中国における乗算法の起源

鈴　木　久　男

目　次

一　幼稚な乗法——累加と二倍法

十七世紀末ごろの韓国で刊行された崔錫鼎（サイヨウテイ）①の著になる『九数略』②甲巻に「乗除源流」の項がある。

乗法生於累加　列元法如乗式先下法数於中格一次減元数一又下法数一次再減元数一如是者若干次準元数而止中格得実積元数減尽。

題数用歩乗首問

以十二為元以三十為法以法累加之輙減元数到三次則実数得九十元数減三存九到十二次則元数減尽実積得三百六十

右累加。

題数同前

以法累加之如前式二次実数得六十元数減二存一十　次求乗位如一月為三十日則十月之為三百可知故法進一位以法加六十之左元数減一十合問　右定位累加。

と説明があり、二つの図が示されている。

元			𝍨
積		𝍱	
法		𝍫	○

元		𝍩	○
積	𝍢	𝍮	
法	𝍢		

（解）

実			9
積		9	0
法		3	0

実		1	0
積	3	6	0
法	3	0	0

これは算木[3]による計算法を示したもので、元は実（被乗数）。法は乗数、積は答を表わしている。十二に三十を乗ずる方法として累加と定位累加の二つの方法があることを例示している。その計算法は、

（累加）

12×30＝360

(1)

元	1	2
積		
法	3	0

↓

(2)

元	1	1
積	3	0
法	3	0

↓

(3)

元	1	0
積	6	0
法	3	0

↓

(4)

元		9
積	9	0
法	3	0

のように、元数一を減ずる毎に法数三十を積のところへ累加して行き、元数が無くなったら答となることを説明している。

(2)定位累加　前のようにやるのだが、

（定位累加）

12×30＝360

(1)

元		1	2
積			
法		3	0

↓

(2)

元		1	1
積		3	0
法		3	0

↓

(3)

元		1	0
積		6	0
法		3	0

↓

(4)

元			
積	3	6	0
法	3	0	0

元数が(3)のように十となったら〝法を一位進め、以て法を六十の左に加え、元数一十を減じ〟とあるから(4)のようになる。

答は累加、定位累加いずれも三六〇となる。

このような累加による方法は中国の十六世紀の珠算算書群に④ある二句字訣と同一のものである。例えば『算法統宗』⑤では

有除隔位進　無除挨身進

　隔一位除也　只用一原法而無倍折数

但因乗従実尾位起除一　　隔一位而加原法数也

と説明がある。

（二句字訣）　$7 \times 64 = 448$

実	積
7	
－1	＋64
－1	＋64
－1	＋64
－1	＋64
－1	＋64
－1	＋64
－1	＋64
0	448

実七をおき一を減ずる毎に、別のところへ六十四を累加して行く。実が零になったときは積は四四八になっているはずである。

『九数略』に述べられた計算法二つが、乗除源流のところにあることから考えると、乗法の起源は累加からはじめられていると理解して差し支えないのではないか　とも考えられるが如何であろうか。

累加をさらに進歩させたのが金蟬脱殼(キンセンダツコク)法である。その乗法（金蟬乗法）を『数学通軌(スウガクツウキ)』（一五七八）から引用してみよう。

不用九字相生之数、但置一箇原法、又一箇倍法、只云除二加倍去一還元、又云起一加原法加之、起二如倍法加之、如米一石価六銭四分、将米為実、以六銭四分為法、又另置一箇倍法、得一両二銭八分、呼云起一加六四、起二加一二八、只此二句以代乗法、皆従実後置数、次第因而加之、又云、呼加隔位、言十加次位、不畳本位也。

例題でこれを解釈してみよう。七に六十四を掛けるとき、法に六四と二倍の一二八を置く、実を置き二を取れば一二八、一を取れば六四を積に加える。

（金蟬脱殼）

7×64＝448において

実	積	法
7		64.128
−2	128	
−2	128	
−2	128	
−1	164	
0	448	

かくて実が〇になったとき答が得られる。

いずれの方法も乗法といえるものではなくて、加算の繰り返しにしか過ぎない。が、しかしライプニッツ⑥の計算機（一六七一）もまた加算を繰り返して乗除算を行なえるものを作っているし、ローマのアバクス派の計算法も累加、二倍法によっている。⑦⑧

電子計算機も二進法による乗除（乗法は加算の繰り返し、除法は補数応用の加算、結局は加算）を行なっている。

累加、二倍法はまさに乗法の起源ともいえる。

注

① 朝鮮人名辞書によれば顕宗辛亥（一六七一年）に文科に登った人であるという。
② 四巻、京城延禧専門学校所蔵本を影写したものが東北大学にある。平山諦博士によって青焼されたものを所蔵している。
③ 算木は日本での呼称で、中国では籌とか籌策、算籌などと呼ばれていた。算盤（そろばん）以前の計算器。
④ 例えば呉敬信民の『九章詳註比類算法大全』（一四五〇）徐氏心魯訂正の『盤珠算法』（一五七三）柯尚遷の『数学通軌』（一五七八）程大位思甫の『算法統宗』（一五九二序）など。
⑤ 朱世傑の『算学啓蒙』（一二九九）とともに、日本の数学に与えた影響のもっとも大なるもの。
⑥ **G. W. Leibniz (1646~1716)**
⑦ **René Taton : Histoire du Calcul.** 小堀　憲訳『算法の歴史』　文庫クセジュ　白水社刊
アバクス派の〈計算規則〉はエジプトの算術の基本演算——加法、減法、二倍、二による除法、乗法および除法——の研究の産物である。同書八五頁。
⑧ ローマの溝そろばんと中国の算盤との関係を述べたものに「中国におけるそろばんの起源」がある。『珠算算法の歴史』山崎与右衛門、戸谷清一、鈴木久男共著　森北出版株式会社　昭和三十三年　一頁~四十三頁参照。

二　古代の乗法——三段から二段布算へ——

乗算の計算方法のもっとも古い記録は唐代（六一八~九〇七）の明算科の教科書[1]として採用されたものの一つである『孫子算経』である。孫子がいつごろの人であるかは明らかでない。[2]が戦国時代の兵法家孫武ではない。

この巻上に

凡乗之法重畳其位上下相観上位有十歩至十有百歩至百有千歩至千以上命下所得之数列於中位言十即過不満自如上位

乗訖者先去之下位乗訖者則俱退之六不積五不隻上下相乗至尽而已。

と説明があって、③

九九八十一自相乗得幾何　答曰六千五百六十一

術曰重置其位以上八呼下八　八八六十四即下六千四百於中位以上八呼下一　一八如八即於中位下八十退下位一等収上位八十以上位一呼下八　一八如八即於中位下八十以上一呼下一　一一如一即於中位下一上下位俱収中位即得六千五百六十一。

文意に従って解説してみよう。下にするというのは布算するという意味である。

実（被乗数）を上に、法（乗数）を下に置く。

積（答）を中に入れてゆく。

（三段布算）

81×81＝6561

上			8	1
中				
下			8	1

(1)

実は上に、法を下に重ねておく。

上			8	1
中				
下		8	1	

(2)

実の頭に法の末位がくるようにする。

上			8	1
中	6	4	8	
下		8	1	

(3)

実の８×法の80
実の８×法の１

上				1
中	6	5	6	1
下			8	1

(4)

実の１×法の80
実の１×法の１

便宜上、算用数字で示したが、当時は算木を用いて布算（計算）したのである。

唐代の明算科の教科書として用いられたものに『夏侯陽算経』がある。夏侯陽の著で、李儼によれば韓延から⑤伝えられたものに、韓延の説を入れて出来たという。銭宝琮は五世紀以前としている。⑥

いずれにせよ、孫子算経以後間もなく計算法の簡略化がなされた。原文を引用してみよう。

巻上　明乗除法のところに

夫乗除之法先明九九　一従十横百立千僵千十相望万百相当満六己上五在上方六不積算五不単張⑦　上下相乗実居中央言十自過不満自当　以法除……以下略。

上下相乗して実は中央に居る。十といえば自ら過ぎ、満たざれば自ら当る。とあるから、その計算法はつぎのようにしたのである。（次頁参照）

(a)法は頭から掛ける方法を（従頭X因）

(d)法は尾から掛ける方法（従下X因）

を示しており、九九が二桁になるもの（例えば二九十八の如き。十といえばがこれに当る）については〝自ら過ぎ〟（その位を身とするから一桁上から置き）、九九を呼んで一桁のもの（算例の如く二三六の如き。満たざればがこれに当る）は〝自ら当る〟（その身に置く）としたのである。

因と乗の区別もこの書にしてある。一桁の乗法を因、二桁以上を乗と区別しており、初見と思われる。

巻中の例題解に「隔位加二」「七添」「添七」「二七因」「七因折半」「添四四」「減一」などがある。いずれも計算の

（二段布算）

123×３＝369において

(a)

	(1)	(2)	(3)	(4)
上	1 2 3	3 2 3	3 6 3	3 6 9
下	3	3	3	3
	数をおく	1 × 3 = 3 1 を 3 に直す	2 × 3 = 6 2 を 6 に直す	3 × 3 = 9 3 を 9 に直す

(b)

	(1)	(2)	(3)	(4)
上	1 2 3	1 2 9	1 6 9	3 6 9
下	3	3	3	3
	数をおく	3 × 3 = 9 3 を 9 に直す	2 × 3 = 6 2 を 6 に直す	1 × 3 = 3 1 を 3 に直す

簡略化を計ったもので、

隔位加二　$a\times102=(a\times100)+(a\times2)$

七添，添七　$a\times17=(a\times10)+(a\times7)$

二七因　$a\times14=a\times2\times7$

七因折半　$a\times35=a\times7\div2$

添四四　$a\times144=(a\times100)+(a\times44)$

減一　$a\times9=(a\times10)-(a\times1)$

の如く行なう。法の頭が一、十、百などの場合には、その頭の一を省いてそれ以外のものを掛けて加えればよいわけで、現代の珠算計算法では加乗法または省一乗法と呼ばれている算法である。算木なればこそ計算の省略化、迅速化に結びついたものである。

以上の計算法は『楊輝算法』（一二七四）によって、単因（上からと、下から掛けて行くのとの二法があった）、重因（因数分解することによって一桁のかけ算となった）身外加（法首一の場合）、損乗と名づけられている。

三段布算から二段布算への改革は大変革であった。算木によるこの改革がやがてそろばんへの応用となったからである。上下二段での計算が可能であれば左右布算の計算もまた可能である。かくて二段布算の算木による計算が、左右対象の算盤による計算に引継がれて算盤流行の時代を迎えるに至ったのである。⑧

注

① 李儼『中国算学史』一九三七年に「唐代算学制度」があり、唐六典巻二十一 称「算学博士掌教文武官八品以下、及庶人子之為生者、二分其経、以為之業、習九章、海島、孫子、五曹、張丘建、夏侯陽、周髀十有五人、習綴術、緝古十有五人、

其記遺、三等数亦兼習之、孫子、五曹、共限一年業成、九章、海島共三年、張邱建、夏侯陽各一年、周髀、五経算共一年、綴術四年、緝古三年……がある。

② 李儼『中国算学史』二四頁 一九三七

同書の訳本は『支那数学史』島本一男（シマモトカズオ）藪内（ヤブウチ） 清（キヨシ）訳 生活社 昭和十五年。李儼によると、孫子算経は清朝の戴震（タイシン）は漢明帝（五八〜七五）以後の人の作と断定し、阮元（ゲンゲン）は漢以後の人に擬している。

藪内清の『中国の数学』（岩波新書 一九七四）には銭宝琮（センホウソウ）（中国の数学史家）が四〇〇年ごろの書物としていることを述べているのは彼（タイシン）の『中国数学史』一九六四年の七五頁以降によったものであろう。

③ 算経十書 (三)戴震校 万有文庫 二〜四頁による。

④算木はマッチの棒を太くしたようなもので𝍠𝍡𝍢𝍣𝍤と縦に並べて1 2 3 4 5

𝍥𝍦𝍧𝍨 と横に一本を入れて6 7 8 9 横に並べて𝍩 𝍪 𝍫 𝍬 𝍭 10 20 30 40 50

𝍮𝍯𝍰𝍱と縦一本を上に置くと60 70 80 90 従って𝍠𝍡𝍢𝍣𝍤𝍥𝍦𝍧𝍨1 2 3 4 5 6 7 8 9

𝍩𝍪𝍫𝍬𝍭𝍮𝍯𝍰𝍱10 20 30 40 50 60 70 80 90

となり百〜九百は一〜九と同じ、千〜九千は十〜九十と同じように並べる。布算とは算を布くという意味で、計算を意味する。

⑤ 戴震は韓延を隋初の人と考えているといい、夏侯陽を後魏（ともに六世紀）の人と擬定している。李儼『中国算学史』二五頁。

⑥ 銭宝琮『中国数学史』七九頁によれば、五世紀の張邱建算経の自序文に夏侯陽之方倉、孫子之蕩などと出てくるのだから夏侯陽算経の著述年代は張邱建以前だとするのである。

⑦ 算木の置き方を述べた部分で、(4)のことをいっている。

⑧ 「器具による乗除計算法の歴史」『珠算思汐』創刊号 山崎・戸谷・鈴木 昭和三十五年十月
山崎与右衛門編『東西算盤文献集』第二輯 昭和三十七年三月 森北出版株式会社 所収。

三　求一乗法への発展

法（乗数）の首位が一である場合に、計算の省略化を計って登場した身外加法は、やがて求一乗法へと発展する。

すなわち、乗数を加工して省一乗法が行なえるように変換するのである。例えば、

(1)　432×24＝(432×2)×(24÷2)＝864×12

(2)　432×48＝(432×4)×(48÷4)＝1728×12

(3)　432×64＝(432÷2)×(64×2)＝216×128

とする。こうすれば乗数の首位一を省いて、(1)は添二、②も添二、(3)は添二八と計算できるわけである。

一組		二組	
孫子・五曹	一年	綴術	四年
九章・海島	三年	緝古	三年
張邱建	一年		
夏侯陽	一年		
周髀・五経	一年		

この計算法がいつごろから行なわれるようになったのかは明らかでない。というのは、唐代、明算科の教科書として用いられた、上記の十部の算経（現在これを『算経十書』と呼ぶ）以後、宋の秦九韶（シンキュウショウ）の『数書九章』（一二四七）、金の李冶（リヤ）の『測円海鏡（ソクエンカイキョウ）』（一二四八）『益古演段（エキコエンダン）』（一二五九）、宋の楊輝の算法書までの間に計算法を記した著述の記載があるが、[2]大部分が失われてわからないからである。失われた書の中に増成とか求一とか、見一とかの書名が残っているのは気がかりである。というのは、数学書ではないが沈括（チンカツ）（一〇三一〜一〇九五）の『夢溪筆談（ムケイシツダン）』（一一六六）[3]巻十八に、

算術多門如求一上駆塔因重因之類皆不離乗除唯増成一法稍異其術都不用乗除但補虧就盈而已　云云の記載がある。

上駆、塔因がどんな計算法か皆目わからないが、求一、重因は乗算法で、求一はこの章で取り上げている計算法、重因は前章で述べた因数分解による一桁の計算法であることは確実である。増成一法は除算法で九帰法（一桁の歌訣利用の割算法、日本の八算）の前身である。このように見ると、求一という名のついた算書は『夢溪筆談』と同様に考えてよいと思われる。

楊輝(ヨウキ)の『乗除通変算宝巻中(ジョウジョツウヘンサンボウマキチュウ)』（一二七四）には「求一代乗除説」の項があり、つぎのような説明がある。

求一乗、曰五六七八九倍之数不走　二三須当半　遇四両折倍折　本従法実即反其有（倍法必折実、倍実必折法）用加以代乗　其数足可守。

つまり、乗数（法数）の頭が五六七八九なら二倍すれば法首が一になる。法数の頭が二三なら半分にすれば法首が一になる。四ならば二度半分するか、二度倍すれば法首が一になるから、加（添と同じ、身外加のこと）を用いて乗に代える。しかし法を倍したら実を半分にし、実を倍にしたら必らず法を半分にせよと注意したものである。

算例では、④

$$237\times56=13272=(237\div2)\times(2\times56)=1185\times112$$

とし加一二を説明している。

注

① 二の(1)参照。
② 李儼の『中国算学史』には四五頁、八七頁以降に、新唐書、宋史、崇文総目に『江本一位算法』新唐書、宋史に、陳従運『得一算経』宋の紹興年間の秘書省続編到四庫書目に『求一算術歌』『乗除算例』宋史芸文志に李紹穀『求一指蒙算術玄要』徐仁美『増成玄一算経』任弘済『一位算法問答』『法算口訣』『五曹乗除見一捷例算法』『求一算法』『解法求一化零歌』などが記されている。
③ 一般に推定されている刊年、ただしこの刊刻本は失なわれており一三〇五年本が一九七五年に復刻されている。北京　文物出版社刊。
④ 求一草曰　倍法倍五十六為一百一十二　折実折総銭数折作一百一十八五加一二合間と述べている。

四　楊輝の相乗六法

楊輝の『乗除通変算宝巻上』（一二七四）に『相乗六法（ソウジョウロッポウ）』がある。

一曰　単因　二曰　重因　三曰　身前因　四曰　相乗　五曰　重乗　六曰　損乗

このうち単因、重因、損乗については既にその計算法が楊輝以前に紹介されているが（孫子、夏侯陽算経）算法名の記載はこの書がはじめである。

単因（タンイン）　法曰置衆位為実陰記単位為法　従上位因起　言十過身言如就身改之。

いわゆる一桁のかけ算である。①法数は一桁だから陰記（暗記）して、置かず、実の上位（頭）からかけていく。

重因（ジュウイン）　術曰法数如九九合数者則重因。（謂六十三用七因九因　如四十八用六因八因）

法数を因数分解して一桁のかけ算として行なうものである。

身前因（自謂十一至十九可於十後加零而十即一也　向二十一至九十一不可於身前用因乎）術曰置実数為身以一前之数於身前如因法求之言如身前布位言十身前二位下記。

法数が二十一とか三十一とか四十一というように一がつく場合には、その一を省いて、二十、三十、四十倍したものを身前に加えればよい。そうすると一桁のかけ算になってしまう。現在われわれが減一乗法と呼んでいる算法である。この書の例題を上に解説してみよう。

（身　前　因）

234×41＝9594において

$$
\begin{array}{rl}
\boxed{2\ 3\ 4} & \\
+8 & \cdots\cdots\text{二四が八} \\
+1\ 2 & \cdots\cdots\text{三四十二} \\
+1\ 6 & \cdots\cdots\text{四四十六} \\
\hline
9\ 5\ 9\ 4 & \quad\text{とする。}
\end{array}
$$

∴234×41＝234×40＋234

相乗

術曰　実位居上法位居下以法尾頂実首位（非頂首位是頂所乗位也）詳尾位之数以定其実法実相因言十過法身言如対法身臨了就実身。詳解有注。と説明がある。

実を上に、法を下に置き、法の終りと実の頭とが相対するように法を進める。法の終りの数を詳としてその実を定める。法と実を掛けて十がつけば法の位の一つ前に、がのつくもの（二四が八のように）は法の位に対して積をおき、最後の積は実の数を変化して改める。としたものである。詳解に注有りとあるのは、楊輝の一二六一年の著のことであるが今はない。この書の内容は永楽大典の算書（一四〇四）から五問、諸家の算法から二問が知られている。

重乗

術曰　乗位繁者約為二段作二次乗之庶幾位簡而易乗自可無誤也。と説明がある。

例題に三八三六七に二三一二一を乗ずる問題がある。法数二三一二一を約分す

る。九で約しさらに七で約す。三六七になるがこれ以上約し切れないから、実数三八三六七に三六七を乗じ一四〇八〇六八九、六十三乗して　答八八七〇八三四〇七を得るのである。

23121＝9×7×367＝63×367

38367×23121＝38367×367×63＝887083407

としたもので、考え方は重因と同じである。

損乗（ソンジョウ）

（即下乗也上乗②以生数下乗③即損数）術曰　九乗者損一（十去其一即九）八乗者損二（十去其二即八）七乗者損三（十去其三即七）六乗者損四　五乗者折半（折半是損五）四乗者損六　三乗者損七　二乗者損八　並自末位求起即下乗③也　是友用九帰之術。

と説明があり、二六四一〇に五十六を乗ずる例題を掲げている。

五六は七と八の因であるから七の場合に損三、八の場合に損二の計算を行なえばよい。いま七乗の場合だけを解説すると次頁の如くとなる。七の補数三をもって下から掛けて引いて行く。

前に紹介した夏侯陽算経の減一がこれに当る。下からかけるから下乗である。

（相　　乗）

247×736＝181792

実			$\boxed{二}$	四	七	
法	七	三	六			736×2＝1472
1	4	7	2	$\boxed{四}$	七	
		七	三	六		736×4＝2944
	2	9	4	4		
1	7	6	6	4	$\boxed{七}$	
			七	三	六	736×7＝5152
		5	1	5	2	
1	8	1	7	9	2	

（損　　乗）

26410×７＝184870のとき

法に $\boxed{3}$　実　２　６　４　$\boxed{1}$　０　をおく

				－	３	………一三が三
			－	１	２	…………三四十二
		－	１	８		………………三六十八
	－	６				…………………二三が六
１	８	４	８	７		

注

①　相乗六法の前に

指南算曰　衆位名乗（両位三位以上）単位名因（一位）がある。一桁のかけざんを因、二桁と三桁以上のかけざんを乗というのだと定義づけている。

②　上乗は実の頭から正数をかけ、下乗は実の終りから補数をかける。この書の「乗除加減用法」のところに

上乗、商除　用言如対身　言十過身

下乗、加減　用言十当身　言如下布

の説明がある。上乗すなわち実の頭からかけるときは十といえばその上の桁から、下乗すなわち実の終りからかけるときは十といえばその位からと教えている。なお乗除加減用法の加減は身外加、身外減すなわち現在われわれが省一乗法、省一除法のことを指しており、たし算、ひき算の意味ではない。

③　下乗は法一位のみに限らない。彼の『法算取用本末巻下』は「加因代乗三百題」として一から三百までの法数の各種簡略法を述べた書であるが、法数が二位以上の場合にもこの損乗を応用している。例えば

二九九　加三退七七

$a\times299=a\times13\times(100-77)$　$\therefore$　$13\times23=299$

とする如くである。

五　楊輝算法　算無定法ほか

楊輝の『乗除通変算宝巻中』にある。

因九九錯綜而有合数陰陽凡八十一句今人求簡止念四十五句余置不用算家惟恐無数可致豈有数不用者乎　嘗於日用詳解二集刊陰陽字分賓主共存之且問二十三四十六合数中素無者或三七五、一八七五為法捨相乗何以代之　原一百法載之後題剏此算無定法惟理是用已矣。

例題に二三七に二三を乗ずるものがある。

七退五三九　　七七に七を掛けて五三九
三退二三一　　七七に三を掛けて二三一
二退一五四　　七七に二を掛けて一五四

つまり二十三乗するのに、二十三の百に対する補数七十七を用いて、それに二、三、四、五、六、七、八、九をかけた数を用意しておき、実数から引いて答を得るのである。

例題はさらに二三七に三七五を乗ずるものにも及んでいる。

術曰……以斤求両価念法従尾損。
一求尅退六二五　二求尅退一二五
三求一八七五　　四求尅退二十五
五求三一二五是　六求除退三七五

（算無定法）

237×23＝237×（100－77）＝5451において

77×7＝539

77×3＝231

77×2＝154 であるから

	2	3	$\boxed{\text{七}}$			
		－	5	3	9	七退五三九と呼び700から539を引く
	2	三	1	6	1	
	－	2	3	1		三退二三一と呼び3161から2310を引く
	二	0	8	5	1	
－	1	5	4			二退一五四と呼び20851から15400を引く
		5	4	5	1	

（斤下留法）

237×375＝237×（1000－375）＝88875 において

7×375＝7（100－375）＝4375

3×375＝3（100－375）＝1875

2×375＝2（100－375）＝125

	2	3	$\boxed{\text{七}}$				
		－	4	3	7	5	七求四三七五と呼び7000から4375を引く
	2	$\boxed{\text{三}}$	2	6	2	5	
	－	1	8	7	5		三求一八七五と呼び32625から18750を引く
	$\boxed{\text{二}}$	1	3	8	7	5	
－	1	2	5				二求尅退一二五と呼び213875から125000を引く
		8	8	8	7	5	

七求四三七五退　八求就身退除五

これは楊輝の『日用算法』（一二六二）に既に述べられている算法で、斤と両との換算に用いられたもので「斤下留法」と呼ばれている。

1÷16=0.625　2÷16=0.125　3÷16=0.25

を念法暗記させたものである。前頁に計算例を示す。

楊輝はさらに、『乗法通変算宝巻中』に「加法五術」として

加一位　加二位　重加　加隔位　連身加　の五法を掲げている。

加一位…$a\times12$, $a\times13$　などのとき首位1を省くもの

加二位……$a\times12$, $a\times113$　などのとき首位1を省くもの

加隔位……$a\times102$, $a\times103$　などのとき首位1を省くもの

重加………$a\times195=a\times13\times15$　とし首位1を省く

最後の連身加は、法首が二のときに用いる。法首を一と考えて加一位を行ない、法首1の部分を加えれば法首二をかけたのと同じ意味になる。例題につぎがある。

二十九に二十三を乗ずる。

（連　身　加）

$29\times23=29\times13+29\times10$

法　　　　実

2　九

23 < 13…………　二　七　……三九二十七

　　 10…………　九　〇　……一九九

三　二十　七

---

23 < 13…………　六　　　……二三六

　　 10…………二　　　　……一二二

四　二十　七　……二十は繰上げ

　　六

六　六　七

注

① 『日用算法』によると、

一求隔位六二五　二求退位一二五

三求一八七五記　四求改曰二十五

五求三一二五是　六求両価三七五

七求四三七五置　八求転身変作五

とある。全句が七言で構成されているから、歌訣であり、暗記しやすかったに違いない。

六　宋代乗法のまとめ

楊輝算法までについて一応のまとめをするのも無意味なことではない。というのは、中国の算書（中算書と呼ぶ）は楊輝以前とその後とでは相当の開きがあるからである。特に、本稿では除算法については全く触れていないが、その計算法においても一応ここで区切りをつけることがもっとも良いように考えられるし、時代も宋と元の区切りが一二七九年であって適切と思われる。

楊輝の著に

詳解九章算法（一二六一）十二巻、詳解算法　若干巻

日用算法（一二六二）二巻、乗除通変算宝（一二七四）上中巻

法算取用本末（一二七四）下巻

田畝比類乗除捷法（一二七五）二巻

続古摘奇算法（一二七五）二巻

があり、乗除通変算宝以下の七巻を『楊輝算法（ヨウキサンポウ）』[①]と呼んでいる。

『乗除通変算宝』『法算取用本末』三巻が計算法の詳解である。

いまその目録を掲げてみよう。

巻上　習算綱目　相乗六法　商除二法
巻中　加術五法[2]　減術四法[3]　求一乗法　求一除法　九帰新旧題括　算無定法
巻下　代乗成術　代除成術

このうち、相乗六法、求一乗法、算無定法については本論でこれを解説した。商除二法、求一除法、九帰新旧題括、代除成術は除法であって本論に関係はない。

代乗成術は一から三百までの法数について、どの計算法を用いたらよいかを説明したもので、いわば応用論と言ってよく、「法算取用本末巻下」となっている。加因代乗三百題としてある。

習算綱目はカリキュラムに相当する。

先念九九合数（一一加一至九九八十一自小至大用法不出於此[4]）
学相乗起例并定位（功課一日）
温習乗法題目（自一位乗至六位以上并定位、功課五日）
学商除起例并定位（功課一日）
学加法起例并定位（功課一日）
温習加一位、加二位、加隔位（三日）
学減法[5]起例并定位（功課一日）
学九帰、[6]云云温習九帰題目（一日）
求一云云　温習只須一日

穿除、又名飛帰[7]

商除　以下略

などが記入されている。温習は復習である。

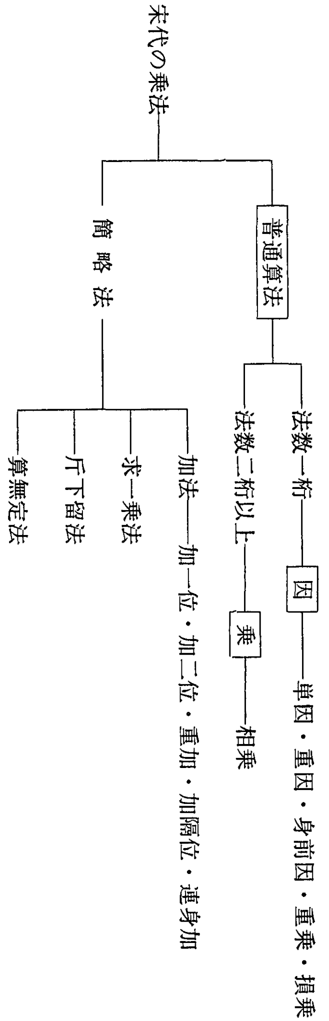
九九から入って相乗六法、商除法、加法（以下「身外加法」と呼ぶことにする）減法（以下「身外減法」と呼ぶ）九帰、求一、穿除と進んでいったことを示している。

楊輝によれば

普通算法　相乗六法（単因・重因・身前因・重乗・損乗など一桁のかけ算と、二桁以上のかけ算である相乗）

簡略法　加法五術（身外加法）、求一乗法（ともに省一乗法）算無定法、斤下留法。

と分類したことになる。つまり古代からの算法を整理し、これを系統化したのであった。



注

① 李儼『中国算学史』一〇〇頁以降に楊輝伝がある。『楊輝算法』は朝鮮で覆刻された古杭勤徳書堂の洪武戊午（一三七八）によっている。東京教育大学、前田尊敬閣文庫に収蔵されている。
② 前に述べた　加一位　加二位　重加　加隔位　連身加である。
③ 減一位　減二位　重減　減隔位がこれで、加一位　加二位　重加　加隔位に対応する除算法である。
④ 九九は「一一が一」からはじめている。小さい方から大きい方に向って使うとしている。古代の九九は九九八十一から始まっているから九九と呼んだもので、逆になったわけである。
⑤ 減法は前にも述べたように省一除法。
⑥ 九帰　歌訣による一桁のわり算。
⑦ 特別の歌訣を使う二桁以上のわり算。

七　留頭乗法の登場と掉尾乗法

宋代までの二桁以上の乗法は実の首位からかけはじめられていた。元の時代になって登場した留頭乗法（リユウトウジヨウホウ）は実の尾位からかけはじめられている。

計算方法を解説するための説明文が詩歌の形式を採用しはじめたのも元代以降のことである。もっとも、楊輝の算無定法、斤下留法も歌訣（七言）によって暗記されたのだが、元の時代には帰除歌訣（わり声）が完成された。計算法が詩形式で述べられ、歌訣によって計算できるようになって大衆化されたのである。その芽生えは楊輝にもあった。① が、朱世傑（シュセイケツ）の『算学啓蒙（サンガクケイモウ）』（一二九九）には、計算法のはじめに詩歌を置き、九帰（わり声）も歌訣となった。②

縦横因法門　身外加法門　留頭乗法門　身外減法門　九帰除法門

がこれである。合計五門である。

身外減法門と九帰除法門が除法で、他は乗法である。

縦横因法門（ジュウオウインホウモン）には

此法従来向上因　但言十者過其身
呼如本位須当作　知算縦横数目真

とある。③

算木による二段布算の乗法に対する詩歌で、七言絶句になっている。

此の計算法は従来向って上からかける、九九を呼んで十のつくもの（三六十八の如く）はその身を過ぎ（一桁上から加え）、一桁のもの（二四が八の如く十のつかないもの）は本位を直す、算の縦横、数目の真を知る。

としたものである。

身外加法門には

算中加法最堪誇　言十之時就位加
但遇呼如身下列　君従法式定無差

とある。楊輝が加法五術で述べた算法のことである。

算中加法もっとも誇るに堪たり、十という時は（九九の二桁になるもの、三四十二の如き）その位から加え、如という時（二三が六の如く一桁のもの）にはその身の下に加える、君よ、法式に従ってかければ誤

（身外加法）

23×14＝322 において

法		実		
14	2	3		
省法				
4	2	$\boxed{3}$		
		1	2	…三四十二
4	$\boxed{2}$	4	2	（九九が二桁だから その位から加える）
		8		……二四が八
4	3	2	2	（九九が一桁だから 身の下に加える）

（留頭乗法）

216×345 の場合に、

3	$\boxed{4}$	5	2	1	$\boxed{\text{六}}$				
					+	2	4		……6×4
						+	3	0	……6×5
				+	1	8			……6×3　六の桁を一になおす
3	4	5	2	1	2	0	7	0	

以下略

答ということはないぞといったものである。

身外加法という名称はこの書から始まった。

留頭乗法門（二十問）

留頭乗法別規模　起首先従次位呼

言十靠身如隔位　遍臨頭位破身舗

今有白豆八十四斛毎斛価銭二百一十文　問計銭幾何

答曰　一十七貫六百四十文

術曰　列豆八十四斛於上以斛価二百一十文乗之合問。

のように問答が続く。④詳しい計算法は後のもの、例えば『詳明算法（ショウメイサンポウ）』（一三七三）などを参考にして見るより外はないが、上のようにして行なわれたものである。

上例にあるように、法数三四五とあるとき、法数の頭はそのままにしておき、次の位の四、ついで五、最後に頭の順に実尾に乗ずるのである。われわれが中乗法と呼ぶ算法である。だから留頭乗法は規模を分つ。首を起して先ず次の位から呼ぶとしたのである。

留頭乗法は『算学啓蒙』で算法名とその詩歌が紹介されたのみで、その計算法の詳細は『詳明算法』に待たなければならなかった。この中間

に刊行された書物に『丁巨算法』⑤（一三五五）があり、『詳明算法』と同じ詩歌を掲げた『算法全能集』⑥がある。

『詳明算法』は因法（二因から九因まで）加法（加一、加三、加五、加七、加九、加二、加四、加六、加八の因）ついで加二位、加三位、隔位加を述べ、乗法（乗二位、乗三位、乗四位）と進んでいる。ところが乗四位の例題が留頭乗法ではなくて、後に掉尾乗法と呼ばれる計算法を紹介している。

五銭	𝍤	先ズ下位ニ五五二十五ヲ下ニシ、次ニ第三位ニ五七三十五ヲ下ニシ、又次ニ第二位ニ三五十五ヲ下ニシ、後本身ヲ変ジテ、二五一十ヲ作ル	1
六両	𝍥	先ズ下位ニ五六三十ヲ下ニシ、次ニ第三位ニ六七四十二ヲ下ニシ、又次ニ第二位ニ三六一十八ヲ下ニシ、後本身ヲ変ジテ、二六一十二ヲ作ル	2
三十	𝍬	先ズ下位ニ三五十五ヲ下ニシ、次ニ第三位ニ三七二十一ヲ下ニシ、又次ニ第二位ニ三三如九ヲ下ニシ、後本身ヲ変ジテ二三如六ヲ作ル	3
実			
法	二三七$\boxed{五}$ ←		

3←2←1

詳明算法の留頭乗
（掉尾乗法の説明になっている）

乗四位　毎両価鈔二両三銭七分五厘（該八十六両六銭八分七厘五毫）

説明文を読み下してみよう。右の如くである。

実尾五からかけはじめ、法尾から法首に向ってかけて行くのである。

留頭乗法は法数が二桁の場合には掉尾乗法とまったく変りはない。法数が三桁以上の場合に相違する算法である。共著者（安止斎・何平子）が乗三位と乗四位に異なった算法を紹介するのも不思議というほかない。まして、乗四位の例題を詩歌に合わせると合わなくなる。共著者が不用意のうちに当時行なわれていたであろう別の算法で解説してしまったと見てよいのではあるまいか。⑦

（掉尾乗法）

解．365×2375＝866875において

法　2　3　7　$\boxed{5}$　　実　3　6　$\boxed{5}$

$$
①\left\{\begin{array}{l}
5\times5\cdots\cdots 25\\
5\times7\cdots\cdots 35\\
3\times5\cdots\cdots 15\\
2\times5\cdots\cdots 10
\end{array}\right\}①
$$

$\boxed{6}$

$$
②\left\{\begin{array}{l}
5\times6\cdots\cdots 30\\
6\times7\cdots\cdots 42\\
3\times6\cdots\cdots 18\\
2\times6\cdots\cdots 12
\end{array}\right\}②
$$

$\boxed{3}$

$$
③\left\{\begin{array}{l}
3\times5\cdots\cdots 15\\
3\times7\cdots\cdots 21\\
3\times3\cdots\cdots 9\\
2\times3\cdots\cdots 6
\end{array}\right\}③
$$

①＋②＋③＝866875

注

① 『乗除通変算宝巻中』に九帰新括（以古句入註両存之）として、
帰数求成十　九帰　遇九成十など
帰除自上加　九帰　見一下一など
半而為五計　九帰　見四五作五など
がある。が、まだ歌訣は五言になっていないものが多い。

② 『算学啓蒙』は三巻から成り、上巻八門、中巻七門、下巻五門である。門は章に当る。計算法を述べた五門以外には、上巻に異乗同除門、庫務解税門、折変互差門などがあるが、詩歌はない。

③『算学啓蒙』以降の中算書はほとんどこの詩歌形式を踏襲している。その詩歌も若干の相違があり、これを調べることによって算書の変遷がわかり興味深いものがあるのだが今は省く。

④『詳明算法』は安止斎、何平子の共著になる上下二巻の書で、例題について算木により図解している。詩歌も、

下乗之法此為真　位数先将第二因
三四五来乗遍了　却将本位破其身

となっており、『算法全能集』（年紀は不明であるが、李儼は生前この書を一三五七年の刊本として筆者に知らせてくれた）賈亨著の詩歌と全く同じである。この詩歌の方がわかり易い。下乗の法（実尾から掛けるから）これを真となす。位数先ず第二をもって（実の二位目から）因す。三四五と来り乗じて（実の三、四、五位を乗じ）かえって本位をもってその身を破る、としているからである。

⑤丁巨の著、八巻のうち残っているのは一巻に足らず、知不足斎叢書本に六二問、永楽大典算書に二〇問あるのみで、借収入加法という算法名が記されているが詳細はわからない。叢書本は国会図書館にある。永楽大典算書は写真にしたものが山崎博士から贈られて私蔵。

⑥註の(4)参照一三五七年刊か？

⑦『詳明算法』の乗三位、乗四位の例題は、数値もそのままに柯尚遷の『数学通軌』（一五七八）に採用されており、この書は日本に渡来し、かつ日本では掉尾乗法を採用しているという事実だけをいまここで述べておこう。

八　明時代の普通算法

留頭乗法は『算学啓蒙』に初紹介され、以後の算書群『算法全能集』『詳明算法』『九章詳註比類算法大全』①（一四五〇）『古今算学宝鑑』②（一五二四序）『盤珠算法』③（一五七三）『数学通軌』④（一五七八）『算法統宗』⑤（一五九二序）『算法指南』⑥（一六〇四）『算海説詳』⑦（一六五九序）と続いて行く。いまその関係を記すと次頁の如くである。

算法名の記載のないのは、もっとも一般的な乗算法であったから記載しなかったまでで、詩歌が算学啓蒙、算法全能集の二系統に分れていたことを示している。

（留頭乗法一覧）

算書名	詩歌	例題	例題解	算法名
算学啓蒙	前章参照	あり	なし	留頭乗
算法全能集	算学啓蒙と別の詩歌	あり	なし	なし
詳明算法	算法全能集と同じ	あり	あり 掉尾乗法もあり	なし
九章比類算法	詳明算法と同じ	あり	あり	なし
算学宝鑑	前書と若干異なる⑧	あり	あり	留頭乗
盤珠算法	算法全能集系⑨	あり	あり	なし
数学通軌	算法全能集と同じ	あり	あり 掉尾乗法もあり	なし
算法統宗	算法全能集と同じ	あり	あり	留頭乗
算法指南	盤珠算法と同じ	あり	あり	留頭乗
算海説詳	特別の詩歌⑩	あり	あり	留頭乗

先にも述べたように、『詳明算法』には後世、掉尾乗法と呼ばれた計算例が入っている。これは一般的な乗法でこそなかったが、普通算法として行なわれていたのである。この間の事情について『古今算学宝鑑』はつぎの如く述べている。

解曰　法有二位以上皆曰乗生数之術也　其法有三　有自法尾乗起而至上者　有自法首乗起而至下者　有自第二位乗起至尾纔来乗法首而変身者此謂留頭乗法也　蓋留法首之位不乗使寔身之数不変　則法之下位而便於乗也（中略）乗雖有三莫若留頭為便、不拘幾位法先従第二位乗起至尾位臨了纔乗法首変身為便　呼九九合数下之自下而上位皆然　亦尋根下定数　用帰法還原合問。

つまり、

一、法の尾からかけはじめて上に至る。

（掉尾乗法）

234×567＝132678において

（法）	（実）
かける数	かけられる数
5 6 7 ←	2 3 $\boxed{4}$

2 8	……4×7	
2 4	……4×6	
2 0	……4×5	4を2に直す
2 1	……3×7	
1 8	……3×6	
1 5	……3×5	3を1に直す
1 4	……2×7	
1 2	……2×6	
＋ 1 0	……2×5	2を1に直す
1 3 2 6 7 8		

二、法の首からかけはじめて下に至る。

三、第二位からかけはじめ尾に至り、最後に法首に至り実を変える。

乗法には上述のように三種あるが、留頭乗がもっとも便利だ。としているのである。

『算法統宗』ではこの三種の乗法についてつぎの如く算法名を掲げている。⑪

原有破頭乗　掉尾乗　隔位乗　総不如留頭乗之妙故皆不録。

破頭乗（ハトウジョウ）、掉尾乗（トウビジョウ）、隔位乗（カクイジョウ）という算法が元からあったが、留頭乗の良さには敵わないから留頭乗だけを記し、他は記録しないというのである。『古今算学宝鑑』に説明された方法と、この算法名とを組み合わせて解釈するとつぎの如くである。

234×567＝132678において

（破頭乗）

かける数（法）	かけられる数（実）		
$\boxed{5}$ 6 7 →	2 3 $\boxed{4}$		
	2 0	……4×5	4を払って2
	2 4	……4×6	
	2 8	……4×7	
	2 $\boxed{3}$ 2 2 6 8	以下略	

（隔位乗）

（法）	（実）	
$\boxed{5}$ 6 7 →	2 3 $\boxed{4}$	
	2 0	……4×5
	2 4	……4×6
	2 8	……4×7
	－ 4	……4を払う
	2 $\boxed{3}$ 0 2 2 6 8	以下略

法尾からかけはじめる――掉尾乗法

われわれがふつう尾乗法と呼んでいる算法である。『詳明算法』・『数学通軌』が留頭乗法の例解中に不用意に紹介した算法であることは前にも述べた。

法首からかけはじめる――破頭・隔位乗――

この計算法はさらに二つに分かれる。『算法統宗』以後で分けられた。答を置く位置が異なるだけであるが『算海説詳』[12]によると、

破頭乗　言以法首数将広乗実位破身順乗而下也。

隔位乗　言於広乗実位下法首従隔位挨次至尾順乗而下乗完除実身一位

と説明がある。

破頭乗は身を破って順乗して下る。隔位

乗は隔位に従い順乗して下り乗じ終り、実身一位を除くとある。

現在われわれは前頁の上を頭乗法、下を頭乗法別法（新頭乗法後払い）と呼んでいる。

ついでながら『算海説詳』では、留頭乗法を含めて四法についてつぎのような批判をしている。面白いから読み下してみよう。

四法一理アリ、留頭乗ハ今皆此ヲ用ウ。

掉尾乗ハ、タダ法位ヲ明白ニ倒記シ次ヲ以テ逆上シテ極ル、宣シク捷トナス、惟ルニ法位過多ナレバマズ数ヲ退キテ実ノ下位ニ隔ツ、次ニ煩トナス。

隔乗位ハ下一位ヲ退ク、即チ法首ヨリ乗ジ起シヲ極ル、順因シテ乗ジ終リ身ヲ除ク、多クコレ一番煩トナス。然レドモ三法ハ皆乗ジ終リテ身ヲ破リ、法実照対ス、錯誤ヲ致サズ。

破頭乗ハマズ実位ヲモツテ改メ破ル、充錯シ易キヲ恐ル。

もっと易しくいうと、

留頭乗がもっとも一般的。

掉尾乗は乗数が多桁だと位を下げてから乗ずるから煩らわしい。

隔位乗は被乗数を後から払うから一番煩わしい。

破頭乗は被乗数をすぐ改めるから誤りやすい。

しかし、留頭、掉尾、隔位乗の三法は被乗数を乗じた後に払うのだから間違わない。

と述べたものである。

注

① 『九章詳註比類算法大全』呉敬信民の著 国会図書館静嘉堂文庫蔵。

② 『古今算学宝鑑』王文素の自序（一五二四）のほかに宝朝珍（ホウチョウチン）の一五一三の序文がある。乗除計算法を網羅した大著、東北大学に写真（北京図書館本）と写本がある。

③ 『盤珠算法』徐氏心魯訂正、正しい書名は『新刻訂正家伝秘訣盤珠算法士民利用』国会図書館内閣文庫に一本を存するのみ。

④ 『数学通軌』柯尚遷の著、国会図書館前田尊経閣蔵。十七世紀中ごろ日本に入ったことは確実。

⑤ 『算法統宗』程大位の著『算学啓蒙』とともに和算にもっとも強い影響を与えた書。

⑥ 『算法指南』黄竜吟（オウリュウギン）の著、故李儼氏蔵。

⑦ 『算海説詳』李長茂（リチョウモ）の著、早稲田大学小倉文庫、内閣文庫に蔵。

⑧ 留頭乗法要知聞　法位先将第二因
三四五来乗遍了　纔乗法首変其身

⑨ 下乗之法此為真　起手先将方二因
三四五来乗遍了　却将本位破其身

⑩ 因乗之法用此真　起手先従二位因
三四相連倶乗遍　後将首位破其身

⑪ 留頭乗の説明のところの本文に、
按因与乗一也　単位者謂之因　位数多者謂之乗　特以此而異其名耳。
の後に小書されているのである。

⑫ 『算海説詳』李長茂　一六五九序にはこれらの算法についての紹介がある。

九　明時代の特別算法

留頭、破頭、掉尾、隔位乗法の普通算法四法のうち、もっとも多く用いられていた算法が留頭乗法であった。新しい中国になっても、文化大革命のころまではこの留頭乗法が多く行なわれていた。しかし、特別算法が無かったわけ

ではない。特殊な法数（乗数）に遭遇したようなときにはいろいろな算法が行なわれた。当時行なわれていた算法を網羅した書に『古今算学宝鑑』がある。宝鑑の名を恥かしめぬ大著で、古今の算法を紹介している。

一　身前乗（シンゼンジョウ）

楊輝に身前因があったが、これは乗数が21とか41とかいう場合の一位数の1を省略して一桁のかけ算として行なうものであった。『古今算学宝鑑』の著者王文素はこれを身前加と呼び、楊輝をさらに拡大解釈して、乗数の末位が一の場合のすべてに応用した。①

身前乗は身前加を応用したものである。乗数から一を引いて被乗数に加えるもので、われわれが減一乗法と呼ぶ算法である。

（身　前　乗）

125×69＝8625において

法（かける数）		実（かけられる数）
$\boxed{6}$ 8		$\boxed{\text{一}}$ 2 5
	1 × 6 … ＋ 6	
	1 × 8 …… ＋ 8	
6 8		6 9 $\boxed{\text{二}}$ 5
	2 × 6 … ＋ 1 2	
	2 × 8 …… ＋ 1 6	
6 8		8 2 8 $\boxed{\text{五}}$
	5 × 6 …… ＋ 3 0	
	5 × 8 …… ＋ 4 0	
6 8		8 6 2 5

その詩歌は

身前乗法従頭起　法尾減除一数己
靠尾先乗直到頭　末後纔来乗法尾
呼如対位十陞前　反則法寔尤易理
不変寔身最好乗　此法世人知有幾

最後に、こんな算法のあることを世の中の人に知ってもらいたいと願う。とあるところをみるとあまり知られていなかったものと推測される。

二　因総損零

乗除借欠用因帰　乗借因来後損之
除借数帰還借数　粮応此法少人知

の詩歌（七言絶句）がある。

乗数が一九七のときには二〇〇乗して三倍を戻すような乗法で、われわれが帰一混用乗法と呼ぶ算法である。損乗の応用ともいえる。

三　衆九相乗

単騎見虜法新伝　代九繁乗極妙玄
法寔位同那寔尾　寔多対法起那堪
法多法内忙那減　対位那来対位安
算者若能知此意　科場出衆敢争先

の詩歌（七言律詩）があって、

解曰　衆九相乗用　子甚多算子少　乗則不便云云がある。

算例に九九九九に九九九九を乗ずるものがある。このような乗法では、そろばんの玉を用いることが甚だ多く、そろ

（因損総零）
388×197＝76436 において
388×（200－3）と考える。

法 かける数		実 かけられる数	
$\boxed{2}$ 0 0 －$\boxed{3}$		3 8 $\boxed{八}$	
	2 × 8 ……	＋1 6 ……	（8を払ってそこから16をおく）
	3 × 8 ……	－2 4	
		3 8 1 5 7 6	

以下略す。

あるいはこれを反対にして、　197×388＝76436 において
197×（400－12）として、

法 かける数		実 かけられる数	
$\boxed{4}$ 0 0 －$\boxed{1\ 2}$		… 1 9 $\boxed{七}$	
	4 × 7 ……	＋2 8 ……	（7を払ってそこから28をおく）
	1 × 7 ……	－7	
	2 × 7 ……	－1 4	
		1 9 2 7 1 6	

（衆九相乗）

$$9,999\times999=9,989,001$$

	かけられる数
	9　9　9　9
1×1＝	−1
1×1＝	＋1
	9，9　8　9，0　0　1

ばん玉が少なくて乗ずるのに不便だから、特別の方法によれというのである。

〝第三位において一を起し、尾後第三位に那しすなわち答数を得て問に合す〟②とある。

衆九相乗とは別に衆九為乗というのもある。

123×99＝123×(100−1)

と考える方法であるが、先に述べた楊輝の損乗と同じ考え方であるから、これは省く。③

寔位相同（ジツイソウドウ）

寔位相同法不同　只乗寔尾照依行
法同寔異相交易　以法求乗一様同

の詩歌がある。被乗数が同じ数の連続数である場合には、被乗数の尾に乗数を掛けて得た積を順次に位をあげて加えて行くだけでよい。乗数が同じ数の連続数であれば交換すればよいとしたものである。（次頁参照）

一種の簡便法である。

截法寔乗（サイホウジツジョウ）

寔繁法冗算難清　法寔截為両次乗
甚者分為三四次　各乗総併数尤精

の詩歌がある。

（寔位相同）

777×625＝485625において

法（かける数）		実（かけられる数）
6 2 5		7 7 $\boxed{七}$
	7×625 ……	＋ 4 3 7 5
		7 $\boxed{七}$ 4 3 7 5
	前の答を一桁上げて……	＋ 4 3 7 5
		$\boxed{七}$ 4 8 1 2 5
	前の答を一桁上げて…	＋ 4 3 7 5
		4 8 5 6 2 5

乗数や被乗数の桁数が長いときには、それをいくつかに区切って最後に加えればよい。例えば、

（截法寔乗）

253116×125625＝317,976,975において

$$
\begin{array}{rcrcrl}
253,116 & \times & 125,000 & = & 316,395,000 & \cdots\cdots a \\
253,116 & \times & 625 & = & 1,581,975 & \cdots\cdots b \\
\hline
 & & & & 317,976,975 & \cdots\cdots a+b
\end{array}
$$

下のようにする。甚だしいときには、三つ、四つに分けてもよいとしている。

因代繁乗（インダイハンジョウ）

乗法の桁数が長いと、かけるのに不便である。そこで一桁のかけ算の答を出しておいた後に、たし算をすれば簡単

（因代繁乗）

8765432×12345において

12345×2＝24690
12345×3＝37035
12345×4＝49380
12345×5＝61725
12345×6＝74070
12345×7＝86415
12345×8＝98760

```
      2 4 6 9 0…………            2
     3 7 0 3 5 …………           3
    4 9 3 8 0  …………          4
   6 1 7 2 5   …………         5
  7 4 0 7 0    …………        6
 8 6 4 1 5     …………       7
9 8 7 6 0      …………8
-----------------------------------
1 0 8 2 0 9 2 5 8 0 4 0…………8 7 6 5 4 3 2
```

に述べている。

楊輝と異なる連身加

連身加については楊輝のところで記したが、王文素（オウブンソ）は

首尾若逢二有時　連身加数莫疑思

にできる。一桁のかけ算（因）によって、繁乗に代えるというのである。手動計算機の考え方と同じである。

八七六五四三二に一二三四五を乗ずる例題がある。乗数一二三四五の二、三、四、五、六、七、八倍したものを一桁ずつ上げて加えれば答が得られる。

犯斤秤（ハンキンショウ）――

乗法如逢両見斤　随歌変化数尤真
除逢斤秤惟加六　説徒諸君仔細尋

の詩歌がある。楊輝に斤下留法があり、既に述べたが六二五乗ばかりでなく、六二五の一〇〇〇に対する補数三七五を乗ずるときには一退六二五などの口訣を使って損乗に応用し、さらに一六二五を乗ずるときには斤下留法と身外加法を、六二五一を乗ずるときには身前加法も併用するよう

後加零数前加総　知此堪為算教師

の詩歌があって、

法首が二のとき（楊輝と同じ）だけでなく法尾二のときも用いる。すなわちつぎの三法となる。

（連　身　加　三　法）

29 × 82 ＝ 2378 において

法（かける数）		実（かけられる数）
① $\boxed{8}$2		$\boxed{29}$
	9×80 …………	720
	20×80 …………	1600
		29
		29
		2378

$29\times82=(29\times80)+(29\times1)+(29\times1)=2378$

② 2$\boxed{9}$		$\boxed{82}$
	2×9 …………	18
	80×9 …………	720
		820
		820
		2378

$82\times29=(82\times9)+(82\times10)+(82\times10)=2378$

③ $\boxed{8}$2		$\boxed{29}$
		29
	20×80 …………	1600
	9×80 …………	720
		29
		2378

$29\times82=29+(29\times80)+29=2378$

その他

『九章詳註比類算法大全』には起畝還源見歩法という名前がついている算法がある。斤下留法と同じように特別な歌訣を使用する。二十四乗のときに用いるもので、

見一退為二十四　見二退為四十八
見三退為七十二　見四退為九十六
見五為一百二十　見六為一百四十四
見七為一百六十八　見八為一百九十二
見九為二百一十六

の歌訣がある。田地は一畝が二四〇歩であるから、畝を歩になおす必要がたびたびあったのであろう。これは乗法で、王文素の『古今算学宝鑑』には反対の除法の歌訣がある。[4]

『九章詳註比類算法大全』の例題はつぎの如くである。『古今算学宝鑑』ではこれを犯畝法と呼んでいる。

法位如逢二四時　畝求歩数一般施
身前身後或相犯　加減観題以用之

の詩歌があって、前述の歌訣を用いる。一二四に二四を乗ずるときには身外加法をも併用するときがある。すなわち、歌訣を変えて、(2)のように行なうのである。

（犯　畝　法）

３２７×２４＝７８４８において

３ ２ $\boxed{七}$

一 六 八　見七為一百六十八（七を一に代えて下に六八をおく）

３ $\boxed{二}$ １ ６ ８

４ ８　見二退為四十八

$\boxed{三}$ ０ ６ ４ ８

７ ２　見三退為七十二

７ ８ ４ ８

（犯　畝　法）

124×24＝2976において

(1)　通常の方法

被乗数

１ ２ $\boxed{4}$

見四退為九十六　-4　９ ６　四をとって下へ九六

見二退為四十八　-2　４ ８　二をとって下へ四八

見一退為二十四　-1　２ ４

２ ９ ７ ６

(2)　身外加法応用の方法

124×24＝2976

被乗数

２ ４

見四身後加九六…………９ ６

見二身後加四八……　４ ８

２ ９ ７ ６

そればかりではない。求一乗法的な考え方で、

$$248\times372=248\times3\times\frac{372}{3}=744\times124$$

$$372\times248=372\times2\times\frac{248}{2}=744\times124$$

と考え、身外加法と犯畝法の二つの方法を応用している。

この書には、さらに二乗四除（二を掛けて四で割る）には五因す（五をかけるだけでよい）とする互換活法（ゴカンカツボウ）。

楊輝にもあった重因（四二乗は六と七乗）、

隔位加三……$255\times412=(255\times4)\times\frac{412}{4}=1020\times103=105060$

身前加五……$412\times255=(412\times5)\times\frac{255}{5}=2060\times51=105060$

の前後犯合数（ゼンゴハンゴウスウ）などがある。これも求一乗の一種とみることができる。利用できるものは最大限に応用しようとする意図がうかがえる。

注

① 例題に一七八に三四一を乗ずるものがある。一七八に三四〇倍したものを加えるのである。

② 於第三位起一那於尾後第三位即得答数合問。

③ 王文素が、損乗と区別したのは、被乗数が算例にあるように、九九と九を集めたからに外ならない。

④ 筆者と山崎与右衛門、戸谷清一との共著『珠算算法の歴史』昭和三十三年　森北出版株式会社　三三一頁、二九五頁「飛帰」の項参照。

十　明代乗法のまとめ

明代の算書群、『詳明算法』（一三七三）から『算海説詳』（一六五九序）までに登場した各種乗法について上述したのであるが、いまこれを次頁のように分類してみよう。

宋代においては簡略法として身外加法がおかれていたが、この時代にはもう普通算法となっている。その事情を『詳明算法』（一三七三）の目録から眺めてみることにしよう。

巻上

九章名数　小大名数　九九合数　斗斛丈尺

斤秤田畝　口訣　乗除見捴　因法

加法　乗法　帰法　減法　即定身除

帰除　求一　商除　約分

巻下　略す

であり、このうち乗法に相当するものは、

因法　二以上単位算者用之従末位小数算起用九帰還元。

加法　一十一百一千一万之類但首位一者用此法先従末位小数算起用定身除還元。

乗法　二以上位数多者用此法従末位小数算起用帰除還元。

求一　求一明教置両停　二三折半四三因

付表１

- 明代の乗法
  - 普通算法
    - 法数一桁 ── $\boxed{\text{因法}}$
    - 法数二桁以上（乗法）
      - 法首一のとき ── $\boxed{\text{身外加法}}$
      - 法首二～九
        - $\boxed{\text{留頭乗法}}$
        - 掉尾乗法
        - 隔位乗法
        - 破頭乗法
  - 特別算法
    - 求一乗
    - 身前乗
    - 因総損零（損乗）
    - 寔位相国
    - 截法寔乗
    - 因代繁乗
    - 歌訳を用いる乗法（斤下留法・犯斤法・犯畝法）
    - 特殊な連身加

$\boxed{}$ はもっとも一般的な算法。

五之以上二因見　去一除零要定身

である。乗法が留頭乗と破頭乗を述べていたことについては前述した。

もう一冊『算法統宗』（一五九二序）巻之一の目録を掲げてみよう。

先賢格言　算法提綱　九章名義　算学節要
乗除用字釈　用字凡例　数　小数　度　量
衡　諸物軽重数　銭鈔名数　定算盤位次実
左法右論①　九九八十一②　九九合数③　九帰歌
因乗（論）④　九帰（論）　商除（論）　加法（論）
減法（論）　約分（論）　通合（論）……以下略

とつづく。乗法に関係あるところにはつぎの文がある。

因乗法者。単位曰因。位数多曰乗。通而言之。乗也。置所有物為実。以所求価為法。皆従末位而起。如法乗之。呼九字相生之数。次第乗之。呼如須次位。言十在本身。陞積謂之

乗。其数雖陞。而位反降矣。必須用定位之法。而治之詳見于後。

加法者。随母留身増添謂之加。謂如正米。毎斗帯耗七合者。留身以七合。隔位加之。又如毎銀一両。加利三銭。不破本身。以三増之。故謂之加法。或用乗法而代之。如毎斗加七合。就以一斗零七合乗之。得正耗数也。

その乗法に留頭乗を解説し、

惟フニ留頭乗最モ妙ナリ。

として破頭乗、掉尾乗、隔位乗の算法名三つを掲げたに過ぎなかったことは前述した。

『古今算学宝鑑』は、珍らしい算法名を掲げているが、乗法には、

第三巻で因法、乗法、加法。

第四巻で求一代乗、身前加、身前乗、因代繁乗、損乗、連身加、重因、重加、相乗、寔位相同、截法乗、犯畝法、犯斤秤、犯合数、因総損零。

第五巻で互換活法、単因代乗、衆九相乗、為九為乗。

を説明している。これらを総括すると、付表一の如く分類できるのである。

注

① 中国の算書では実（被乗数）を左に、法（乗数）を右に置く。日本ではこの反対に実を右に、法を左に置いている。吉田光由の『塵劫記』（一六二七）以来現在でもこの方法によっている。いままで述べてきた計算例も日本式に実右法左で解説しているが、中国の珠算書（九章詳註比類算法大全以降、この書は算木と珠算による解法を述べた本、これ以前は算木算法書と認められる）とは異なるから特に注意されたい。

② これは九九を述べたものではない。上法といって一遍　一上一　二上二……九上九　二遍　一上一　二上二　三下五除二……というように、そろばんに一二三四五六七八九を累加して行く運珠法を述べたものである。

③　これが九九である。一一如一　一二如二　二二如四　一三如三　二三如六　三三如九　一四如四〜一九如九　二九一十八……八九七十二　九九八十一で終っている。

④　（論）としたが巻之一の目録には論はない。首編の目録によった。

十一　むすび

中国における乗除計算法が、数多く、かつ古くから行なわれていたことはいままで知れなかった。①蒐書の労をとられた藤原松三郎博士②はご存知であったろうが活字にはしてくださらなかった。計算法の細かい部分の調査より、和算に与えた影響という点から中国の算書を研究されていたからであり、大きな問題に取組まれていたからである。③

本稿は、乗算法についてその起源を明らかにした。勿論乗算算法は除算算法との関連において論じなければ意味をなさないであろう。しかし、与えられた枚数を以てしては乗算を述べるだけで一杯である。いずれつぎの機会に除算法の起源を述べることにしたい。

識者は、六、宋代乗法のまとめ、十、明代乗法のまとめがあって、元代はどうだったのか、二四頁の表と四六頁の表との関連はどうなのか、紹介された各算書間の関連と、算法の起源は、などまだ疑問が残るといわれるであろう。いわれるとおりである。そこで作成した付表2・3を見ていただきながらつぎの結論を検討して欲しい。

付表2

中 算 書 と 算 法

	算書等名	時代	成立年	著者	算木・珠算	布算法	単因	重因	連身加	身前因	重乗	損乗	身外加法	相乗	求一乗	算無定法	斤下留法
①宋代まで	孫子算経		1か3世紀?	孫子	算木	三段								乗			
	夏侯陽算経	南北朝	6世紀	夏侯陽	算木	二段	○	○		○		○一桁	○	乗			
	夢渓筆談	宋	1166	沈括											?		
	楊輝算法	宋	1274	楊輝	算木	二段	○	○	○	○	○	○一桁二桁	○五法	相乗	○	○	○
②元代	算学啓蒙	元	1299	朱世傑	算木	二段	縦横因法						○	留頭乗法			○
	丁巨算法	元	1355	丁巨	算木	二段						○一桁	○				
	算法全能集	元	1357?	賈亨	算木	二段	○						○	留頭乗法	○		

	算書名	時代	成立年	著名	算木・珠算	因法	加法(身外加)	乗法						
③明代以降	詳明算法	明	1373	安止斎 何平子	算木	因法	加法	掉尾乗		留頭乗	求一乗	斤下留法		
	九章比類大全	明	1450	呉敬	算木・珠算	因法	加法			留頭乗	求一乗	斤下留法	起畝還源 見歩法	
	古今算学宝鑑	明	1524序	王文素	珠算	因法	身前加・身前乗・身外加・連身加	掉尾乗	隔位乗	留頭乗	求一乗	斤下留法	犯畝法	破頭乗
								損乗一桁二桁	因総損零	衆九相乗	寔位相同	截法寔乗	因代繁乗	犯斤法
	数学通軌	明	1578	柯尚遷	珠算	因法	加法	掉尾乗		留頭乗				
	算法統宗	明	1592序	程大位	珠算	因法	加法	掉尾乗	隔位乗	留頭乗	求一乗	斤下留法		破頭乗
	算海説詳	清	1659序	李長茂	珠算	因法		掉尾乗	隔位乗	留頭乗				砂頭乗

方　　　法	備　　　考
2位数×2位数	
実尾からかける	楊輝の単因に当る
a×35＝a×5×7	算法名なし
実首からかける、法一桁	〃
a×9＝a×10－a×1	〃
a×12、a×102、a×144の首1省略	〃
	推　定
法・実を加工して身外加	
a×41＝a＋a×40、法二桁	夏侯陽の応用
a×195＝a×13×15の身外加	
a×23121＝a×7×9×367	因数分解
29×23＝29×13＋29×10	身外加の応用
a×23＝a×(100－23)	77の倍数の声(七退五三九)使用
a×375＝a×(1000－375)	625の倍数の声(一求尅退六二五)使用
a×299＝a×13×(100－77)、法二桁も	
a×abc…ab、ac、aaの順	中乗法に相当する
a×abc…ac、ab、aaの順	留頭乗法説明中にこの算法もあり
a×24	24の倍数の声(見一退為二十四)使用
a×69＝a＋a×68	減一乗法に相当する
a×341＝a＋a×340　法三桁	楊輝の身前因の応用
29×23＝29×10＋29×13	楊輝の連身加の異法
a×abc＝aa、ab、acの順	頭乗法別法(後払い)に相当
〃	頭乗法に相当
388×197＝388×(200－3)	帰一混用乗法に相当
999×9999	省略乗法
777×625	7×625＝4375　一桁ずつづらして三回加算
a×125625＋a×125000＋a×625	
	実×法一桁の積を一桁ずつづらして加算

付表3　　**算法の起源**

算法名	算書名	時代	年紀	算木・珠算	布算法
乗	孫子算経	1世紀か3世紀		算木	三段
乗	夏侯陽算経	6世紀		〃	二段
因	〃	〃		〃	〃
重因	〃	〃		〃	〃
身前因	〃	〃		〃	〃
損乗	〃	〃		〃	〃
身外加	〃	〃		〃	〃
求一乗	夢渓筆談	宋	1166		
求一乗	楊輝算法	宋	1274	算木	二段
○　身前因	〃	〃	〃	〃	〃
重加	〃	〃	〃	〃	〃
重乗	〃	〃	〃	〃	〃
連身加	〃	〃	〃	〃	〃
算無定法	〃	〃	〃	〃	〃
斤下留法（　〃　）	〃	〃	〃	〃	〃
○　損乗	〃	〃	〃	〃	〃
留頭乗法	算学啓蒙	元	1299	〃	〃
掉尾乗法	詳明算法	明	1373	〃	〃
起畝還源見歩法	九章比類大全	〃	1450	算木と珠算	
身前乗	古今算学宝鑑	〃	1524序	珠算	
○　身前加	〃	〃	〃	〃	
○　連身加	〃	〃	〃	〃	
隔位乗	〃	〃	〃	〃	
破頭乗	〃	〃	〃	〃	
因総損零	〃	〃	〃	〃	
衆九相乗	〃	〃	〃	〃	
寔位相同	〃	〃	〃	〃	
截法寔乗	〃	〃	〃	〃	
因代繁乗	〃	〃	〃	〃	

○印は新しい算法ではないもの

(1)もっとも初期の乗法は累加または二倍法によるものであった。

(2)九九が出来て④三段布算法が行なわれた。算木に⑤よるものである。

(3)二段布算への改革は六世紀までに行なわれた。

(4)宋代の終りまでに二四頁の系統は完成された。付表3はそれぞれの算法についての起源を示したものである。

(5)付表2は宋代、元代、明代以降に分けられた場合の算書と算法の関連を示している⑥。

一見してわかるように、元代では、こと乗法に関する限り⑦、留頭乗法しか登場しないのである。したがって、

(6)元代の乗法を分類すると、

- 元代の乗法
  - 普通算法
    - 法数一桁 ― 因　法
    - 法数二桁以上
      - 法首一のとき ― 身外加法
      - 法首二〜九 ― 留頭乗法
  - 特別算法
    - 求一乗法
    - 斤下留法
    - 算無定法

となる。二四頁の付表1と対比されたい。

つまり、三段布数の方法の簡略化として採用された身外加法（夏侯陽のころ）は、二段布算へ画期的に変換され

るに及んで求一乗法への発展を促し、前掲のごとく、求一乗法が特別算法、身外加法は普通算法へと昇格されたのである。

(7)明代には、計算器具として使われていた算木に代えて、各算法を算盤に利用した。三段布算の方法が二段布算の方法へと転換されていなかったら、算盤への応用もなされなかったに違いない。上下二段の布算方法は算盤の左右対照にそのまま利用できることを知った民衆は、算木に代えて算盤を計算用具として使用した。算木と算盤の併用時期、これが一四五〇年刊になる『九章詳註比類大全』である。⑧

以上のように結論してこの稿を終る。前にも一言触れたように、除算算法との関連、さらに各算書を生んだ社会的背景、地理的状況、『算学啓蒙』以降記されるようになった計算法解説のための七言絶句や律詩の関連性、算書の系譜化などまだまだ調査を経た上でないと上記の結論も覆る可能性もある。今後も努力を続けたい。

注

① 筆者らの共著『珠算算法の歴史』昭和三十三年十月が、算法に関するはじめての書である。この共著以前に私は日本珠算連盟から珠算史に関する専門委員の委嘱をうけ(昭和三十一年五月)『珠算史に関する専門委員会報告書』四〇〇字詰八五〇枚写真九一枚を提出した。これは全文が「日本珠算」に分割掲載された。

② 元東北大学理学部教授、日本学士院編で『明治前日本数学史』五巻 岩波書店を発刊された。元日本学士院会員、理学博士。昭和二十一年十月十二日歿。東北大学の三万冊に及ぶ和算書、中国の算書は藤原松三郎、その前の林鶴一、藤原博士の研究を引継がれた平山諦博士三代の努力によるもので、私の算法史研究の大半は東北大学蔵書本によっている。

③ その原稿を平山諦博士によって整理されて上梓されたのが『明治前日本数学史』全五巻である。一九五四〜一九六〇年岩波書店刊。近く複刊される予定である。

④ 九九については論じたことはない。「九九に就きて」と題する立派な論文は、三上義夫博士が大正十一年一月「東洋学報」第十一巻第一号に発表されている。筆者もお手伝いした山崎与右衛門博士編『東西算盤文献集』第二輯 森北出版株式会社昭和三十七年に集録してある。

李儼の『中国算史学』六頁には、

九九　上古有九九之伝説、管子軽重戊云「伏羲作九九之数、以応天道」……関於九九歌訣、則荀子、呂氏春秋、淮南子、戦国策、孔子家語、史記索隠、史記正義及孫子算経并引及之、此頃九九歌訣、並以九九為始、因称「九九」敦煌居延所遺之「九九術木簡」以下略がある。

⑤ 算木についても論じたことはない。算木というのは日本での呼び名で、中国では籌、策、算。漢、唐以後は籌算、籌策、算籌などの名称が用いられ、宋代以後は俗に算子と称している。李儼『中国算学史』五九頁参照。

⑥ 明代には『盤珠算法』（一五七三）『数学通軌』（一五七八）『算法指南』（一六〇四）のほかに年代不明の『新鐫九竜易訣算法』内容のほとんど同じ『指明算法』『銅陵算法』『新鐫啓蒙便用算法全書』などが出版されたが結論に影響を与えるほどの書ではないから、ここでは紹介を省略している。

⑦ 除法では九帰除法が『算学啓蒙』に登場し、撞帰句が『丁巨算法』に登場し、『算法全能集』で帰除法がほとんど完成する。

⑧ 算盤という字の初見は元、陶宗儀（号南村）の『輟耕録』（一三六六）。算盤図（五玉二個、一珠五個）の初見は『魁本対相四言雑字』（一三七一）。