

紹介 Review

フラクタル図形

鎌本喜代美*・佐々木豊勝*・清水敏寛**

Fractal Pattern

KIYOMI KAMAMOTO*, TOYOKATSU SASAKI* and TOSHIHIRO SHIMIZU**

Synopsis: The concept of fractal structure is plainly explained. Program lists for personal computer to get fractal patterns are presented. Some fractal patterns, which have been made by students, are shown.

1. はじめに

最近, いろいろな分野でフラクタルが注目されている。1977年に, マンデルブローによって創りだされたフラクタルという概念は, 自然科学の様々な分野だけでなく, 最近では社会科学を含めた広い分野に適用できることが明らかになってきた。いまやフラクタルは, 自然界に存在する基本的な法則の一つになりつつある。一方でフラクタルを私たちの身近にしているものにコンピュータ・グラフィックスを用いたフラクタル図形がある。初めてフラクタル図形を見た人は, その美しさと同時にその入り組んだ構造の複雑さに驚嘆の声をあげる。もう一つの驚くべき点は, この複雑なパターンが非常に簡単なプログラムから得られるということである。

工学部1年生を対象にした物理実験では, 実験項目の一つとしてフラクタル図形を取りあげている。実験のねらいは, フラクタルの概念を正しく理解させると同時にパソコンの取り扱いに馴れ, 簡単なプログラムは自分で組めるようにすることである。ともすればパソコン演習は単調になりがちだが, フラクタル図形では結果が絵になって出てくるので, 学生は興味を持って取り組んでいる。

本稿では, まずフラクタルの概念を簡単に説明し, その後で物理実験で取り上げている基本のフラクタル図形とそのプログラムを紹介する。フラクタル図形は, その中に含まれるパラメータを少し変えると絵が急激に変わるという特徴を持っている。最後の節で基本図形から作り出された学生のオリジナル作品のいくつかを紹介してフラクタル図形の素晴らしさとフラクタル

*国士館大学工学部 物理実験室 技術職員

Technical Staff, Division of Physical Experiment, Faculty of Engineering, Kokushikan University.

**国士館大学工学部 電気工学科 教授

Professor, Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Kokushikan University.

ルの不思議さを味わってもらおうと考えている。

2. フラクタルとは

私たちは、目の前にある物の形を見るときにまず細かいことは気にせず、だいたいの輪郭をつかみ、その後で気になる細部を良く見ることが多い。この時、肉眼で不十分ならばルーペを用い、それでも満足できなければ顕微鏡などの器具を用いてその一部を拡大してみる。すると大ざっぱに見ていたときには見えなかった（または、見過ごしていた）細かい構造に気づく。日頃私たちはこのような経験を何度となくしているが、しかし次のような疑問を持った人は意外に少ないのではないだろうか。ルーペで拡大された図や、顕微鏡でさらに拡大された図と元の図との間には、一体どのような関係があるのだろうか。人工的に作った形の中には、これらの間には何も関係を見いだせないが、自然界に存在する形の大部分にはある一定の非常に簡単な法則が成り立っていることがマンデルブロー¹⁾の研究から明らかになってきた。これは自己相似とよばれる概念で、倍率を適当に調節した顕微鏡で見た図が元の図と同じ形をしていることを意味している。この顕微鏡で見た図をさらに拡大するとやはり元の図と同じ形が見られる。このように全体図と部分図が入れ子構造（ロシアのマトリョーシカ人形のように、人形の中に同じ形の人形がつぎからつぎに入っている構造）になっている図は自己相似を持った図と呼ばれる。この概念をもう少し一般化して、全体図の持っている性質と同じ性質を持った部分図が入れ子構造になっている図形をフラクタル図形という。この図形の特徴は、図形を特徴づける長さが無いという点である。例えば、円はその半径によって特徴づけられるし、正方形は、その一辺の長さによって特徴づけられる。ところが、自己相似をもったフラクタル図形では、部分図が任意に細かい構造を持つので特徴的な長さが無い。後述するようにフラクタル図形を定量的に特徴づける量としてフラクタル次元がある。次にフラクタル図形の具体例をいくつかあげて説明してみよう。

(1) 海岸線

縮尺の大きい地図で見ると滑らかに見える部分も、縮尺の小さい地図で拡大してみるとギザギザのより細かい海岸線の出入りが見えてくる。さらに小さい縮尺の地図を使えば、さらに複雑な海岸線の出入りが見えてくる。この時、縮尺をかえて見えてくるギザギザには自己相似性がある。松島のように複雑に入り組んだ海岸線のフラクタル次元は、比較的滑らかな海岸線のフラクタル次元より大きい。

(2) 雲の形

だいたいの雲の輪郭を描くには数個の円弧の組み合わせで十分であるが、本当に雲らしい感じを出すためには無数に多くの異なった半径の円弧を必要とする。実際の雲の形はこ

これらの円弧が自己相似的に組み合わさってできている。

(3) 雷の放電図

落雷の写真を見ると稲妻が細かく枝分れしているのを見ることができる。どの一部をとってみてもさらに細かく枝分れしている。この枝分れの仕方は、自己相似的になっている。この構造はドイツ人、リヒテンベルクによって約180年前に初めて発見された。雷のゴロゴロという音は、放電によるジュール熱によって空気が急激に膨張し、その結果生ずる衝撃波の音である。従ってこのゴロゴロという音は、空間的、時間的に自己相似的に広がったフラクタル構造を音で聞いていることに対応している。

(4) 山の形状

山の形状を最も単純な形で描くとしたら、それは三角形であろう。実際の山の尾根は、ギザギザしていて、細かく分析してみると様々な辺の長さを持った三角形が自己相似的に組み合わさってできていることが分かる。

(5) 川の形

川の支流の合流の仕方も、フラクタル的になっている。アマゾン川のフラクタル次元は、ナイル川のフラクタル次元よりも大きい。これは、多雨地帯にある川は、砂漠にある川よりも支流の数が多いことに対応している。

(6) 所得の分布

アメリカにおける1935年から1936年までの所得の分布を分析してみると、高所得者の上位1%はフラクタル分布をしていて残りの99%は対数正規分布をしていることが分っている。言い換えると庶民階級と金持ち階級の分布がはっきり区別できることを意味している³⁾。

(7) 株価の変動

株価の変動は、非常に激しく上下し、まったくランダムでほとんど規則性はないように感じるが、マンデルブローは、次のような法則を発見した¹⁾。

(a)単位時間当たりの株価の変動の分布は、特性指数1.7の対称な安定分布に従う。

(b)単位時間を大きくとっても小さくとっても、この分布は相似である。

小口投資家が少数の株を売買するときの感覚と、大口投資家が大量の株を売買する時の感覚はまったく同一で自己相似的になっていることを意味している。

上記具体例は、我々の身近にあるものであるが、これ以外にも様々な分野でフラクタル構造を持った形や現象が見つかっている²⁾。

従来は、主観的にしか評価ができなかった形の評価をフラクタル次元を用いて数量的にすることも可能である。例えば、街の美しさとフラクタル次元はどのような関係になっているのだ

ろう。町の建物の高さや、1区画の大きさ等に注目してパリのフラクタル次元と東京のフラクタル次元を比較することはとても興味あることである。最近では、画像処理にもフラクタル的手法が使われている。画像の一部がノイズ等によって乱れているときにフラクタル的に修正すると自然な像が得られるそうである。これは、私たちが日常知らず知らずのうちにフラクタル図形を見慣れているので、そのようなカモフラージュをされるとうまくごまかされてしまうのだろう。

現在、フラクタル図形を用いた最も華やかな分野はコンピュータ・グラフィックスの世界である。フラクタル図形の特徴がその自己相似性にあることが分かったので、それを式を用いて描くことはコンピュータの最も得意とするところである。建築の分野でも、インテリアデザインなどにフラクタル図形が利用されている。

3. 簡単なフラクタル図形とそのフラクタル次元

コッホ曲線と呼ばれるフラクタル図形の描き方を図1で説明しよう。まず一つの線分を三等分し ($n=0$ の図) 真ん中の部分を消してその上に正三角形を描く ($n=1$ の図)。この操作を各辺について何回も繰り返す。2回繰り返したものが $n=2$ の図で、6回繰り返したものが $n=6$ の図である。描き方から明らかなようにコッホ曲線は自己相似的である。面白いのは、この曲線の次元である。普通私たちが知っている次元は、滑らかな線は1次元、滑らかな面は

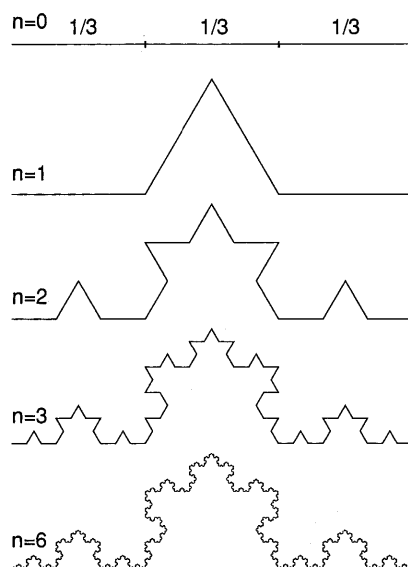


図1 コッホ曲線

2次元、立体は3次元である。最も簡単な次元の定義は、線分を例にとると次のようである。長さ1の直線を長さ1/3の物差しで覆うと物差しの数は3個必要である。長さが $(1/3)^2$ の物差しで覆うのには 3^2 個必要である。一般に $1/r$ の長さの物差しで覆うと r^d 個必要である。この時、指数の d がこの直線の次元が1次元であることを意味している。この定義をコッホ曲線に適用してみると、直線の場合と異なって1/3の長さの物差しで覆うには上に出た三角形のために4個必要になる。 $(1/3)^2$ の長さの物差しで覆うのには 4^2 個必要とする。一般に $1/r$ の長さの物差しで覆うのには $r^{\log_3 4}$ 個必要である。従ってコッホ曲線の次元は $\log_3 4 = 1.2618\cdots$ となる。つまりコッホ曲線は1次元と2次元の間の図形であることが分る。この中途半端な次元が、フラクタル (Fractal) の語源でもある。Fractalはラテン語の fractus や英語の fractional (少数の), fracture (破砕) を元に、マルデルブローが1975年に作った言葉である。このような次元の定義は、面や立体にも拡張できて、実際のフラクタル図形の次元を決めるのに役立っている。

4. 物理実験で使われているフラクタルの基本図形

(1) コッホ曲線とフラクタルの枝

コッホ曲線をパソコンで描くための BASIC で書かれたプログラムを、リスト1に示した。リスト1を少し手直しすると、木の枝に似た「フラクタルの枝」と呼ばれる図形(図2)が得られる。プログラムの変更箇所はリスト1-1に示した。

上記2例は、フラクタル図形を作るべくして作ったプログラムであるが、式の計算の結果がフラクタルになる例もある。これは、式の計算過程が自己相似的になっているためと思われる。つぎの3つはその例である。

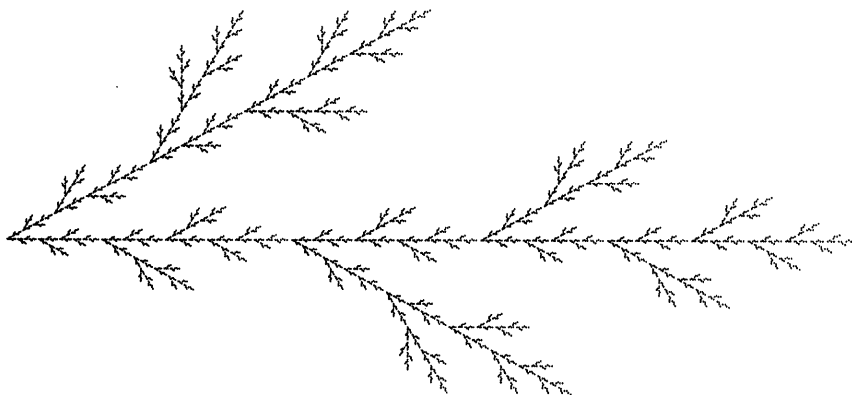


図2 フラクタルの枝

リスト 1

```

100 '
110 'VON KOCH CURVE (N88-BASIC)
120 '
130 N=12 : PI=3.14159
140 DIM X(2^(N+1)-2),Y(2^(N+1)-2)
150 SCREEN 3 : CONSOLE ,,0 : CLS 3
160 WINDOW(0,-2/3)-(1,0)
170 '
180 A=SQR(1/3)*COS(PI/6)
190 B=SQR(1/3)*SIN(PI/6)
200 A1=A : A2=B : A3=B : A4=-A
210 B1=A : B2=-B : B3=-B : B4=-A
220 X(0)=0 : Y(0)=0
230 FOR M=1 TO N
240 L2=2^(M-1)-1 : L1=L2*2+1 : L3=L1*2
250 FOR K=0 TO L2
260 XX=X(L2+K) : YY=Y(L2+K)
270 X(L1+K)=A1*XX+A2*YY
280 Y(L1+K)=A3*XX+A4*YY
290 X(L3-K)=B1*XX+B2*YY+1-B1
300 Y(L3-K)=B3*XX+B4*YY-B3
310 PSET (X(L1+K),-Y(L1+K)),7
320 PSET (X(L3-K),-Y(L3-K)),7
330 NEXT K : NEXT M
340 STOP : END

```

リスト 1-1

```

110 'FRACTAL BRANCH
160 WINDOW (0, -1/3)-(1, 1/3)
210 C=2/3: B1=C: B2=0: B3=0: B4=-C

```

(2) セル・オートマトン

空間の各点に数値を対応させ、その数値の間に簡単な計算規則を仮定してその数値が時間的にどのように発展するかを調べるモデルである。最も単純なモデルは、次のようなものである。図3のように横軸方向に位置座標 x 、縦軸方向に時間座標 t をとる。両方向とも一定の間隔で番号をつけ時刻 k のとき i 番目の座標の値を $x_k(i)$ で表す。セル・オートマトンでは $x_k(i)$ が1つ前の時刻 $(k-1)$ での $x_{k-1}(i)$ またはその付近の値だけで決定されるものとする。

例えば、 i 番目と $(i-1)$ 番目の値から決定されるとすれば、

$$x_k(i) = x_{k-1}(i) + x_{k-1}(i-1) \quad (1)$$

と表すことができる。 $x_k(i)$ の取りうる値は有限 (例えば最も簡単な場合 0 か 1 しか取らない) とする。そして $x_k(i)$ の値を色に対応させ (例えば 0 のとき黒 1 のとき白)、時刻 0 での位置座標 $x_0(i)$ ($i=0, 1, 2, \dots$) を与えるとその後の時刻のパターンが上の規則で決まり、 $x-t$ 平面全体のパターンが得られる。プログラムとそのパターン例をリスト 2 と図 4 に与える。図 4 はシルピンスキーのガスケットと呼ばれる。不思議なことに、このように簡単な規則からもフラ

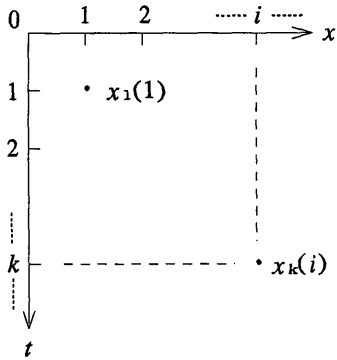


図3 $x-t$ 平面

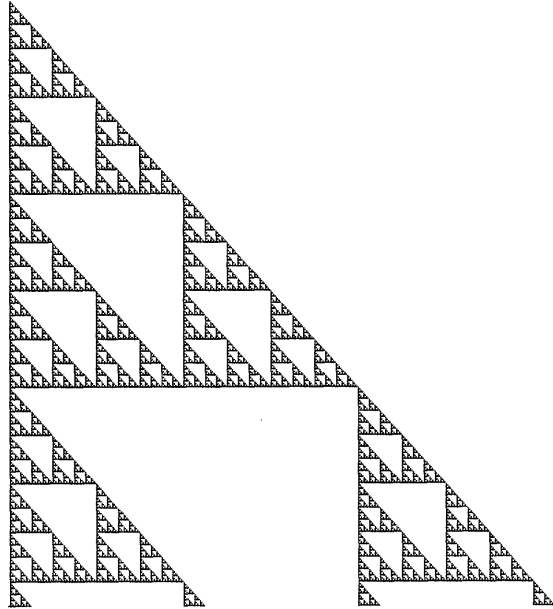


図4 シルピンスキーのガスケット

リスト 2

```

100 '
110 'CELL AUTOMATON (N88-BASIC)
120 '
130 NX=639:NT=399
140 DIM X(NX+1), Y(NX+1)
150 SCREEN 3:CONSOLE ,,0 :CLS 3
160 '
170 FOR I=0 TO NX
180 X(I)=0
190 NEXT I
200 X(1)=1
210 FOR I=0 TO NX
220 PSET (I,0),X(I)
230 NEXT I
240 '
250 FOR N=1 TO NT
260 Y(0)=(X(0)+X(NX)) MOD 2
270 PSET (0,N),Y(0)
280 FOR I=1 TO NX
290 Y(I)=(X(I)+X(I-1)) MOD 2
300 PSET (I,N),Y(I)
310 NEXT I
320 FOR I=0 TO NX
330 X(I)=Y(I)
340 NEXT I: NEXT N
350 STOP : END
    
```

クタリ図形が得られる。

(3) ジュリア集合

これは、数学の問題から発生したフラクタル図形である。平面から平面への写像 $\vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n)$ で $n \rightarrow \infty$ において $|\vec{x}_n| \rightarrow \infty$ になる初期値 $\{\vec{x}_0\}$ の集合と $|\vec{x}_n| < \infty$ になる初期値 $\{\vec{x}_0\}$ の集合の境界をジュリア集合という。簡単な例で説明しよう。複素数 z に関して関数 $f(z)$ を2次式

$$f(z) = az(1-z) \quad (2)$$

で定義する。ここで a も複素数である。ある z の値 $z=z_0$ から出発して $f(z_0)$ を計算すると新しい複素数 $z_1=f(z_0)$ が得られる。これを繰り返すと n 回目には、複素数 $z_n=f(z_{n-1})$ が得られる。この操作を多数回繰り返したとき、複素数 z_n の絶対値は、どんどん大きくなる場合と、何回繰り返してもあまり大きくならない場合とがある。 z_0 の値をいろいろと変えた時、前者と後者の境界を与える z_0 の集まりをジュリア集合という。

このジュリア集合の形が、フラクタル構造をしているのは、大変驚くべきことである。このプログラムとフラクタルの図形をリスト3と図5に示した。

リスト 3

```

100 'JULIA SET      (Quick BASIC)
110 DEFINT B-C, E-V
120 AR = 3.3: AI = 0: ML = 25: MS = 30000
130 '
140 S = 4 : 'S=1 (full scale)
150 XL = 0: XU = 1: YL = -.25: YU = .25
160 NX = 640 ¥ S - 1: NY = 400 ¥ S - 1: NX! = NX: NY! = NY
170 SCREEN 89:CLS:WINDOW (0,0)-(NX,NY):VIEW (0,0)-(NX!,NY!)
180 DX = (XU - XL) / (NX + 1): DY = (YU - YL) / (NY + 1)
190 X = XL - DX
200 FOR I = 0 TO NX
210   X = X + DX: Y = YL - DY
220   FOR J = .0 TO NY
230     Y = Y + DY: ZR = X: ZI = Y
240     FOR K = 1 TO ML
250       ZR2 = ZR * ZR: ZI2 = ZI * ZI
260       IF (ZR2 + ZI2) > MS THEN GOTO 310
270       ZZR = ZR - ZR2 + ZI2: ZZI = ZI * (1 - 2 * ZR)
280       ZR = AR * ZZR - AI * ZZI: ZI = AR * ZZI + AI * ZZR
290     NEXT K
300     PSET (I, J), 2
310     IF INKEY$ <> "" THEN END
320   NEXT J
330 NEXT I
340 IF INKEY$ <> "" THEN END
350 GOTO 340

```

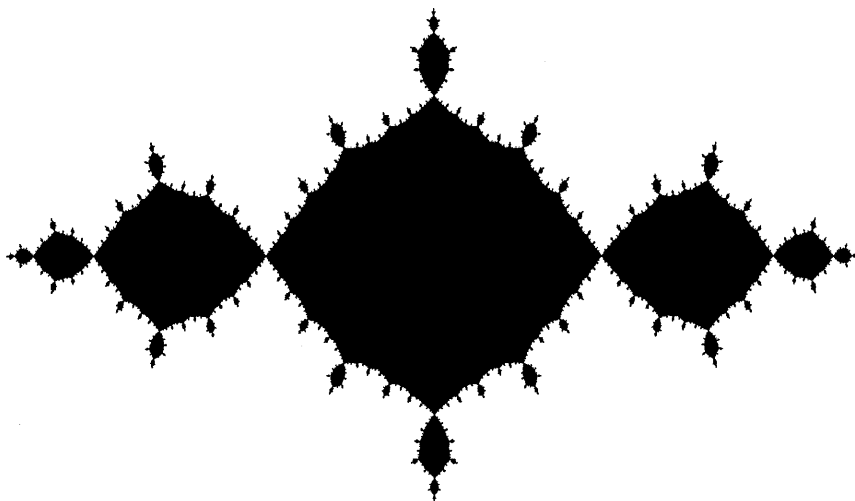



図5 ジュリア集合 [(2)式 $a=3.3+0i$]

(4) マンデルブロー集合

ジュリア集合では、複素パラメータ a を固定したが、今度は初期値を $z_0=0$ に固定して複素数 a の値をいろいろと変えて (3) と同じ操作を繰り返したときに $|z_n|$ が有限の値にとどまる複素数 a の集合をマンデルブロー集合という。プログラムとそのフラクタル図形をリスト 3-3 と図 6 に示した。

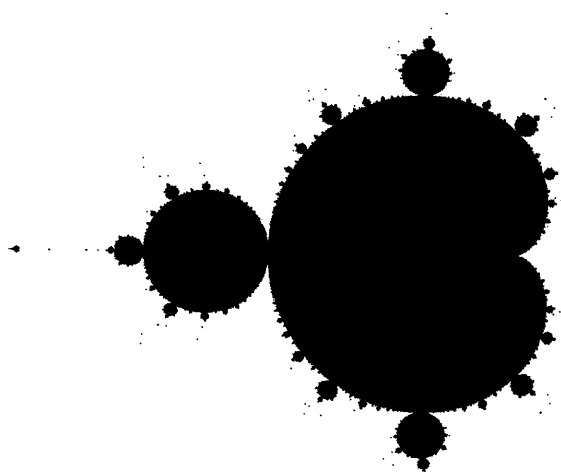


図6 マンデルブロー集合

5. プログラムの解説

リスト1 コッホ曲線とフラクタルの枝

このプログラムではコッホ曲線の描き方で述べた三角形の頂点に PSET 命令で点のみ（行番号310で左部分，320で右部分を）を表し，辺は表示しない（図1参照）。しかし，Nを十分大きくとると（行番号130では $N=12$ ）点数が多くなるので，図1の $n=6$ の時と同じようなパターンが得られる。この方法だと，180～220で定義したパラメータを変えた時に得られるほとんどの図形は，フラクタルの性質を失っておらず，バリエーションが豊富である。そのバリエーションの一つとして「フラクタルの枝」があり，リスト1-1に変更箇所のみを示した。210のパラメータのみを変えただけで「枝」になるが，下半分が切れてしまうので，160で WINDOW を変えて図形を中央に移動している。180と190で定義している $\pi/6$ は，枝分かれの角度を決めている。

リスト2 セル・オートマン

160～190では初期値（時刻 $N=0$ における $X(I)$ の値）を決めている。このプログラムの場合 $I=1$ の値 $X(1)=1$ とし（それ以外は0），200～220で画面の座標 $(I, 0)$ 初期値 $X(I)$ を色に対応させてドットを表示する。240～330では，時刻 $N=1$ 以後のパターンを表示する。まず，260では，画面座標 $(0, N)$ に250で決まる $Y(0)$ の色でドットを表示し，続いて，290では，画面座標 (I, N) 280で決まる $Y(I)$ の色のドットを表示する。 $Y(I)$ は，MOD 2にすると0か1しか取らないので黒か青になるが，MOD 3～MOD 16までの値にすると3～16色になり得る。310～330で $Y(I)$ を $X(I)$ に入れ替えをしてから，240へ戻る。このようにして時刻 N を増加させていくと，初めは1点しか表示しなかったパターンが末広がり発展していく。初期値や式を変えたりすると，バラエティーに富んだパターンが得られる。例えば280を $Y(I) = (X(I) + X(I-1) + X(I+1)) \text{ MOD } 2$ とし，190の初期値 $X(320)=1$ （ほかは0）とすると， $(I+1)$ 番目の影響を受けるので左右に発展したパターンとなる。

リスト3 ジュリア集合とマルデルブロー集合

ジュリア集合の場合，原理的に計算の反復回数が非常に多いため，より高速な Quick BASIC を用いた。120の， $AR=3.3$ と $AI=0$ は複素パラメータ a の実部と虚部を表す。数学的には反復回数は ∞ で，ジュリア集合を判定する複素数 z_n の絶対値は有限であればよいのだが，コンピュータで処理する場合は，反復回数を ML ， $|z_n|$ の上限値を MS とした。140～170は画面に描く面積を決めている。 $S=1$ にすると画面いっぱいに表示される。 $S=4$ で，縦横それぞれ $1/4$ のパターンが $S=1$ に対して相似形で左上に表示される。表示画面を小さくすると，作画時間が短縮されるので便利である。なお，150では作画範囲の左下座標 (XL, YL) ，と右上

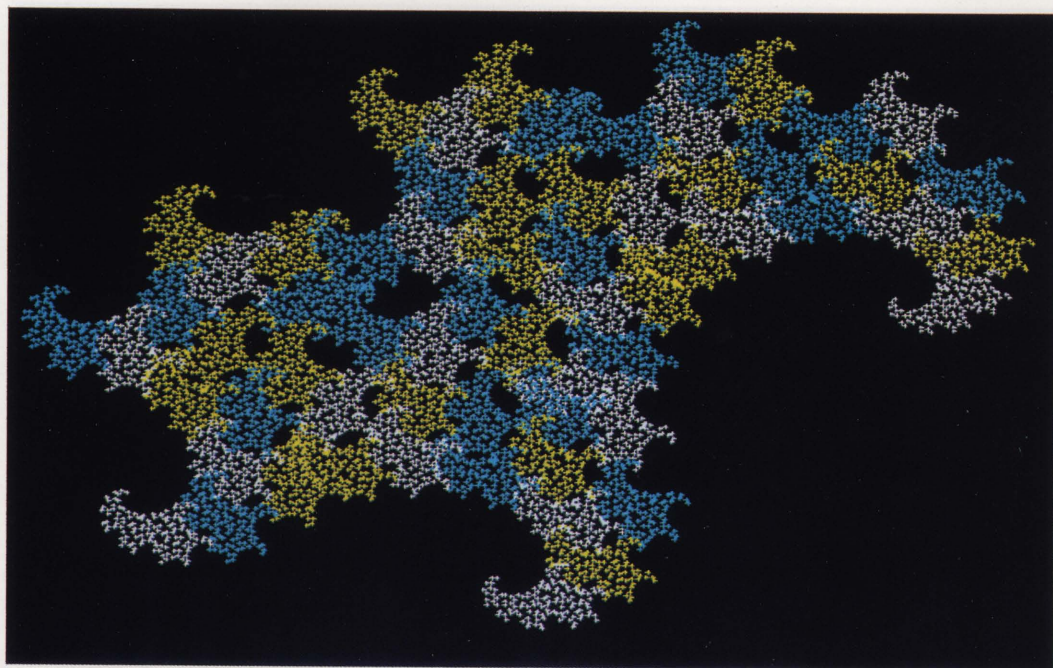


図 9-1



図 9-2

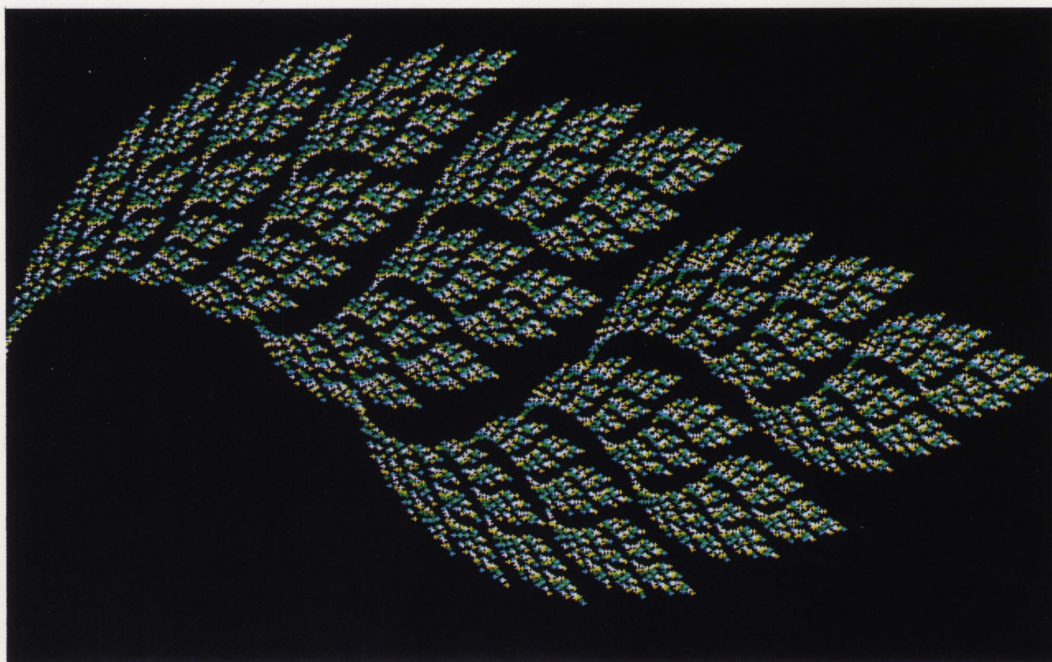


図 9-3

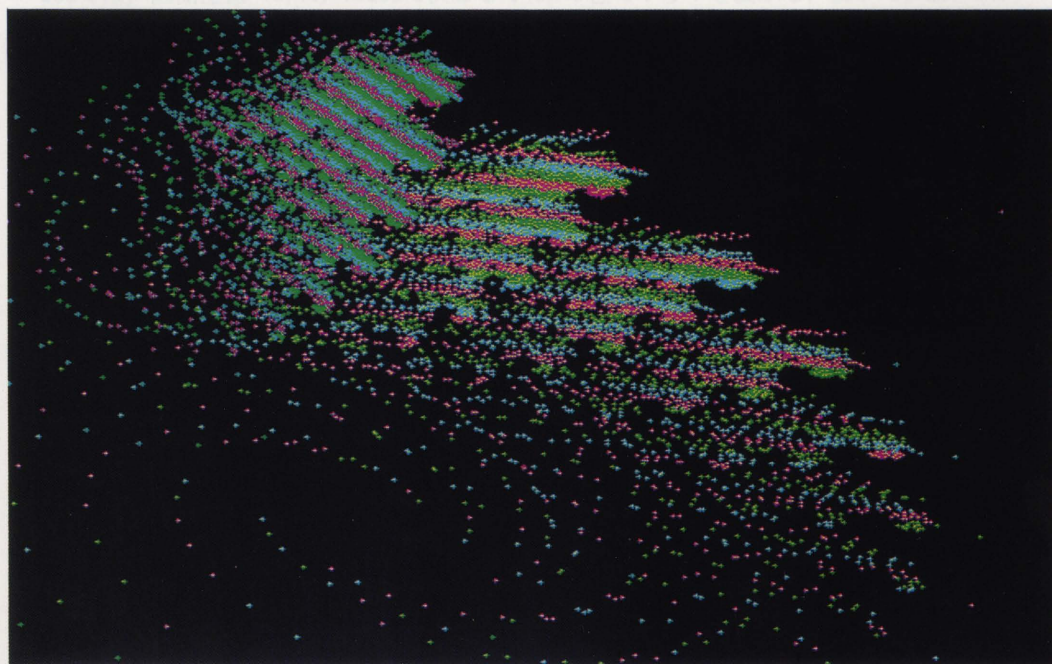


図 9-4

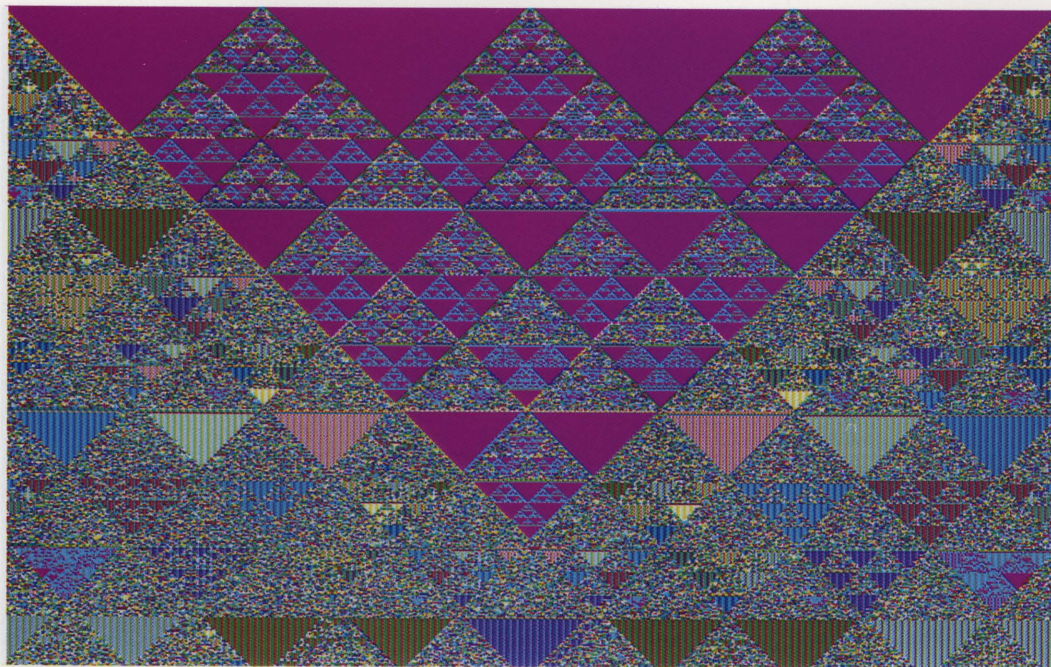


図10-1

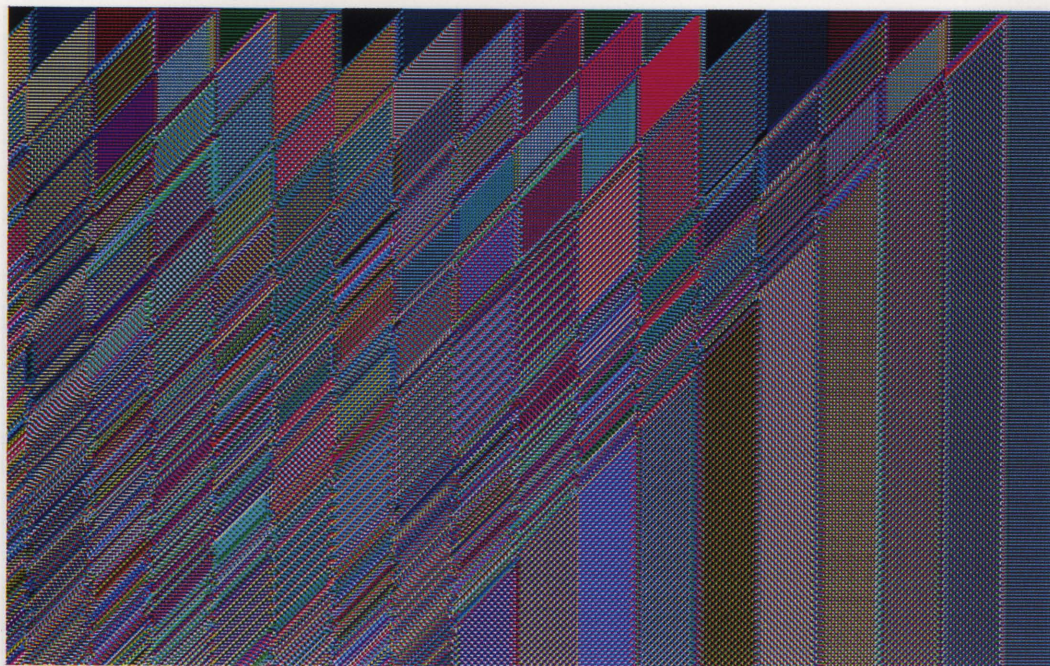


図10-2

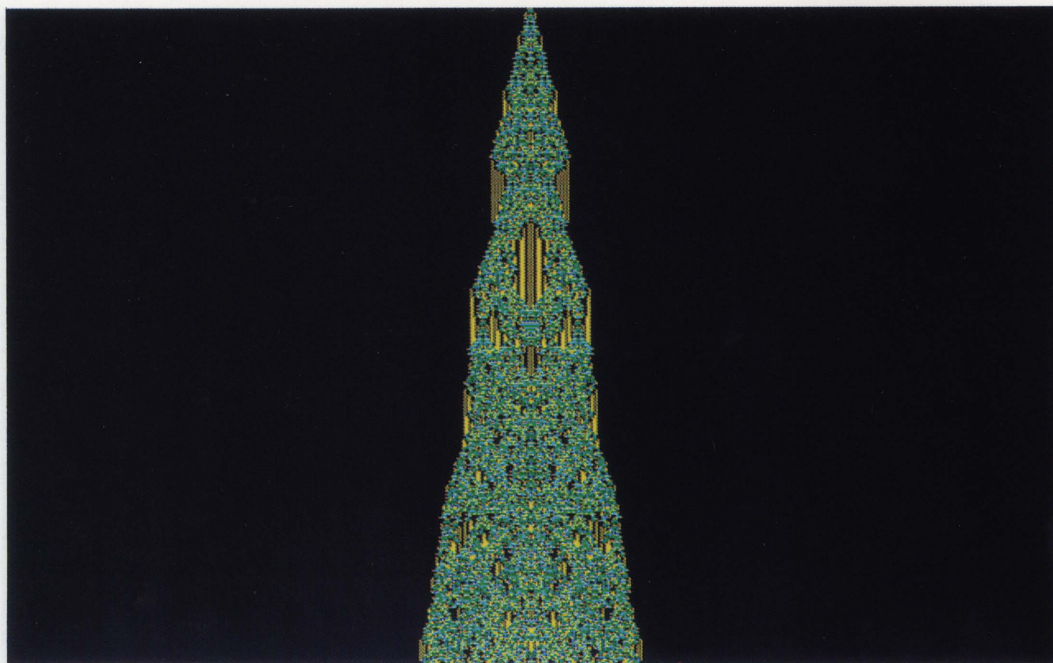


図10-3

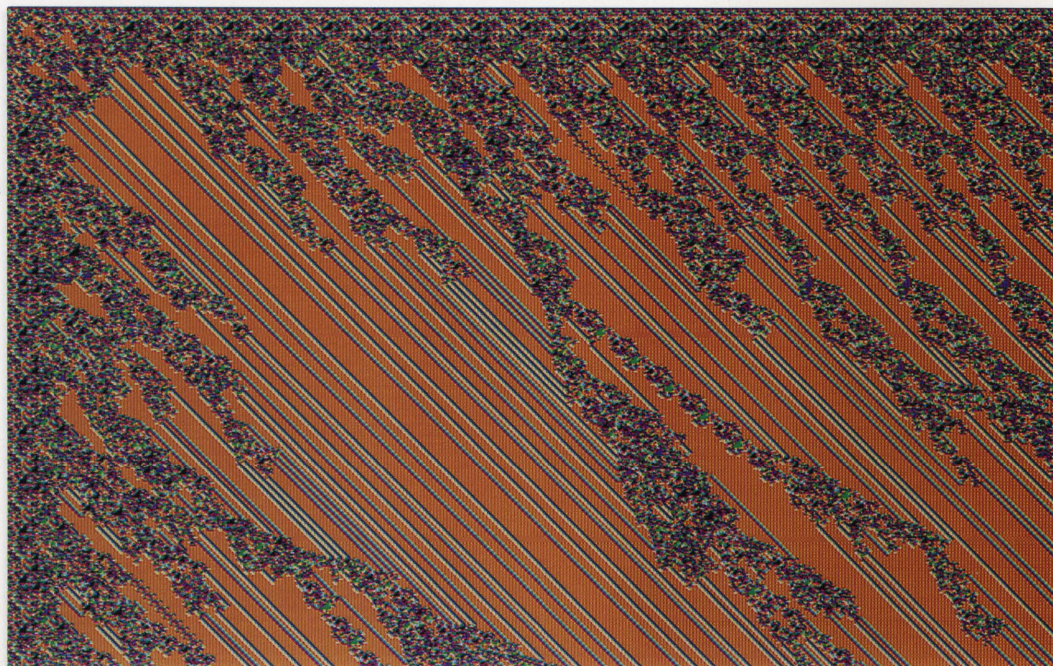


図10-4

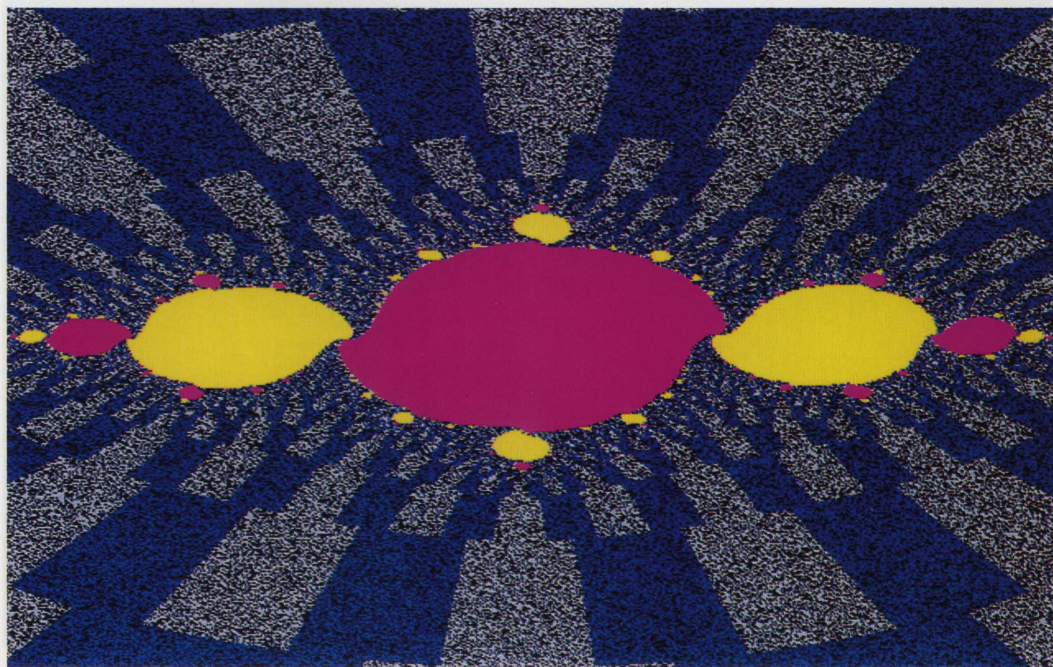


図11-1



図11-2

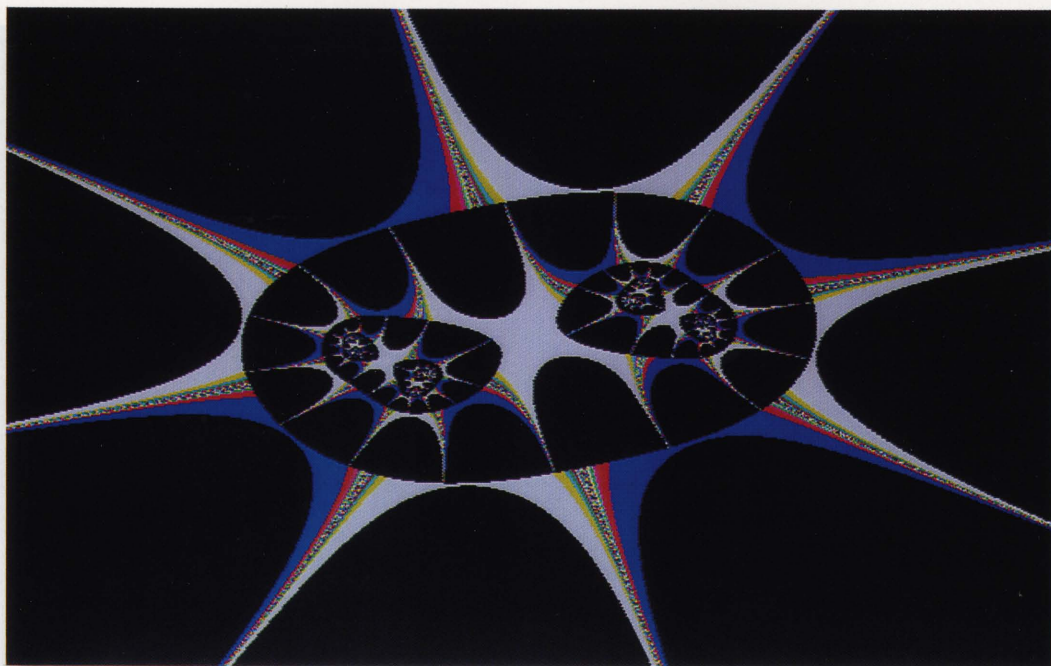


図11-3



図11-4

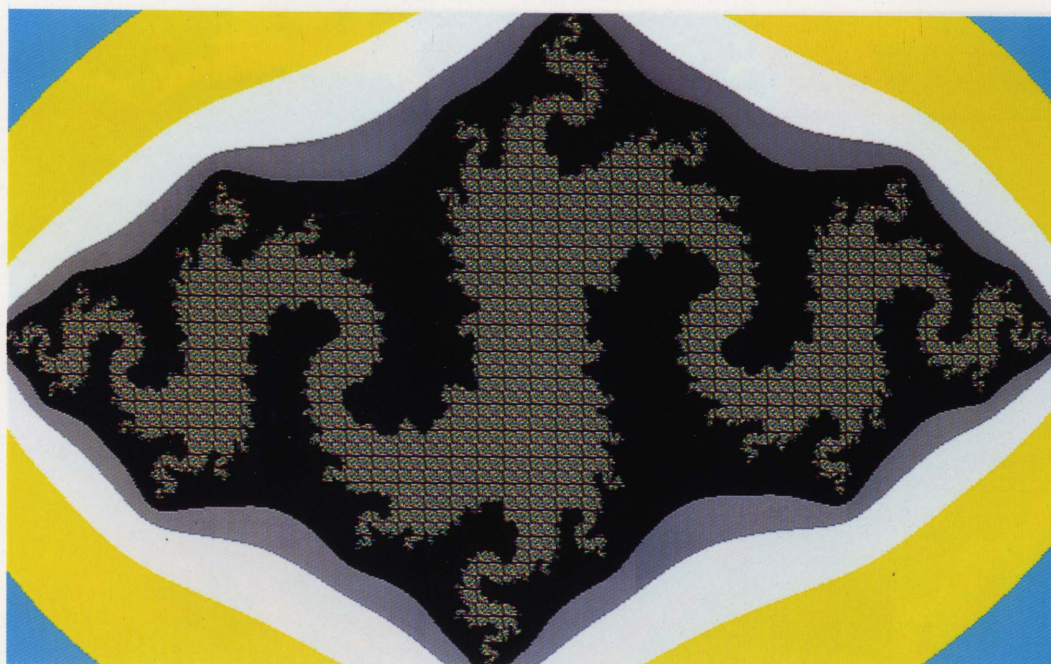


図11-5

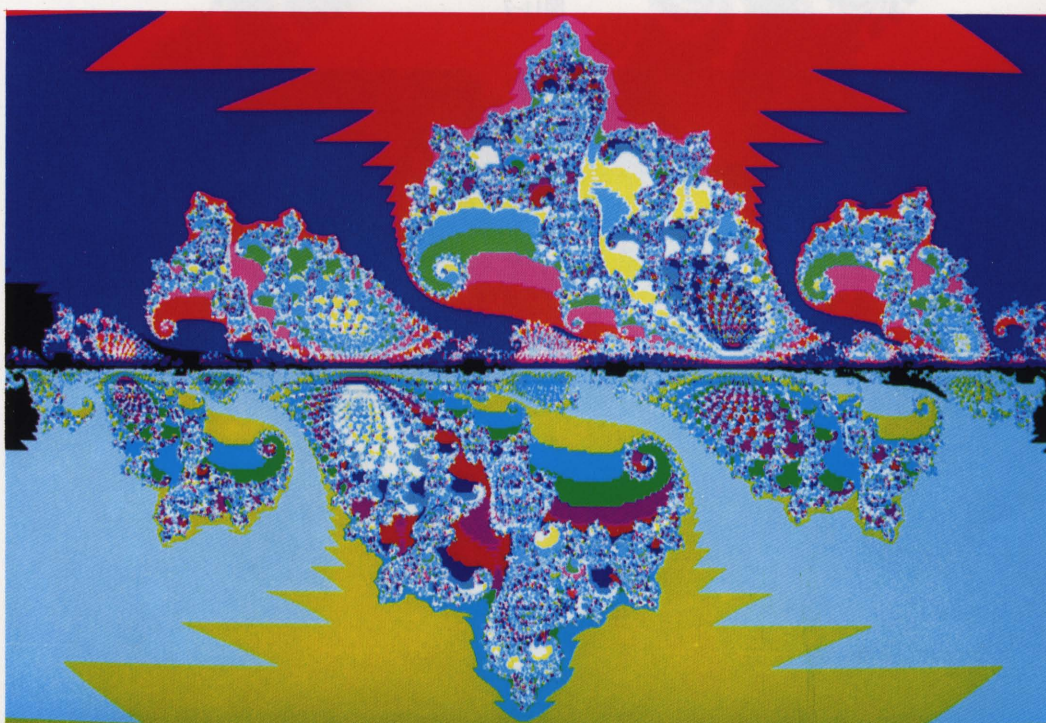


図11-6

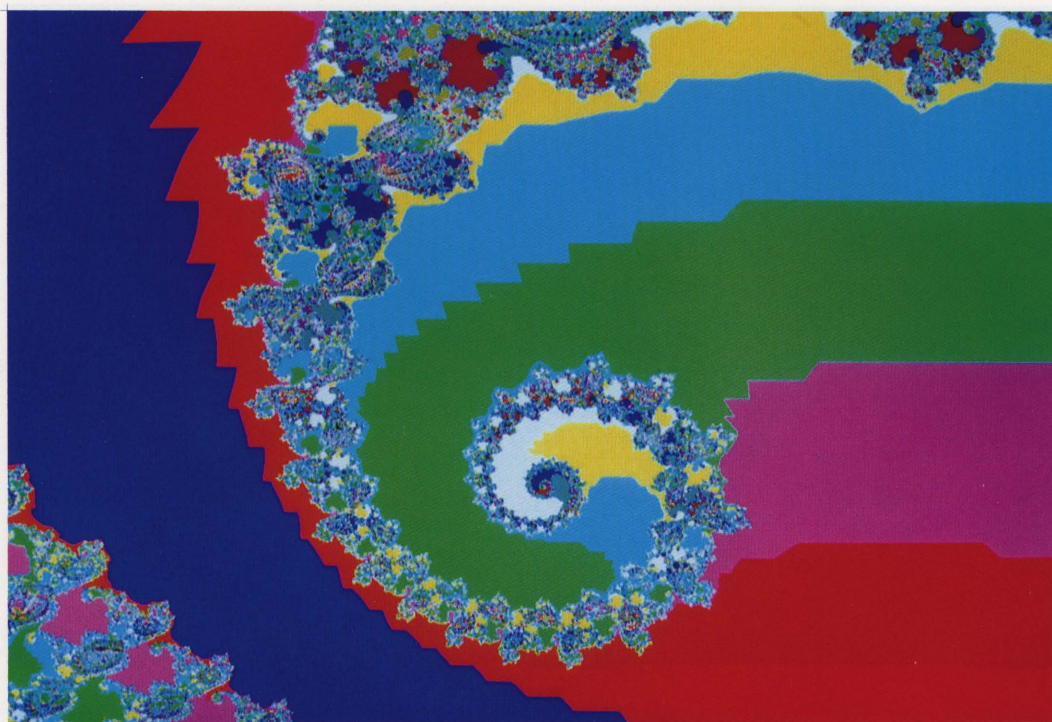


図11-7

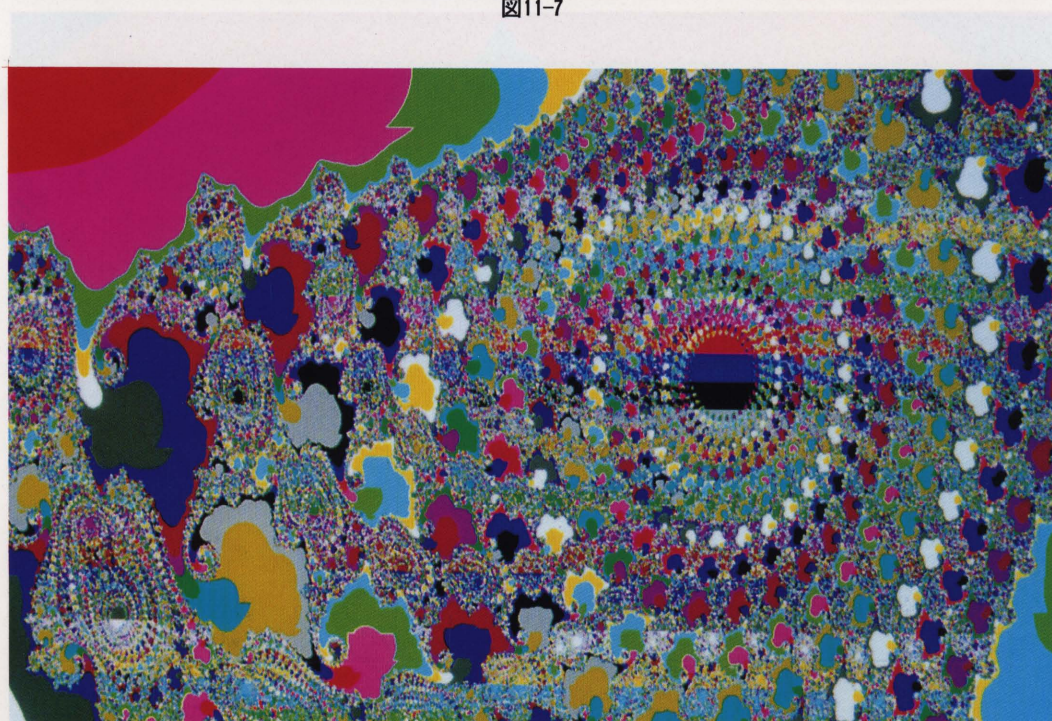


図11-8

座標 (XU, YU) を指定している。180の DX と DY は、1 ドットあたりの横と縦の値である。240～290では、ある z の初期値 z_0 (実部 X と虚部 Y) がジュリア集合を与えるか否かを計算する。260で $|z_n|$ が MS より大きかったらドットを表示せず、ML 回繰返しても小さかった場合、300で画面座標 (I, J) にドットを表示する。作画範囲の全てに対し、これらの操作を行うことにより、境界線がフラクタル構造をした図形となる。この境界線を与える z_0 の集合をジュリア集合という。元の式を変えることもできる。例えば、図7は2次式

$$f(z)=z^2+a \quad (a=0.32+0.043i) \quad (3)$$

で ML=300としたときに得られる⁷⁾。元の式を3次式

$$f(z)=z^3+a \quad (a=0.5+0.85i) \quad (4)$$

で置き換え、ML=200とすると図8が得られる。いずれも典型的なフラクタル構造をしている。これらのリストは変更箇所のみをリスト3-1とリスト3-2に示した。

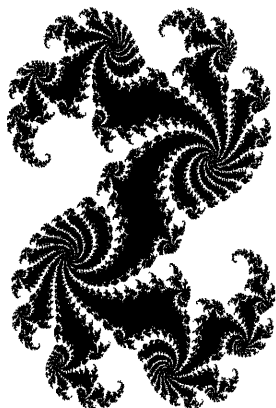


図7 ジュリア集合：(3)式 $a=0.32+0.043i$

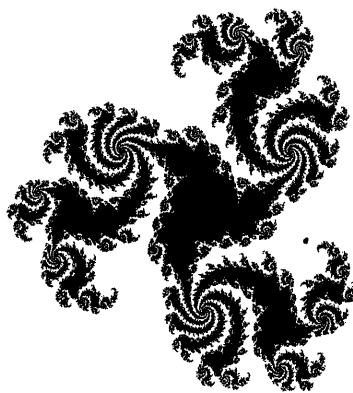


図8 ジュリア集合：(4)式 $a=0.5+0.85i$

リスト3-1

```
100 'JULIA SET (F(Z)=Z^2+A)
120 AR = .32: AI = .043: ML = 300: MS = 30000
150 XL = -2: XU = 2: YL = -1.2: YU = 1.2
270 ' ...削除...
280 ZI = 2 * ZR * ZI + AI: ZR = ZR2 - ZI2 + AR
```

リスト3-2

```
100 'JULIA SET (F(Z)=Z^3+A)
120 AR = .5: AI = .085: ML = 200: MS = 30000
150 XL = -2: XU = 2: YL = -1.2: YU = 1.2
250 ZR3 = ZR * ZR * ZR: ZI3 = ZI * ZI * ZI
260 IF (ZR * ZR + ZI * ZI) > MS THEN GOTO 310
270 ZZR = 3 * ZR * ZI * ZI: ZZI = 3 * ZR * ZR * ZI
280 ZR = ZR3 - ZZR + AR: ZI = ZZI - ZI3 + AI
```

同一の式で AR, AI や ML を変えてもパターンが変化する。また、作画範囲を変えたり境界の内外のドットの色づけをすると、これらの中には数学的な意味でのジュリア集合と呼べない場合もあるが、一層豊かなフラクタルパターンが得られる。

リスト 3-1 をリスト 3-3 のように変更すると(3)式のマンデルブロー集合のパターンを描く。230で、ある複素パラメータ a の実部を $AR=X$, 虚部を $AL=Y$ とおき、初期値 $z_0=0$ (実部 $ZR=0$, 虚部 $ZI=0$) として、後はジュリア集合と全く同じプログラムで、 $|z_n|$ が有限の値になるか否かを調べて図形化する。(4)式を使って得られるマンデルブロー集合のパターンは省略したが、図 6 とはまったく異なる。

リスト 3-3

```
100 'MANDELBROT SET      (F(Z)=Z^2+A)
130 ML = 100: MS = 30000
150 XL = -2.4: XU = 1.2: YL = -1.2: YU = 1.2
230   Y = Y + DY: AR = X: AI = Y: ZR = 0: ZI = 0
```

6. 学生のオリジナル作品

図 9-1～図 11-8 は基本プログラムをリスト 4-1～リスト 6-8 のように変更してできた作品である。図 9-1 はコッホ曲線、図 9-2～図 9-4 はフラクタルの枝、図 10-1～図 10-4 はセル・オートマトン、図 11-1～図 11-7 はジュリア集合をそれぞれもとにしている。ただし、図 11-7 と図 11-8 は図 11-6 の中央付近を拡大した図である。

リスト 4-1 (N88)

```
130 N=13 : PI=3.14159
160 WINDOW(-1.8/4,-.63)-(2.5/2,.8)
180 A=SQR(1/2)*COS(PI/6)
190 B=SQR(1/2)*SIN(PI/6)
200 A1=B : A2=A : A3=-A: A4=B
290   X(L3-K)=B1*XX-B2*YY+1-B1
300   Y(L3-K)=B3*XX-B4*YY-B3
305   C=K/4^4 MOD 3+5 : 'PRINT K
310   CIRCLE (X(L1+K),-Y(L1+K)),.003,C
320   CIRCLE (X(L3-K),-Y(L3-K)),.003,C
```

リスト 4-2 (N88)

```
130 N=13 : PI=3.14159
160 WINDOW(-.2,-.7)-(1,1.5)
230 FOR M=0 TO N
300   Y(L3-K)=B4*1.2*YY-B1
310   PSET (X(L1+K),-Y(L1+K)),6
320   PSET (X(L3-K),-Y(L3-K)),4
```

フラクタル図形

リスト4-3 (N88)

```

130 N=13 : PI=3.14159
160 WINDOW(0,-1/7)-(1,1/9)
180 A=SQR(1/125)*SIN(PI/2)
190 B=SQR(1/2)*COS(PI/20000)
270 X(L1+K)=A3*XX+A4*YY
280 Y(L1+K)=A1*XX+A2*YY
300 Y(L3-K)=B3*XX+B4*YY-B3
305 COL=K MOD 4+4
310 CIRCLE(X(L1+K),-Y(L1+K)),.002,COL,,,F
320 CIRCLE(X(L3-K),-Y(L3-K)),.002,COL,,,F

```

リスト4-4 (N88)

```

130 N=13 : PI=3.14159
160 WINDOW(-2,-.8)-(3,5)
180 B=SQR(1/5)*COS(PI/4)
190 A=SQR(1/5)*SIN(PI/3)
210 C=1.5/7: B1=C : B2=1 : B3=.8 : B4=-C
220 X(0)=5 : Y(0)=3
260 YY=X(L2+K) : XX=Y(L2+K)
305 C=ABS(XX*10) MOD 3+1
310 CIRCLE(X(L1+K),-Y(L1+K)),.005,C
320 CIRCLE(X(L3-K),-Y(L3-K)),.005,C
325 PSET(X(L3-K),-Y(L3-K)),6

```

リスト5-1 (N88)

```

155 COLOR,,,2
200 X(158)=1:X(319)=1:X(477)=1
220 PSET(I,0),X(I+1)
260 Y(0)=(X(0)*X(NX)) MOD 9+5
280 FOR I=3 TO NX
290 Y(I)=(X(I)+X(I-1)+X(I+1)) MOD 9+5
300 PSET(I+3,N+3),Y(I+1)

```

リスト5-2 (N88)

```

260 Y(0)=(X(0)+NX) MOD 3
270 PSET(0,N),Y(1)
290 Y(I)=(.05*X(I)+.027*I+5*X(I+1)) MOD 6

```

リスト5-3 (N88)

```

200 X(319)=1
290 Y(I)=(X(I)+2.7*X(I-1)+2.7*X(I+1)) MOD 4
295 IF Y(I)=0 THEN C=0 ELSE C=3
300 PSET(I,N),Y(I)+C

```

リスト5-4 (QB)

```

150 SCREEN 89 :CLS
200 X(1)=5

```

```

260 Y(0)=2.15*(X(3)+X(120)) MOD 11
290 Y(I)=1.5*(X(I)+X(I-1)) MOD 8
305 X(I)=Y(I)
330 ' X(I)=Y(I)

```

※このプログラムはN88BASICで描かせると内部演算誤差の違いにより同じ図形にならない。

リスト6-1 (QB)

```

120 AR = 3.1: AI = .05: ML = 400: MS = 30000
150 XL = 0: XU = 1: YL = -.65: YU = .65
295 C = (ZR) * 1000 MOD 5 + 1
296 IF C = 1 THEN C = 3 ELSE C = 6
300 PSET (I, J), C: GOTO 320
312 COL = ZR * 1000 MOD 2
315 PSET (I, J), COL

```

リスト6-2 (QB)

```

120 AR = 2.95: AI = .0025: ML = 222: MS = 30000
150 XL = 1: XU = 0: YL = -.25: YU = .25
260 IF (ZR2 + ZI2) > MS THEN W = I + 2 * K MOD 3 + 1: GOTO 300
295 W = SQR(ABS(ZZR)) / ZI MOD 2 + 7
300 PSET (I, J), W

```

リスト6-3 (QB)

```

120 AR = 3.1: AI = 2.6: ML = 60: MS = 300
150 XL = -1: XU = 2: YL = -1.4: YU = 1.4
295 C = B * K / ZR MOD 18
300 PSET (I, J), C: GOTO 320
310 B = AR / ZI * K MOD 18 : PSET (I, J), B

```

リスト6-4 (QB)

```

120 AR = .3: AI = .05: ML = 25: MS = 30000
150 XL = -5: XU = 6: YL = -6: YU = 7.5
295 C = 3.5 * LOG(ABS(ZI)) MOD 16
300 PSET (I, J), C: GOTO 320
315 C = LOG(ABS(ZI)) MOD 6: PSET (I, J), C

```

リスト6-5 (QB)

```

120 AR = 3.1: AI = .2: ML = 25: : MS = 30000
150 XL = 0: XU = 1: YL = -.27: YU = .27
295 Z = (I MOD 16) * (J MOD 16)
300 PSET (I, J), Z: GOTO 320
311 IF K > 8 THEN 320
315 PSET (I, J), K

```

リスト6-6 (QB)

```

120 AR = 3!: AI = .1: ML = 555: MS = 15000
150 XL = 0: XU = 1: YL = -.3: YU = .3
300 ' PSET (I, J), 2

```

315 C = Y * K: PSET (I, J), C

リスト6-7 (QB)

120 AR = 3!: AI = .1: ML = 555: MS = 15000

150 XL = .34: XU = .48: YL = .04825: YU = .13825

300 ' PSET (I, J), 2

315 C = Y * K: PSET (I, J), C

※図11-6の拡大図(中央左上の渦巻き部分)

リスト6-8 (QB)

120 AR = 3!: AI = .1: ML = 555: MS = 15000

150 XL = .45: XU = .55: YL = .175: YU = .225

300 ' PSET (I, J), 2

315 C = Y * K: PSET (I, J), C

※図11-6の拡大図(中央上の中心部分)

お わ り に

学生達が作った作品が見ていると、プログラムに含まれるパラメータや式を少し変更するだけで多様性に富んだフラクタル図形がいたとも簡単に得られることがお分り頂けた事と思う。フラクタル図形の不思議さと奥深さを実感して頂ければ幸いである。この紹介記事の題名はフラクタル図形としたが学生の作品の中には単なる図形を超越して、芸術作品の域に達しているものも見受けられる。フラクタルの概念は、フラクタル図形以外にも適用されつつあり、これからも、多くの成果が期待されている。

最後に、参考文献の概要を述べて小稿を締めくくりたい。まず、文献1)はフラクタルの概念の創始者であるマルデルブローによって書かれた本である。この本はフラクタルという概念がどのようにして創られたのか、またその哲学がどんなものかが分かる名著である。訳本も出ているので文献9)にあげた。フラクタルに関する解りやすい本として、文献2)が薦められる。この本では、フラクタル構造をもつ様々な具体例が説明されている。例えば、木や、脳のしわのフラクタル次元のことなど、非常に興味深い例が載っている。また、本稿で用いたプログラムは、一部は速さの関係で変更を加えたが、2)から引用した。フラクタル構造を持った絵を楽しみたい方には文献7), 8), 10), 11)をお薦めする。フラクタル図形をパソコンで描くためのプログラムが多く載っている本として文献2), 5), 6), 10), 11)をあげておく。

参 考 文 献

- 1) B. B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature (W. H. Freeman and Co., N. Y., 1977)
- 2) 高安秀樹, フラクタル (朝倉書店, 1987).

- 3) E. W. Montroll and M. F. Shlesinger, J. Stat. Phys. 32 (1983) 209.
- 4) J. フェダー (松下貢他訳), フラクタル (哲学出版, 1991).
- 5) 佃勉, フラクタルの世界 (山海堂, 1987).
- 6) 安居院猛, 中島正之, 永江孝規, やさしいフラクタル (工学社, 1990).
- 7) H.-O. バイトゲン, P. H. リヒター (宇敷重広訳), フラクタルの美 (シュプリンガー・フェアラーク東京, 1988).
- 8) H.-O. バイトゲン, D. ザウベ編 (山口昌哉訳), フラクタルイメージ (シュプリンガー・フェアラーク東京, 1990).
- 9) B. B. マンデルブロー, フラクタル幾何学 (広中祐監訳, 日経サイエンス社, 1982).
- 10) 淵上季代絵, フラクタル CG コレクション (サイエンス社, 1987).
- 11) 川上博, カオス CG コレクション (サイエンス社, 1990).