対処するのに二つの方法がある。

第一は異常値を検出する統計量（diagnostic quantities）の利用である。異常値を検出しそれをデータから除去し、残りの観測値によりパラメータを最小二乗推定する方式である。しかし、その統計量は最小二乗残差を基にしている。異常値は最小二乗法による回帰係数の推定値を歪めているから、多くのデータ・ポイントにおいて最小二乗残差の平均二乗誤差を大きくしている。したが

って、最小二乗残差もしくはこれを基にした統計量を使用して異常値を正確に検出することは困難である。最小二乗残差では、大きく他とかけ離れた異常値を検出することは可能だが、比較的小さな異常値の検出ができない（masking effect）。この方式では推定値を大きく偏らせることは避けられるが、依然として偏った推定値を得る危険性がある。

第二は頑健推定の方式である。ここで、“頑健”とは仮定された事からの僅かな逸脱にたいして敏感でないことを意味する。線形回帰モデルの頑健推定は、誤差項の確率モデルとして仮定した正規分布が、実際のデータの確率分布に適合しなくとも、その推定量の特性が損なわれない。頑健推定の方式では、誤差項の確率モデルは正規分布の近傍を仮定するのが一般的である。誤差項の正規分布の仮定が実際のデータにあてはまらなくても推定量の特性が劣化しないように、頑健性をチェックする諸量を基に開発された推定法が頑健推定である。

なかでも、頑健性についての量的情報が最も豊富なものは influence function である。これはそれぞれの観測値がもたらす推定値への影響（偏り）の大きさを観測値の関数として表したものであり、推定量の安定性をチェックするのに有用である。次に述べる breakdown point と併せて、頑健推定の方式を開発するに際して活用される頑健性の尺度である。

頑健推定の目的の第一は、グロス・エラーによる異常値を含んだデータを用いても、推定値に偏りを生じないようにすることである。数多くの異常値を含むデータを使用しても推定値が偏らないという観点での頑健性の量的尺度は breakdown point である。

第二は推定方式をグロス・エラー（異常値）にたいする反応を可能なかぎり鈍くすることである。全ての観測値がグロス・エラーを被る可能性があるから、頑健推定はいかなる観測値にたいしても、その推定値が過大に影響されないことが要請される。推定量が異常値に敏感であると、推定値に偏りが生じやすく、その安定性を欠くことになる。この点をチェックするには influence function をもとにした gross error sensitivity が用いられる。

頑健推定の第三の目的は、誤差値の分布が正規分布から離脱しても、推定量

計量経済モデルの頑健推定について（原田）

の効率を高く保持していくことである。gross error sensitivity を所定の範囲におさめて、推定量の効率を最大化するという最適問題は、正規分布の場合で、Huber (1973) の M-推定量が解決している。

4 頑健推定

本節では、頑健性の一尺度である breakdown point が高い値をもつ頑健推定の方式を検討する。

Donoho and Huber (1983) に拠れば breakdown point とは“(推定量に関して) 推定値を甚だしく偏らせることなく、推定に使用するデータが許容できる異常値の数がサンプル・サイズに占める割合”である。この値が高い (high breakdown point) 推定量は、使用するデータの中に数多くの異常値を含んでいても、推定値は大きな偏りを生ずることがない。

回帰分析において最もひろく使用される最小二乗推定量は一つの異常値によりその推定値が大きく偏るので、その breakdown point は標本サイズ (n) の逆数であたえられ、サンプル・サイズが大きくなるにしたがって、その値は零に近づく。したがって、最小二乗推定量の breakdown point は 0 % である。

線形回帰モデルにたいする頑健推定の試みは Edgeworth の方式に始まる。最小二乗法は残差を二乗しているので異常値が推定値に極めて大きく影響するが、この推定方式は残差の絶対値の総和を最小にするような回帰係数を推定するものである。しかし、この方式は被説明変数の異常値により推定値が偏ることはないが、説明変数の異常値に抗しきれず、その breakdown point は 0 % である (Rousseeuw (1984), p. 871)。

Huber (1973) による M-推定量はやはり説明変数の異常値の影響を排除できず、その breakdown point は 0 % である。この弱点を矯正するため、weight function を用いて説明変数の異常値の影響を抑える GM-推定量が開発された。しかし、Maronna, Boustos, and Yohai (1979) に拠れば、その breakdown point はせいぜい $1/(p+1)$ である (p は説明変数の数)。

Rousseeuw (1984) は残差の中央値を最小とするような回帰係数を求める LMS-推定を開発し、その breakdown point が 50 %であることを示した。この推定方式は、使用データの中の半数が異常値であっても、その推定値が偏らない（データの中に半分以上の異常値があると、良い観測値と異常値の識別が不可能となる。breakdown point 50% は可能最大の値である）。

しかし、LMS-推定は効率が低く、誤差項が正規分布であっても推定値の分散は小さくならない。Rousseeuw (1984) はこの難点の打開策として、LMS-推定値を初期値とした one step reweighted least squares（これは Bickel (1975) による one step-M 推定量にあたる）を勧めている。しかし、この推定法では、その推定量の効率は one step M-estimate のものとなるが、breakdown point は不明となる。

高い breakdown point と高い効率の二つの特性を同時にもつ推定量として、Yohai (1987) による MM-推定量と Yohai and Zamar (1988) による τ -推定量がある。これらの推定方式では、異常値にたいする反応を低く抑えることと効率を高くすることのトレード・オフの関係にある二つの目的を果たすため、効率をどの程度まで犠牲にするかが重要となる。これは tuning constant の値の設定にかかっている。また、それぞれの観測値の影響を少なくするための条件を満たす残差の関数 (ϕ -function) を定義しなければならない。

5 むすび——頑健推定の一方法——

経済データの中に異常値（母集団が正規分布ではない観測値）が存在する可能性を否定できないので、計量経済モデルのパラメータの推定には、頑健推定の方式が不可欠である。本節では計量経済モデル（線形回帰モデル）のパラメータの頑健推定の一方式として、M-推定量を iteratively reweighted least squares に変換したものを提示する。

最小二乗法は残差の二乗和を最小とするパラメータを求めるが、ここでは残差についての関数（残差の二乗和ではない） ρ -function の和を最小とする M-

計量経済モデルの頑健推定について（原田）

推定量を考える。 ρ -function の導関数である ϕ -function の和を零と置いた方程式（最小二乗法では正規方程式）を解いてパラメータを求める。この推定方式では ρ -function もしくは ϕ -function を定義することが必要である。

ところが、 ϕ -function の和を零と置いた方程式は、通常、非線形となるので、これを解くには繰り返し法（iterative algorithm）が要求される。その一方式である iteratively reweighted least squares (IRLS) に M-推定量を変換する。

IRLS は初期推定値と weight function が必要である。これらを定義するにあたって、二つの頑健性、異常値を含むデータを用いてパラメータを推定してもその推定値が真の値の近傍にあること、および、推定値が異常値により影響されないこと、について考慮する。前者の頑健特性は breakdown point により、後者は gross error sensitivity によりそれぞれ測られる。初期推定値は high breakdown point をもつこと、weight function は low gross error sensitivity であることを要す。

初期推定値には Rousseeuw(1984)による least median of squares regression (LMS) で求めた回帰係数推定値を充てる。LMS 推定法はその breakdown point の値が 0.5 であり、使用データの中の半数が異常値であっても推定値は真の値の近傍にある。

weight function は ϕ -function を残差で除したものとして定義されるが、最小二乗法の influence function（推定値を観測値の関数として表したもの）を利用して、IRLS の gross error sensitivity（推定量の異常値にたいする感度）が異常値に対して鈍感（low gross error sensitivity）となるように観測値の関数としたものを設計する。gross error sensitivity が一定の値（観測値が異常値と判断される臨界値）を越える観測値には 1 を下回る weight, その値より低い観測値には weight を 1 に設定する。

このような初期推定値と weight function をもつ IRLS により、回帰係数推定値はデータを使用してその値が収束するまで繰り返し計算を行う。gross error sensitivity が全ての観測値について臨界値を越えない場合、weight が 1 となり IRLS は最小二乗推定になる。なお、gross error sensitivity は異常

値を検出する統計量として利用できる。

この推定量は漸近的正規性をもつので、回帰係数推定値にたいする t -検定、 F -検定が漸近的に妥当である。

参考文献

- Beaton, A. E., and Tukey, J. W. (1974). The Fitting of Power Series, Meaning Polynomials, Illustrated on Band-Spectroscopic Data, *Technometrics*, 16, 147–185.
- Donoho, D. L., and Huber, P. J. (1983). The Notion of Breakdown Point. In *A Festschrift for Erich L. Lehmann* (P. J. Bickel, K. A. Doksum, and J. L. Hodges Jr. eds.), Wodsworth, Belmont CA, pp. 154–184.
- Hampel, F. R. (1971). A General Qualitative Definition of Robustness, *The Annals of Mathematical Statistics*, 42, 1887–1896.
- (1974). The Influence Curve and Its Role in Robust Estimation, *Journal of the American Statistical Association*, 69, 383–393.
- (1985). The Breakdown Points of the Mean Combined with Some Rejection Rules, *Technometrics*, 27, 95–107.
- Hampel, F. R., Ronchetti, E. M., Rousseeuw, P. J., and Stahel, W. A. (1986). *Robust Statistics: The Approach Based on Influence Functions*, John Wiley & Sons, New York.
- Harada, K. (1988). A Practical Procedure for Robust Estimation in Linear Regression, unpublished paper for a seminar in the Australia-Japan Research Centre, Australian National University.
- Holland, P. W., and Welsch, R. E. (1977). Robust Regression Using Iteratively Reweighted Least Squares, *Communications in Statistics (Theory and Method)*, 6, 813–827.
- Huber, P. J. (1973). Robust Regression: Asymptotics, Conjectures and Monte Carlo, *The Annals of Statistics*, 1, 799–821.
- (1981). *Robust Statistics*, John Wiley & Sons, New York.
- Krasker, W. S. (1980). Estimation in Linear Regression Models with Disparate Data Points, *Econometrica*, 48, 1333–1346.
- Maronna, R., Bustos, O., and Yohai, V. (1979). Bias- and Efficiency-Robustness of General M-estimators for Regression with Random Carriers. In *Smoothing Technique for Curve Estimation, Lecture Note in Mathematics, 757* (T. Gasser and M. Rosenblatt eds.), Springer-Verlag, Berlin, pp. 91–116.
- Morgenstern, O. (1963). *On the Accuracy of Economic Observations*, 2nd

ed., Princeton University Press.

Rousseeuw, P. J. (1984). Least Median of Squares Regression, *Journal of the American Statistical Association*, 79, 871–880.

Rousseeuw, P. J., and Leroy, A. (1987). *Robust Regression and Outlier Detection*, John Wiley & Sons, New York.

Shapiro, S. S., and Wilk, M. B. (1965). An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples), *Biometrika*, 52, 591–611.

Yohai, V. J. (1987). High Breakdown-Point and High Efficiency Robust Estimates for Regression, *The Annals of Statistics*, 15, 642–656.

Yohai, V. J., and Zamar, R. H. (1988). High Breakdown-Point Estimates of Regression by Means of the Minimization of an Efficient Scale, *Journal of the American Statistical Association*, 83, 406–413.