時変回帰係数の最大尤度法による推定について

原 田 桂 一 郎

目　次

1 はじめに

偶発的に変動する外生要因の経済システムに対する影響は，経済変数間の関係を不安定なものとする。この状態を写した計量モデルのパラメーターは不変（コンスタント・パラメーター）でなく，時間経過と共に変動する時変パラメーターとなると考えられる。コンスタント・パラメーター・モデルでは，偶然変動の影響は撹乱項の中に包含され，撹乱項の平均が零であると仮定されることから，むしろ余計な要因として扱かわれている。

しかし，時変パラメーター・モデルは，偶然変動が経済変数間の関係に及ぼす影響を明示的に表現したものである。

時変パラメーターの変動過程には規則性はなく，不規則な変動を示すことが仮定される。この場合，パラメーターは時間経過と共に変動する確率変数であるとして，確率過程によってその変動が特定化される。また，どのような確率過程によって特定化するかは分析者の判断によるものであり，経済理論に基づいてそれを行うことは不可能である。本稿で扱う時変パラメーター回帰モデルは，そのパラメーターが非定常確率過程にしたがって変動するものと仮定する。

時変パラメーターが非定常過程にしたがうとするモデルは既に幾つかが提示されている。2節でそれ等を検討する。3節において，本稿で扱うモデルを紹介し，4節と5節で回帰係数の最尤推定量を求める。また5節ではその漸近特性を示しておく。最後の6節は本稿のまとめである。

2 既に提示された時変パラメーター・モデル

パラメーターが非定常なランダム変動をするとした時変パラメーター・モデルは，Cooley and Prescott〔2〕〔3〕，Rosenberg〔8〕および Sarris〔10〕によって提示されている。

2—1 Cooley-Prescott モデル

Cooley and Prescott〔3〕の示したモデルは，

$$Y_t = x_t'\beta_t \qquad t=1,\ 2, \cdots\cdots, T \tag{2—1}$$

という時系列回帰式である。x_t は独立変数の k 個の要素からなるベクトル，また β_t は確率的変動を示す要素からなるパラメーター・ベクトルで

ある。パラメーターの変動は永続的なものと一時的なものとの合成であり，

$$\beta_t = \beta_t^p + u_t$$
$$\beta_t^p = \beta^p_{t-1} + v_t \qquad (2\text{—}2)$$

とモデル化する。ここで，β_t^p はパラメーター・ベクトルの永続的変動を示す部分をあらわし，ランダム・ウォーク過程（非定常）にしたがうと仮定する。u_t と v_t はそれぞれ独立な正規ランダム・ベクトルであり，平均零，共分散行列は，

$$\mathrm{ocv}(v_t) = (1-\gamma)\sigma^2 \Sigma_u \qquad \mathrm{cov}(v_t) = \gamma\sigma^2\Sigma_v$$

である。行列 Σ_u，Σ_v は全要素が既知であると仮定され，また，パラメーター γ（$0<\gamma<1$）は永続的変化と一時的変化の大きさの相対関係を示し，γ が1に近づくほど一時的な変化より永続的変化が大となる。

パラメーターを発生する確率過程は定常ではないので，σ^2, γ および β_t の永続的要素の最尤推定量を直接，求めることは不可能である。そこで，パラメーター過程の特定時点の実現値はその尤度関数を定義できるので，Cooley and Prescott は標本期間の一期後のパラメーターの実現値に照点を当てている。(2−2) で繰り返し代入を行うことにより，

$$\beta^p_{T+1} = \beta_t^p + \sum_{s=t+1}^{T+1} v_s \qquad (2\text{—}3)$$

したがって，

$$\beta_t = \beta^p_{T+1} - \sum_{s=t+1}^{T+1} v_s + u_t \qquad (2\text{—}4)$$

となる。(2—4) を (2—1) に代入すれば，

$$y_t = x_t'\beta^p_{T+1} + \mu_t \qquad t=1,\ \cdots\cdots,\ T \qquad (2\text{—}5)$$
$$\mu_t = x_t'u_t - x_t'\sum_{s=t+1}^{T+1} v_s$$

となる。ランダムベクトル μ_t は正規分布をなし，平均ベクトルは零，共分散行列は，

$$\mathrm{cov}(\mu_t)=\sigma^2[(1-\gamma)R+\gamma Q]\equiv\sigma^2\Omega(\gamma) \tag{2—6}$$

である。ここで，R は $\gamma_{ii}=x_i'\sum_u x_i$ なる要素をもつ対角行列，そして Q は

$$q_{ij}=min(T-i+1,\ T-j+1)x_t'\Sigma_v x_j$$

なる要素をもつ行列である。

完全なモデルを

$$Y=X\beta^p{}_{T+1}+\mu$$

と表わすと，サンプル Y についての対数尤度関数は，

$$L=-\frac{T}{2}\ln 2\pi-\frac{1}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2}\ln|\Omega(\gamma)|$$
$$-\frac{1}{2\sigma^2}(Y-X\beta^p{}_{T+1})'\Omega(\gamma)^{-1}(Y-X\beta^p{}_{T+1}) \tag{2—7}$$

である。(2—7) を最大とする $\beta^p{}_{T+1}$ と σ^2 とを求めると（未知数 γ が存在するのでその関数としての $\hat{\beta}^p{}_{T+1}(\gamma)$ と $\hat{\sigma}^2(\gamma)$），

$$\hat{\beta}^p{}_{T+1}(\gamma)=[X'\Omega(\gamma)^{-1}X]^{-1}X'\Omega(\gamma)^{-1}Y$$
$$\hat{\sigma}^2(\gamma)=\frac{1}{T}[Y-X\hat{\beta}^p{}_{T+1}]'\Omega(\gamma)^{-1}[Y-X\hat{\beta}^p{}_{T+1}) \tag{2-8}$$

を得る。これらの推定量を (2—7) に代入すると，

$$L=-\frac{T}{2}(\ln\ 2\pi+1)-\frac{T}{2}\ln\hat{\sigma}^2(\gamma)-\frac{1}{2}\ln|\Omega(\gamma)| \tag{2—9}$$

を得る。(2—7) を最大とすることは (2—9) を $\gamma\epsilon$ [0, 1] に関して最大にすることと同等となる。したがって，(2—9) を最大とする γ の値 $(\hat{\gamma})$ を (2—8) に代入して，$\beta^p{}_{T+1}$ と σ^2 の推定量を算定する。さらに Cooley and Proscott は $\hat{\gamma}$ が γ の一致推定量であり，①また $\hat{\beta}^p{}_{T+1}(\hat{\gamma})$ は漸近的に有効であるとしている。

ところで，パラメーターの推定を容易にすすめるために，Cooley and

Prescott は Σ_u と Σ_v を全要素にわたって既知であると仮定している。Σ_u と Σ_v を推定することは理論的には可能であるが，両者を識別することは不可能である。この仮定が置かれたことにより推定の困難さはなくなっている。しかし，実際には両者が既知であることはありえない。

2―2 Rosenberg モデル

Rosenberg はデータがクロス・セクションのそれぞれの単位について，時系列で得られる場合の，時変パラメーター回帰モデルを提示した。パラメーター・ベクトルをクロスセクションの局面で変化するものと，変化しないものとに区分し，前者の時間に関する変化はシステマティックであり，後者のそうした変化はランダム・ウォーク過程にしたがうと仮定している。そして回帰式（モデル）は次のように示される。

$$y_{nt}=\sum_{i=1}^{k} w_{int}\, c_{it}+\sum_{j=1}^{\lambda} z_{jnt}a_{jnt}+u_{nt} \qquad (2\text{―}10)$$

$$t=1,\ 2,\cdots\cdots,\ T \qquad n=1,\ 2,\cdots\cdots,\ N$$

ここで y は従属変数，w，z は独立変数をあらわし，c_{it} はクロスセクションで変動しないパラメーター，a_{jt} はクロスセクションで変動するパラメーターである。また撹乱項は独立な同一の正規分布にしたがう変数，$E(u_t)=0$，$E(u^2{}_u)=\sigma^2$ である。

さらに，パラメーターの時間に関する変動は次のように示される。

$$c_{t+1}=c_t+\gamma_t \qquad t=1,\cdots\cdots,\ T \qquad (2\text{―}11)$$

$$a_{n,\ t+1}=a_t+\Delta_\phi(a_{nt}-a_t)+\eta_{nt} \qquad t=1,\ \cdots\cdots,\ T \qquad n=1,\cdots\cdots,\ N \qquad (2\text{―}12)$$

また，γ_t と η_{nt} にはそれぞれ次の仮定が置かれている。

$$E(\gamma_t)=0 \qquad E(\gamma_s\gamma_t')=\begin{cases}\sigma^2 Q_c & s=t\\ 0 & s\neq t\end{cases}$$

$$E(\eta_{nt})=0 \qquad E(\eta_{mt}\,\eta'_{st})=\begin{cases}\sigma^2(Q_a+Q_g) & s=t,\ m=n\\ 0 & s\neq t,\ m\neq n\end{cases}$$

$$E(u_{ms}\gamma_t')=0 \qquad E(u_{ms}\,\eta'_{nt})=0$$

$$E(\gamma_s\,\eta'_{nt})=\begin{cases}\sigma^2 Q_{ca} & s=t\\ 0 & s\neq t\end{cases}$$

(2—12) の Δ_ϕ は収束行列と呼ばれる対角行列で，対角要素 ϕ_i は $0\leq\phi_i<1$ $i=1,\cdots\cdots,\lambda$ である。

このモデルに最尤推定法とベイズ推定法を適用している。しかしこのモデルはクロス・セクション・レベルの分析には適すが，データーがマクロ・レベルの分析には適さない。また，Q_c, Q_a, Q_g などのパラメーターを識別することは実際上，非常に困難である。

2—3 Sarris モデル

Sarris の提示したモデルは Kalman フィルター・モデルの範疇にあるもので，次のように定式化されている。従属変数 y_t は独立変数ベクトル $x_t\,(1\times k)$ の回帰式として

$$y_t=x_t\beta_t+\varepsilon_t \tag{2—13}$$

ここで β_t は時変回帰係数ベクトル $(k+1)$，ε_t は撹乱項である。この撹乱項は独立な正規分布にしたがい，$E(\varepsilon_t)=0$, $E(\varepsilon_t^2)=\sigma_\varepsilon^2$ である。

時変回帰係数ベクトル β_t はマルコフ過程

$$\beta_{t+1}=T\beta_t+u_{t+1} \qquad t=0,\ 1,\cdots\cdots,\ N-1 \tag{2—14}$$

から生起すると仮定される。T は転換行列 $(k\times k)$ と称し，これがマルコフ過程の構造を定める。なお T は既知であると仮定れさる。また u_t はランダム・ショック・ベクトル $(k\times 1)$ で多変量正規分布をなし，$E(u_t)=0$, $E(u_tu_s')=\sigma_u^2R\delta_{st}$ である。なお R は $(k\times k)$ 行列で既知であることが仮定

される。

このように定式化されたモデルの時変回帰係数 $\{\beta_t\}$ の推定は，$\{\beta_t\}$ が確率変数であることからベイズ推定法が採用されている。まずベクトル β_t についての事前分布は σ_u^2, β_0 (β_t の初期値) が未知であるから，これ等を最尤推定法によって推定してそれを定める。この事前分布に標本観測値の情報を付加して，ベクトル β の事後分布を定め，この平均値として，推定量 $\widehat{\beta}$ を求める。

β_0, σ_ε^2 および σ_u^2 は次のようにして推定される。まず，(2—14) においで β_t は繰り返し代入を行なうことによって，

$$\beta_t = T^t\beta_0 + \sum_{j=1}^{t} T^{t-j}u_j \tag{2—15}$$

となる。これを (2—13) に代入すると

$$y_t = x_t\beta_t + \varepsilon_t = x_t T^t \beta_0 + x_t \sum_{j=1}^{t} T^{t-j} u_j + \varepsilon_t \tag{2—16}$$

を得る。さらに，

$$z_t \equiv x_t T^t \qquad t=1, 2, \cdots\cdots, N \tag{2—17}$$

$$v_t \equiv x_t \sum_{j=1}^{t} T^{t-j} u_j + \varepsilon_t \qquad t=1, 2, \cdots\cdots, N \tag{2—18}$$

として，

$$Y \equiv [y_1, y_2, \cdots\cdots, y_N]'$$

$$Z \equiv [z_1', z_2', \cdots\cdots, z_N']'$$

$$v = [v_1, v_2, \cdots\cdots, v_N]'$$

とおけば，(2—16) は

$$Y = Z\beta_0 + v \tag{2—19}$$

である。

ベクトルvは多変量正規分布にしたがうから，Yについての尤度関数が定義できて，β_0，σ_ε^2 および σ_u^2 の最尤推定量が求められる。

時変回帰係数ベクトルβ_tの変動を規定する転換行列Tは，分析者がその変動経過をどのようなマルコフ過程とするかにかかっている。したがってTは具体的に定められるものである。②しかし，β_tの推定を容易にするためにランダム・ショック・ベクトルu_tの共分散行列Rが既知であるとする，現実性を欠く仮定が置かれている。

注

① Tsurumi and Chiba〔12〕は γ，σ^2 が一致推定量にならないことを証明している。

② Sariss は，転換行列の選定は分析者が，時変回帰係数の変動パスをどう判断するかによるとしているが，ARIMA 過程がその変動パスを表現するのに一般性があるとしている。さらに，T=1 とした場合の様々な ARIMA モデルを示している。Sarris〔10，pp. 517—520〕参照。

3 時変パラメーター回帰モデル

次の時系列回帰モデル（線型回帰モデル）

$$y_t = x_t'\beta_t \qquad t=1,\ 2, \cdots\cdots, T \tag{3—1}$$

を考える。ここで，y_tは従属変数のt期での観測値，x_tはk個の要素（変数）から成る独立変数ベクトル，

$$x_t' = (x_{1t}\ x_{2t} \cdots\cdots x_{kt})$$

またβ_tはパラメーター・ベクトル

$$\beta_t = (\beta_{1t}\ \beta_{2t} \cdots\cdots \beta_{kt})'$$

である。もし切片が存在する場合には，$x_{1t}=1$，β_1が切片となる。

通常，線型回帰モデルには撹乱項（誤差項）が付加される。この撹乱項は従属変数の観測値（現実）y_t とそれを説明する β_t を固定した x_t の一次式（理論式）のズレを埋めるために導入される。撹乱項の発生要因として，モデル（線型回帰式）の特定化の誤り，外生的要因の存在とその変化などが挙げられる。しかし，これ等はいずれもパラメーター（回帰係数）を変動させる原因となるから③，線型回帰モデル (3—1) には撹乱項を付加せず，パラメーター・ベクトル β_t が時変 (time varying) であると仮定する。また，この時変パラメーター（時変回帰係数）ベクトルはランダム・ウォーク過程（非定常確率過程）にしたがって変動していると仮定する④。すなわち，β_t の変動は

$$\beta_t=\beta_{t-1}+u_t \tag{3—2}$$

と表わされる。ここで，u_t はランダム・ベクトル $(k\times1)$ であり，相互独立かつ同一の多変量正規分布にしたがう。その平均ベクトルと，共分散行列は，次のとおりである。

$$\left.\begin{aligned}&E(u_t)=0\\&\mathrm{cov}(u_t)=E(u_t\,u_s')=\sigma_u^2\ I\ \delta_{ts}\end{aligned}\right\} \tag{3—3}$$

したがって，このモデルは基本的には Cooley–Prescott モデルである。

パラメーター・ベクトル β_t の変動は非定常であるから，初期値から時の経過と共にしだいに離れていく（増加傾向を示す）。ここで，標本期間 $(t=1, 2, \cdots\cdots, T)$ の一期後 $(T+1)$ の値を β_{T+1} として，それを求めてみる。(3—2) において繰り返り代入を行うことにより，

$$\begin{aligned}\beta_{T+1}&=\beta_T+u_{T+1}=\beta_{T-1}+u_T+u_{T+1}\\&=\beta_{T-2}+u_{T-2}+u_{T-1}+u_T+u_{T+1}\\&=\cdots\cdots=\beta_t+u_{t+1}+u_{t+2}+\cdots\cdots+u_{T-1}+u_T+u_{T+1}\end{aligned}$$

であるから結局，β_{T+1} は

$$\beta_{T+1}=\beta_t+\sum_{s=t+1}^{T+1}u_s \tag{3—4}$$

また，

$$\beta_t=\beta_{T+1}-\sum_{s=t+1}^{T+1}u_s \tag{3—5}$$

となる。

ここで (3—5) を用いると (3—1) は次のように表わしかえることができる。わすなち，

$$y_t=x_t'\,\beta_{T+1}-x_t'\sum_{s=t+1}^{T+1}u_s$$

であるから，

$$y_t=x_t'\beta+\mu_t \tag{3—6}$$

となる。ただし，

$$\beta=\beta_{T+1}$$

$$\mu_t=-x_t'\sum_{s=t+1}^{T+1}u_s \tag{3—7}$$

である。

さらに，

$$Y=[y_1\ y_2\cdots\cdots y_T]'$$

$$\beta=[\beta_{1,\,T+1}\ \beta_{2,\,T+1}\cdots\cdots\beta_{k,\,T+1}]'$$

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21}\cdots\cdots x_{k1} \\ x_{12} & x_{22}\cdots\cdots x_{k2} \\ x_{1T} & \cdots\cdots\cdots\ x_{kT} \end{pmatrix}$$

$$\mu=[\mu_1\ \mu_2\cdots\cdots\mu_T]'$$

とおけば，完全なモデルは

$$Y=X\beta+\mu \tag{3—8}$$

と表わせる。ランダム・ベクトル μ は相互独立かつ同一の多変量正規分布にしたがい，その平均ベクトルと共分散行列は

$$\left.\begin{array}{ll} E(\mu)=0, & \because \ (3\text{—}7) \text{ で } E(u_s)=0 \\ \mathrm{cov}(\mu)=E(\mu\,\mu')=V & \end{array}\right\} \tag{3—9}$$

である。いま $V(T\times T)$ の任意の要素に着目すると，

$$E(\mu_i\,\mu_j')=E(x_i'\sum_{s=1}^{T-i+1}u_s)(\sum_{s=1}^{T-j+1}u_s\cdot x_j)$$
$$=\min(T-i+1,\ T-j+1)\,x_i'\,\sigma_u{}^2x_j$$

となり，共分散行列の各要素は二次形式であるのでスカラーとなる。

ランダム・ベクトル μ は

$$\mu\sim N(O,\ V)$$

であるから，その一次変換（3—7）である Y は，

$$Y\sim N(X\beta,\ V)$$

となる。

時変回帰係数ベクトル β_t の特定値に着目し，それをコンスタントなものと仮定すると，尤度関数を定義することができる。

観測値 Y に関しての尤度関数は

$$L(\beta,\ Q/Y,\ X)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{T}{2}}|V|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}(Y-X\beta)'V^{-1}(Y-X\beta)\right] \tag{3—10}$$

と与えられる。

注

③ 特定化の誤りがパラメーターを変動させるという指摘は，例えば Sarris〔10, p. 502〕において見られる。

④ これは，Sarris〔10〕の示した

$\beta_{t+1}=T\beta_t+u_t$

の転換行列 $T=1$ のケースである。ランダム・ウォーク過程は，確率変数の時変が激しい場合に適合する。

4　β と V の最尤推定量

尤度関数（3—10）の指数（exp）の部分には V^{-1} があるので，$V^{-1}=\Phi$ とおいて，まず β と Φ の最尤推定量を求める⑤。尤度関数において，ベクトル Y は標本値において固定され，また行列 X はコンスタントであるから，結局（3—10）は β と Φ の関数である。これらの変数を β^*, Φ^* と表わし，尤度関数の対数をとると，

$$\log L(\beta^*,\ \Phi^*/Y,\ X)$$

$$=-\frac{T}{2}\log 2\pi+\frac{1}{2}\log|\Phi^*|-\frac{1}{2}(Y-X\beta^*)'\Phi^*(Y-X\beta^*) \qquad (4\text{—}1)$$

となる。

（4—1）を最大にする β^* は尤度方程式

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta^*}=\Phi^*(Y-X\beta^*)X'=0$$

を解くことによって求められる。したがって最大値は

$$\beta^*=[X'\Phi^*X]^{-1}X'\Phi^*Y \qquad (4\text{—}2)$$

においてである。

また，（4—1）を最大とする Φ^* は次のような手順によって求められる。

$\Phi^*=(\phi_{ij})$ は（$T\times T$）行列であるから，その各要素について（3—11）の偏微分をとる。まず $k=k$ については，

$$\frac{\partial \log L}{\partial \phi_{kk}}=\frac{1}{2}\ \frac{1}{|\Phi^*|}\ \frac{\partial|\Phi^*|}{\partial \phi_{kk}}-\frac{1}{2}d_{kk}=\frac{1}{2}\ \frac{\operatorname{cof}\phi_{kk}}{|\Phi^*|}-\frac{1}{2}d_{kk} \qquad (4\text{—}3)$$

ここで d_{kk} は行列 $(Y-X\beta^*)'(Y-X\beta^*)$ の kk 要素，$\mathrm{cof}\,\phi_{kk}$ は $|\Phi^*|$ における ϕ_{kk} の余因子，をそれぞれ表わす。また，$k\neq l$ については，$\phi_{kl}=\phi_{lk}$ であるから

$$\frac{\partial \log L}{\partial \phi_{kl}}=\frac{\mathrm{cof}\,\phi_{kl}}{|\Phi^*|}-d_{kl} \tag{4—4}$$

d_{kl} は $(Y-X\beta^*)'(Y-X\beta^*)$ の kl 要素である。

(4—3) と (4—4) において $\partial \log L/\partial\phi_{kk}=0$，$\partial \log L/\partial\phi_{kl}=0$ として，$\mathrm{cof}\,\phi_{kl}/|\Phi^*|$ が Φ^* の逆行列の $(k,\ l)$ 要素であるという事実を用いると，

$$\Phi^{*-1}=(Y-X\beta^*)'(Y-X\beta^*) \tag{4—5}$$

を得る。したがって (4—1) の最大値は

$$\Phi^*=[(Y-X\beta^*)'(Y-X\beta^*)]^{-1} \tag{4—6}$$

において生ずる。

かくして，β と Φ の最尤推定量は

$$\hat{\beta}=[X'\hat{\Phi}X]^{-1}X'\hat{\Phi}Y \tag{4—7}$$

$$\hat{\Phi}=[(Y-X\hat{\beta})'(Y-X\hat{\beta})]^{-1} \tag{4—8}$$

である。しかし，V の推定量 $\hat{V}$ は，$\hat{V}=\hat{\Phi}^{-1}$ で与えられるから⑥，結局 β と V の最尤推定量は，

$$\hat{\beta}=[X'\hat{V}^{-1}X]^{-1}X'\hat{V}^{-1}Y \tag{4—9}$$

$$\hat{V}=(Y-X\hat{\beta})'(Y-X\hat{\beta}) \tag{4—10}$$

となる⑦。

(4—9), (4—10) から明らかなように，相互に未知数を含んでいるので，$\hat{\beta}$，$\hat{V}$ を求めることは容易ではない。特に共分散行列の逆行列 $\hat{V}^{-1}$ を求めることはこのままでは不可能である。

こうした障害を除くために，ランダム・ベクトル μ について特定の仮定

を設けて，その共分散行列の要素を具体的に示すことを考える。この観点にしたがって時変回帰係数を推定する試みを次節で展開する。

注

⑤　この節での V の最尤推定量の導出は，Anderson〔1，pp. 44—48〕に依拠している。

⑥　証明は Anderson〔1，pp. 47—48〕に示されている。

⑦　V が既知であるとの仮定を置けば (4—9) は Aitken 推定量（一般化最小＝乗推定量）である。ただし測定不可能な V が既知であることは現実にはありえない。

5　ランダム・ベクトル μ が自己回帰過程にしたがうケース

4節のケースで，時変係数の推定に伴う困難は，ランダム・ベクトル μ の共分散行列が未知であることによるものである。その推定を容易にするために，ランダム・ベクトルもしくはその分布特性値に何らかの仮定を置くことが考えられる。そこで，ランダム・ベクトルの要素（$\mu_t : t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T$）は時系列となっているので，要素間に系列相関が存在するという仮定を設定してみる。本節では，このケースでの時変回帰係数の$(T+1)$期ベクトルの最尤推定量を求める。

(3—8) に示したモデル

$$Y=X\beta+\mu \qquad (5\text{—}1)$$

において，ランダム・ベクトル μ の要素は，次のような自己回帰過程

$$\mu_t=\rho\mu_{t-1}+\varepsilon_t \qquad (5\text{—}2)$$

にしたがうものと仮定する。ただし，$|\rho|<1$，また

$$E(\varepsilon_t)=0 \qquad (5\text{—}3)$$

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t\,\varepsilon_s)&=\sigma_\varepsilon^2 \qquad s=t \\ &=0 \qquad s\neq t \end{aligned}$$

また，$\varepsilon_t \sim N(0,\ \sigma_\varepsilon^2)$ とする。

この場合，ランダム・ベクトル μ の平均ベクトルと共分散行列は，

$$\left.\begin{aligned}
&E(\mu)=0\\
&E(\mu'\mu')=\sigma_\mu^2\Omega=\frac{\sigma_\varepsilon^2\Omega}{1-\rho^2}=\sigma_\varepsilon^2 V,\ \ V=\frac{1}{1-\rho^2}\Omega\\
&\Omega=\begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2\cdots\cdots\cdots\cdots\rho^{T-1}\\ \rho & 1 & \rho\ \cdots\cdots\cdots\cdots\rho^{T-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad\qquad\quad \vdots\\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \rho^{T-3}\cdots\cdots\cdots 1\end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} \qquad (5—4)$$

と与えられる⑧。X，Y についての尤度関係は，

$$\log L(\beta,\rho,\sigma_\varepsilon^2/Y,X)=-\frac{T}{2}\log 2\pi-\frac{1}{2}\log|\sigma_\varepsilon^2 V|$$
$$-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}(Y-X\beta)'V^{-1}(Y-X\beta) \qquad (5—5)$$

そして，$V^{-1}=M'M$ とするような行列 $M(T\times T)$ は次のように与えられる。

$$M=\begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0\\ -\rho & 1 & 0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0\\ 0 & -\rho & 1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0\\ \vdots & & \\ 0\cdots\cdots\cdots & & -\rho \quad 1 \quad 0\\ 0\cdots\cdots\cdots\cdots & & 0 \quad -\rho \quad 1\end{pmatrix} \qquad (5—6)$$

また，モデル（5—1）に M を左側から乗じて変換を行うと，

$$w=Z\beta+v \qquad (5—7)$$

$$w=MY,\qquad Z=MX,\qquad v=M\mu \qquad (5—8)$$

となる。変換されたランダム・ベクトル v は

$$v\sim N(0,\ \sigma_\varepsilon^2 I)$$

であるから，(5—7) から変換された w について

$$w\sim N(Z\beta,\ \sigma_\varepsilon^2 I)$$

が成立する。

変換された $w(=MY)$ に関しての尤度関数（対数）は

$$\log L(\beta,\ \sigma_\varepsilon^2,\ \rho/Y,\ X)$$

$$=-\frac{T}{2}\log 2\pi-\frac{T}{2}\log\sigma_\varepsilon^2+\frac{1}{2}\log(1-\rho^2)-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}(w-Z\beta)'(w-Z\beta) \qquad (5—9)$$

となる。⑨

ここで，ρ が固定されたものとして (5—9)

を最大とする β と σ_ε^2 を求めると，$\partial\log L/\partial\beta=0$ および $\rho\log L/\partial\sigma_\varepsilon^2=0$ から，

$$\hat{\beta}(\rho)=(Z'Z)^{-1}Z'w \qquad (5—10)$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2(\rho)=\frac{1}{T}(w-Z\beta)'(w-Z\beta) \qquad (5—11)$$

のようになる。

(5—10) と (5—11) を (5—9) に代入すると ρ についての “concentrated” 尤度関数

$$L_c(\rho/Y,\ X)=-\frac{T}{2}\log 2\pi-\frac{T}{2}\log\hat{\sigma}_\varepsilon^2(\rho)+\frac{1}{2}\log(1-\rho^2)-\frac{T}{2}$$

$$=-\frac{T}{2}(\log 2\pi+1)-\frac{T}{2}\log\{\hat{\sigma}_\varepsilon^2(\rho)/(1-\rho^2)^{1/T}\} \qquad (5—12)$$

を得る。こうして，尤度関数 (5—9) を最大とすることは，この “concentrated“ 尤度関数を最大 ($\hat{\sigma}_\varepsilon^2(\rho)/(1-\rho^2)^{1/T}$を最小）とする ρ を，その変域

$$-1<\rho<1 \qquad (5—13)$$

について見い出すことである。そのために次の手続を行う。

(5—13) の範囲にある ρ の値の集合

$$\{\rho_i : i=1,\ 2, \cdots\cdots,\ n\}$$

の中から，$\hat{\sigma}_\varepsilon^2(\rho)$ を最小とする $\hat{\rho}$ を選定する。ただし，ρ_i の精度は推定量の精度をどの程度にするかにかかっている。

こうして選定した $\hat{\rho}$ を（5—10）と（5—11）に代入することにより β と σ_ε^2 の推定量 $\hat{\beta}(\hat{\rho})$，$\hat{\sigma}_\varepsilon^2(\hat{\rho})$ が算出される。

$\hat{\rho}$ が $\hat{\sigma}_\varepsilon^2(\rho)\,/(1\text{-}\rho^2)^{1/T}$ を最小にするならば，

$$\theta^* = [\beta,\ \sigma_\varepsilon^2,\ \rho]'$$

の最尤推定量は

$$\hat{\theta}^* = [\hat{\beta}(\hat{\rho}),\ \hat{\sigma}_\varepsilon^2(\hat{\rho}),\ \hat{\rho}]'$$

であり，$\hat{\beta}(\hat{\rho})$ と $\hat{\sigma}_\varepsilon^2(\hat{\rho})$ は（5—10）および（5—11）から与えられる。

<最尤推定量 $\hat{\theta}^*$ の漸近特性>

変換されたランダム・ベクトル $v(v=M\mu)$ は，

$$v \sim N(0,\ \sigma_\varepsilon^2 I)$$

であり，相互独立の分布にしたがっている。しかし，ランダム・ベクトル μ の要素は自己回帰過程，

$$\mu_t = \rho\mu_{t-1} + \varepsilon_t$$

にしたがうことが仮定されている。故にベクトル μ は相互独立の分布にしたがうものではない。⑩ 最尤推定量

$$\hat{\theta}^* = [\hat{\beta}(\hat{\rho}),\ \hat{\sigma}_\varepsilon^2(\hat{\rho}),\ \hat{\rho}]'$$

は，ランダム・ベクトル μ が相互独立の同一分布にしたがっている場合に備えている漸近特性（附＝最尤推定量の漸近特性　参照）を保持しているかどうかを検討しなければならない。

ところで，回帰式

$$Y = X\beta + \mu$$

において，ランダム・ベクトル μ の要素が一次の自己回帰過程にしたがう場合，パラメーターの最尤推定量は一致性，漸近的不偏性および漸近的有効性を示すことが，Dhrymes〔４〕によって既に証明されている。⑪

しかし，本稿では時変回帰係数のプロセス $\{\beta_t\}$ の特定時点$T+1$の値 β_{T+1} をコンスタントとして尤度関数を定義したので，μ の要素は (3-7) のように表わされることとなった。この場合，パラメーターの最尤推定量の漸近特性は，一致性を保持しないことが Tsurumi and Shiba〔12〕によって示されている。

注

⑧ この場合のベクトル μ の平均と共分散行列は次のように導出される。(5―2) から

$$\begin{aligned}\mu_t&=\rho\mu_{t-1}+\varepsilon_t\\&=\rho(\rho\mu_{t-2}+\varepsilon_{t-1})+\varepsilon_t\\&=\cdots\cdots\cdots\cdots\\&=\varepsilon_t+\rho\varepsilon_{t-1}+\rho^2\varepsilon_{t-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

すなわち，

$$\mu_t=\sum_{r=0}^{\infty}\rho^r\varepsilon_{t-r}$$

である。ところで

$$E(\varepsilon_t)=0$$

であるから，μ_t の平均は，すべての t について

$$E(\mu_t)=0$$

となる。さらに，$E(\varepsilon_t\varepsilon_{t+s})=0$ $(s\neq 0)$ であるから，

$$E(\mu_t{}^2)=E(\varepsilon_t{}^2)+\rho^2E(\varepsilon^2{}_{t-1})+\rho^4E(\varepsilon^2{}_{t-2})+\cdots\cdots$$

また

$$E(\mu_t{}^2)=(1+\rho^2+\rho^4+\cdots\cdots)\sigma_\varepsilon{}^2$$

ゆえに，すべての t について，$|\rho|<1$ であるから

$$\sigma_\mu{}^2=\frac{\sigma_\varepsilon{}^2}{1-\rho^2}$$

が成立する。

また，

$$\begin{aligned}E(\mu_t\mu_{t-1})&=E[(\varepsilon_t+\rho\varepsilon_{t-1}+\rho^2\varepsilon_{t-2}+\cdots\cdots)\\&\qquad\times(\varepsilon_{t-1}+\rho\varepsilon_{t-2}+\rho^2\varepsilon_{t-3}+\cdots\cdots)]\\&=E\{[\varepsilon_t+\rho(\varepsilon_{t-1}+\rho\varepsilon_{t-2}+\cdots\cdots)](\varepsilon_{t-1}+\rho_{t-2}+\cdots\cdots)\}\\&=\rho E[(\varepsilon_{t-1}+\rho\varepsilon_{t-2}+\cdots\cdots)^2]\end{aligned}$$

$$=\rho\sigma_\mu{}^2$$

同様にして

$$E(\mu_t\mu_{t-2})=\rho^2\sigma_\mu{}^2$$

そして一般に

$$E(\mu_t\mu_{t-s})=\rho^s\rho_\mu{}^2$$

が成立する。これらの要素をすべて集めれば

$$E(\mu\mu')=\sigma_\mu{}^2\begin{pmatrix}1 & \rho & \rho^2\cdots\cdots\cdots\rho^{T-1}\\ \rho & 1 & \rho\ \cdots\cdots\cdots\rho^{T-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots\\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \rho^{T-3}\cdots\cdots\cdots 1\end{pmatrix}=\frac{\sigma_\varepsilon{}^2}{1-\rho^2}\begin{pmatrix}1 & \rho & \rho^2\cdots\cdots\cdots\rho^{T-1}\\ \rho & 1 & \rho\ \cdots\cdots\cdots\rho^{T-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots\\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \rho^{T-3}\cdots\cdots\cdots 1\end{pmatrix}$$

⑨　例えば Dhrymes〔4，P.50〕を参照。

⑩　ベクトル $\mu_i(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ は各々で T 個づつのサンプリングが行われる。

μ_i の要素間に自己相関が存在すると，μ_i 間の相互独立性はなくなる。

⑪　Dhrymes〔4〕pp. 52—58．参照。

6 むすび

外生要因のランダム変動が経済システムに加わり，経済変数間の関係（構造）を一定不変ではなく，時の経過と共に変化するという観点から時変パラメーター回帰モデルが定式化される。本稿では，パラメーター（回帰係数）がランダム・ウォーク過程にしたがうと仮定した時変回帰係数モデルを提示した。また本稿のモデルは，撹乱項を回帰式に付加するのでなく，それが回帰係数を変動させるものとした。

回帰係数が非定常過程にしたがう確率変数と仮定したので，尤度関数を定義することが不可能となり，$\{\beta_t\}$ 過程の $T+1$ 期の値 β_{T+1} に限定して回帰モデルを書き替えて尤度関数を定義した。またこの場合に，ランダム・ベクトル μ の要素は一次の自己回帰過程にしたがって変動すると仮定

した。

しかし，ランダムウォーク時変回帰係数モデルは，そのパラメータの最尤推定量の漸近特性が悪いことが問題点である。

附＝最尤推定量の漸近特性①

相互に独立に同一分布するサンプル列ベクトルを $y_i(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$, そのサンプル行列を Y で表わし，またパラメーター・ベクトルを θ で表わす。さらに，尤度関数を $L(Y;\theta)$, 密度関数を $f(y_i;\theta)$ で表わす。

なお，本稿のケースに於て，サンプリングの仕方は，タイム・スパン T で1セットの時系列サンプル（列ベクトル），$y_1=(y_1, y_2\cdots\cdots, y_T)'$, $T+1$ の時点からスパン T で $y_2=(y_1, y_2\cdots\cdots y_T)'$, ……，$(n-1)T+1$ の時点からスパン T でサンプル列ベクトル $y_n=(y_1, y_2, \cdots\cdots, y_T)'$ をとることになる②。したがって，$n\to\infty$ は $T\to\infty$ となる。

尤度関数 $L(Y;\theta)$ と対数尤度関数 $\log L(Y;\theta)$ については，

$$\left.\begin{aligned} L(Y;\theta)&=\prod_{i=1}^{n} f(Y_i;\theta) \\ \log L(Y;\theta)&=\sum_{i=1}^{n}\log f(y_i;\theta) \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{A}-\mathbf{1})$$

が成立する。

以下では，次の(1)〜(3)の条件の下で，最尤推定量の漸近特性（一致性と漸近的正規性）を示す。

条件(1)　密度 $f(\quad)$ はパラメーター・ベクトル θ について三次導関数まで存在する。これはすべての $y_i(i=1\cdots\cdots n)$, また真のパラメーター・ベクトル θ_0 が含まれる空間 A に属しているすべての θ について成立する。

条件(2)　対数尤度関数 $\log L(Y\,;\,\theta)$ の θ についての微分，$\partial \log L(Y\,;\,\theta)/\partial\theta$，は次式を与える。

$$\int \frac{\partial \log L(Y\,;\,\theta)}{\partial\theta} L(Y\,;\,\theta)dY=0 \tag{A—2}$$

$$\mathrm{cov}\left(\frac{\partial \log L(Y\,;\,\theta)}{\partial\theta}\right)=-E\left[\frac{\partial^2 \log L(Y\,;\,\theta)}{\partial\theta\,\partial\theta'}\right] \tag{A—3}$$

ここで，Y は i 番目の列が y_i の行列であるから，dY は dy_{11}，$dy_{12}\cdots\cdots dy_{1n}$，$dy_{21}\cdots dy_{2n}\cdots dy_{Tn}$ の省略形であり，また積分記号は $_{T}n$ 空間にわたる積分を行なうことを示す。

（A—2）と（A—3）は次のようにして成り立つ。まず $\{y_i : i=1,\cdots\cdots,n\}$ はランダムであるから，

$$\int L(Y\,;\,\theta)dY=1$$

である。この両辺を θ について微分すると，

$$\int\left(\frac{\partial \log L(Y\,;\,\theta)}{\partial\theta}\right)L(Y\,;\,\theta)dY=0 \tag{A—4}$$

が得られる。（A—4）はより簡単に

$$E\left[\frac{\partial \log L(Y\,;\,\theta)}{\partial\theta}\right]=0 \tag{A—5}$$

と表わせる。

さらに，（A—4）を θ について微分すると，

$$\int\left\{\left[\frac{\partial^2 \log L(Y\,;\,\theta)}{\partial\theta\,\partial\theta'}\right)L(Y\,;\,\theta)+\left(\frac{\partial \log L(Y\,;\,\theta)}{\partial\theta}\right)\times \left(\frac{\partial \log L(Y\,;\,\theta)}{\partial\theta}\right)' L(Y\,;\,\theta)\right\}dY=0 \tag{A—6}$$

ここで，$[\partial^2 \log L(Y\,;\,\theta)/\partial\theta\,\partial\theta']$ は $\log L(Y\,;\,\theta)$ の θ についての二次導関数行列（$k\times k$）であり，また $(\partial \log L(Y\,;\,\theta)/\partial\theta)$ は $\log L(Y\,;\,\theta)$ の θ についての一次導関数列ベクトルである。

$\partial \log L(Y;\theta)/\partial\theta$ はランダム変数のベクトルであるから，（A—5）と（A—6）から，

$$\operatorname{cov}\left(\frac{\partial \log L(Y;\theta)}{\partial\theta}\right)=-\int\left[\frac{\partial^2 \log L(Y;\theta)}{\partial\theta\,\partial\theta'}\right]L(Y;\theta)dY$$

$$=-E\left[\frac{\partial^2 \log L(Y;\theta)}{\partial\theta\,\partial\theta'}\right] \qquad \text{(A—7)}$$

が得られる。

条件(3)　$\log f(\quad)$ の三次導関数は有界，わすなち

$$\left|\frac{\partial^3 \log +(y;\theta)}{\partial\theta_r\partial\theta_j\partial\theta_r}\right|<H_r(y) \qquad \theta\in A \qquad \text{(A—8)}$$

また $H(y)$ については

$$\int H(y)\,f(y;\theta)dy<M \qquad \theta\in A \qquad \text{(A—9)}$$

であり，M は定数（$M>0$），すなわち $E\{H(y_i)\}$ が存在する。

＜一致性＞

真のパラメーター・ベクトルを θ_0 として，尤度方程式 $\partial\log L/\partial\theta=0$，$\theta\in A$，を $\theta=\theta_0$ のまわりにテーラー展開すると，

$$\log L(Y;\theta)=\sum_{i=1}^{n}\log f(y_i;\theta)$$

であるから，

$$\frac{\partial \log f(y_i;\theta)}{\partial\theta}=\left(\frac{\partial \log f(y_i;\theta)}{\partial\theta}\right)_{\theta_0}+\left(\frac{\partial^2 \log f(y_i;\theta)}{\partial\theta\,\partial\theta'}\right)_{\theta_0}(\theta-\theta_0)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 \log f(y_i;\theta)}{\partial\theta\,\partial\theta\,\partial\theta}\right)_{\bar\theta}(\theta-\theta_0)(\theta-\theta_0)' \qquad \theta_0<\bar\theta<\theta$$

したがって，尤度方程式は（両辺を n で除し），

$$\frac{1}{n}\ \frac{\partial \log L(Y;\theta)}{\partial\theta}=B_0(Y)+B_1(Y)(\theta-\theta_0)$$

$$+ZB_2(Y)(\theta-\theta_0)(\theta-\theta_0)'=0 \qquad \text{(A—10)}$$

となる。ここで $Z=(\xi_1\cdots\cdots,\xi_n)$ の各要素は $|\xi|<1$ である。また，B_0

(Y)，$B_1(Y)$ および $B_2(Y)$ は次のようなランダム変数である。

$$\left.\begin{aligned} B_0(Y)&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \log f(y_i\,;\,\theta)}{\partial\theta}\right)_{\theta_0} \\ B_1(Y)&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 \log f(y_i\,;\,\theta)}{\partial\theta\,\partial\theta'}\right)_{\theta_0} \\ B_2(Y)&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}H(y_i) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A—11)}$$

Y は相互に独立に同一分布にしたがうランダム・ベクトル y_i から成る。その尤度 $L(Y\,;\,\theta)$ はランダムとなるので，対数尤度 $\log L(Y\,;\,\theta)$ の導関数はランダムである。したがって，$\log f(y_i\,;\,\theta)$ の導関数もランダム変数で，それぞれ独立に同一分布にしたがっている。（A—11）は，$B_0(Y)$，$B_1(Y)$ および $B_2(Y)$ は相互独立に同一分布にしたがう n 個のランダム変数の平均であることを示している。

大数の強法則によれば，それ等はランダム変数である $\log f(y_i\,;\,\theta)$ の導関数の平均値に確率1で漸近的に収束することになる。

$B_0(Y)$ の場合，各要素の平均値は零，わすなち，

$$\int\left(\frac{\partial \log f(y\,;\,\theta)}{\partial\theta}\right)_{\theta_0} f(y\,;\,\theta_0)dy=0 \qquad \text{(A—12)}$$

である。これは（A—4）において，$n=1$ としたとき $L(\ )$ と $f(\ )$ が一致することから導出される。同様にして，$B_1(Y)$ の各要素は（A—7）から有限な平均値 $R(\theta_0)$ をもつ。なお $R(\theta_0)$ は

$$R(\theta_0)=-\int\left(\frac{\partial^2 \log f(y\,;\,\theta)}{\partial\theta\,\partial\theta'}\right)_{\theta_0} f(y\,;\,\theta)dy \qquad \text{(A—13)}$$

となる。

また $B_2(Y)$ の要素 $H(y_i)$ は（A—8）と（A—9）から，零と M の間にその平均値をもつことになる。この平均値を M の非負関数として表わ

す。以上から，

$$\underset{n\to\infty}{P\lim} B_0(Y)=0, \quad \underset{n\to\infty}{P\lim} B_1(Y)=R(\theta_0) \qquad \underset{n\to\infty}{P\lim} B_2(Y)=\Lambda M$$

$$\Lambda=(\lambda_1\cdots\cdots\lambda_n), \quad 0\leq\lambda_i<1 \tag{A—14}$$

のような結果が導出される。

ここで，$\theta=\theta_0\pm\triangle$，$\triangle=(\delta_1\cdots\cdots\delta_k)'$，$0<\delta_i<1$ とすると（A—10）は，

$$B_0(Y)\pm\triangle B_1(Y)+\frac{1}{2}\triangle\triangle' ZB_2(Y)=0 \tag{A—15}$$

となる。nを十分大きくとり，δを任意に小さな値とすることにより，（A—15）第一項は零，第三項は任意に小さくすることができる。二次微分 $\partial^2\log L(Y;\theta)/\partial\theta\partial\theta'$ が存在するから，尤度方程式 $\partial\log L/\partial\theta=0$ は根（$\hat{\theta}$）をもち，その根は（$\hat{\theta}$ の要素について）n が十分大きく，δ が任意に小さな値の場合，任意に高い確率で，$\theta_0\pm\delta$ の範囲内にある。これは根（最尤推定量）の一致性を示す。

<漸近的正規性>

尤度方程式 $\partial\log L(Y;\theta)/\partial\theta=0$ の根を $\hat{\theta}$ とし，$\partial\log L(Y;\theta)/\partial\theta$ を θ_0 のまわりにテーラー展開すると，

$$\frac{\partial\log L(Y;\theta)}{\partial\theta}=\frac{\partial\log L(Y;\theta_0)}{\partial\theta}+\frac{\partial^2\log L(Y;\theta_0)}{\partial\theta\,\partial\theta'}(\hat{\theta}-\theta_0)+\text{剰余} \tag{A—16}$$

を得る。また“剰余”のベクトルの h 番目の要素は次の形式をなしている。

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial^3\log L(Y;\bar{\theta})}{\partial\theta_h\,\partial\theta_j\,\partial\theta_r}(\hat{\theta}_r-\theta_{0r})(\hat{\theta}_j-\theta_{0r})$$

ここで，$|\theta-\theta_0|<|\theta-\theta_0|$ である。また，例えば $\partial\log L(Y;\theta_0)/\partial\theta_h$ という表示は，$\log L(Y;\theta)$ についての，真のパラメーター θ_0 で数値を求めたベクトル θ の h 番目の要素に関する導関数であることを示す。

条件(3)から，

$$\left|\frac{\partial^3 \log(Y\,;\,\bar{\theta})}{\partial\theta_h\,\partial\theta_j\,\partial\theta_r}\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^3 \log f(y_i\,;\,\bar{\theta})}{\partial\theta_h\,\partial\theta_j\,\partial\theta_r}\right|\leq\sum_{i=1}^{n}H_h(y_i) \qquad (\text{A}-17)$$

を得る。さらに，$E[H(y_i)]$ が存在する。また θ_0 の推定量としての $\hat{\theta}$ が一致性をもつことから（$\hat{\theta}-\theta_0$ が零に収束する），剰余ベクトルの h 番目の要素は零に確率収束する。したがって剰余ベクトルは省くことができる。

（A—16）に戻って，$\hat{\theta}$ は最尤推定量であるから，同式は零に等しいこととなり次のように書き直せる。

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{\log L(Y\,;\,\theta_0)}{\partial\theta}=-\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \log L(Y\,;\,\theta_0)}{\partial\theta\,\partial\theta'}\,\sqrt{n}\,(\hat{\theta}-\theta_0) \qquad (\text{A}-18)$$

また，

$$\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \log L(Y\,;\,\theta_0)}{\partial\theta\,\partial\theta'}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \log f(y_i\,;\,\theta_0)}{\partial\theta\,\partial\theta'} \qquad (\text{A}-19)$$

が成立し，（A—19）は対数尤度関数の二次導関数が，相互に独立で同一分散にしたがう n 個のランダム変数（対数密度関数の二次導関数）の和であることを示している。なお，この対数密度関数の二次導関数の平均値は次のように与えられる。

$$E\left[\frac{\partial^2 \log f(y\,;\,\theta_0)}{\partial\theta\,\partial\theta'}\right]=R(\theta_0) \qquad (\text{A}-20)$$

大数の強法則を適用すれば，$\dfrac{1}{n}\,\dfrac{\partial^2 \log L(Y\,;\,\theta)}{\partial\theta\,\partial\theta'}$ は $R(\theta_0)$に確率 1 で漸近的に収束する。

ところで，

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{\partial L(Y\,;\,\theta_0)}{\partial\theta}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial \log f(y_i\,;\,\theta_0)}{\partial\theta}\right] \qquad (\text{A}-21)$$

であるから，（A—21）左辺は相互独立で（A—22）のような平均，共分

散行列をもつ同一分布にしたがうランダム・ベクトルの和である。

$$E\left[\frac{\partial \log f(y\,;\,\theta_0)}{\partial\theta}\right]=0 \qquad \mathrm{cov}\left[\frac{\partial \log f(y\,;\,\theta_0)}{\partial\theta}\right]=-R(\theta_0) \tag{A—22}$$

中心極限定理③により $(1/\sqrt{n})\,\partial L(Y\,;\,\theta_0)/\partial\theta$ の漸近分布は $N[0,\ -R[\theta_0)]$ である。

（A—18）から $\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta_0)$ は次のようなランダム変数の比である。

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta_0)=\frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{\log L(Y\,;\,\theta)}{\partial\theta}\Big/-\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \log L(Y\,;\,\theta_0)}{\partial\theta\,\partial\theta'} \tag{A—23}$$

（A—23）右辺分子は漸近的に $N[0,\ -R(\theta_0)]$ にしたがい，分母は定数 $R(\theta_0)$ に収束するから，$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta_0)$ は漸近的に $N[0,\ -R(\theta_0)]$ にしたがうランダム変数である。

注

① ここでの展開のために，Dhrymes〔5, chap. 3〕および Theil〔11, chap. 8〕を参考にした。

② 本稿のケースはサンプル数が唯一（$n=1$）である。

③ 中心極限定理については，例えば Dhrymes〔5, pp. 100—109〕を参照。

参 考 文 献

〔1〕 Anderson, T. W., An Introduction to Multivariate Statistical Analysis, John Wiley, 1958.

〔2〕 Cooley, T. F. and E. C. Prescott, "An Adaptive Regression Model," International Economic Review, 14 (1973), 364—371.

〔3〕 Cooley, T. F. and E. C. Prescott, "Estimation in the Presence of Stochastic Parameter Variation," Econometrica, 44 (1976), 167—184.

〔4〕 Dhrymes, P. J., "Efficient Estimation of Distributed Lags with Autocorrelated Errors," International Economic Review, 10(1969), 47—67.

〔5〕 Dhrymes, P. J., Econometrics, Harper and Row, 1970.

〔6〕 Johnston, J., Econometric Methods, 2nd ed., McGraw-Hill, 1963.

〔7〕 Judge, G. G., W. E. Griffiths, R. C. Hill and T. C. Lee, The Theory and Practice of Econometrics, John Wiley, 1980.

〔8〕 Rosenberg, B., "The Analysis of a Cross Section of Time Series by Stochastically Convergent Parameter Regression," Annals of Economic and Social Measurement, 2 (1973) 399—428.

〔9〕 Sant, D. T., "Generalized Least Squares Applied to Time Varying Parameter Models," Annals of Economic and Social Measurement, 6(1977), 301—311.

〔10〕 Sarris, A. H., "A Bayesian Approach to Estimation of Time-Varying Regression Coefficients," Annals of Economic and Social Measurement, 2 (1973), 501—523.

〔11〕 Theil, H., Principles of Econometrics. North-Holland, 1971.

〔12〕 Tsurumi, H. and T. Shiba, "On Cooley and Prsscott's Time Varying Parameter Model," The Economic Studies Quarterly, XXXII, 2(1981), 176—180.