ノート　Note

MIMIC モデルの EM 法による推定について

原田　桂一郎*

On the EM Algorithm for Estimating the MIMIC Model

KEIICHIRO HARADA

Synopsis: This article considers an approach to the formation and estimation procedures for a model with multiple indicators and multiple causes of a single unobservable latent variable. After presenting the model which is called MIMIC model, the EM algorithm for estimating the unknown parameters of this model is provided. Then we discuss on the convergence properties of the EM algorithm. Furthermore, the technique developed above will be applied to an economic analysis.

要旨：本稿は唯一潜在変数に関する多重原因と多元指標の関係をモデル化する方式とその推定の手順を考察している。まず，MIMIC モデルと称するモデルを提示し，そのモデルの未知のパラメーターを推定するために EM 法を取り上げる。次いで，EM 法の収束性について検討し，更に，そこで展開した手法の経済分析への適用を試みる。

1. はじめに

複数の原因（変数）から構成される一つの潜在変数と複数の指標（変数）の関係は MIMIC モデルによって特定化される。Dempster, Laird and Rubin［4］によって，不完備データから最尤推定量を計算する EM 法（EM algorithm）が開発されているが，Chen［3］はこの MIMIC モデルの未知のパラメーターの推定に EM 法を適用している。EM 法による推定では，パラメーターが収束するまで反復計算が行われることになるが，EM 法の収束性の問題に関して Boyles [2] や Wu [7] が検討を重ねている。

本稿では，MIMIC モデルの特定化，その EM 法による推定と収束性について取り扱い，さらに，その手法を恒常所得（測定不可能な潜在変数）の変化が家計最終消費支出の各項目（国民経済計算年報での区分）に与える影響を分析するために適用する。

2. MIMIC モデル

単一の観測不可能な潜在変数が複数の外生変数（原因変数）と攪乱要因の線型関係で表現され，この潜在変数が攪乱要因と共に複数の内生変数（指標）を決定する。このような関係を特定化す

* 政経学部　助教授
Assistant Professor, Division of Politics and Economics

るモデルが，多元指標・多重原因モデル（Multiple Indicators and Multiple Causes Model, 以下では MIMIC モデルと略称）である。この MIMIC モデルは次のように表わされる。

$$\begin{aligned} z &= \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{x}+\varepsilon \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{\beta} z+\boldsymbol{\mu} \end{aligned} \tag{1}$$

（1）式の $\boldsymbol{x}=(x_1x_2\cdots x_k)'$ は観測可能な外生変数ベクトル，$\boldsymbol{y}=(y_1y_2\cdots y_m)'$ は観測可能な内生変数（指標）ベクトル，z は観測不可能な潜在変数（スカラー），$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1\cdots\alpha_k)'$ と $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1\cdots\beta_n)'$ はパラメーター・ベクトルであり，また ε と $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1\cdots\mu_m)'$ は攪乱および攪乱ベクトルを示す。

ここで，攪乱および攪乱ベクトルは相互独立，平均が零である正規分布にしたがう確率変数であると仮定する。すなわち，

$$E(\varepsilon\boldsymbol{\mu}')=\boldsymbol{0}',\quad E(\varepsilon^2)=1,\quad E(\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}')=Ⓗ^2,$$
$$\varepsilon\sim N(0,1),\quad \boldsymbol{\mu}\sim N(\boldsymbol{0},Ⓗ^2)$$

である。なお，$Ⓗ^2$ は要素が θ^2 の対角行列 $(m\times m)$ である。

したがって，（1）式は次のように表現できる。

$$\begin{aligned} z &\sim N(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{x},1) \\ \boldsymbol{y}/z &\sim N(\boldsymbol{\beta} z,Ⓗ^2) \end{aligned} \tag{2}$$

ただし，"$\boldsymbol{y}/z$" は z が与えられたときの $\boldsymbol{y}$ に関する条件付分布を示す。

ところで，z と $\boldsymbol{y}$ の結合密度 $f(z,\boldsymbol{y})$ は，$\boldsymbol{y}$ が与えられたときの z に関する条件付密度 $f(z/\boldsymbol{y})$ と $\boldsymbol{y}$ の周辺密度の積で与えられ，これらはいずれも正規分布にしたがう。

$$f(z,\boldsymbol{y})=f(z/\boldsymbol{y})\cdot f(\boldsymbol{y}) \tag{3}$$

また，$\boldsymbol{y}$ が与えられたときの z に関する条件付分布は

$$z/\boldsymbol{y}\sim N\{E(z/\boldsymbol{y}),V(z/\boldsymbol{y})\} \tag{4}$$
$$E(z/\boldsymbol{y})=(1+\boldsymbol{\beta}'Ⓗ^2\boldsymbol{\beta})^{-1}(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}'Ⓗ^2\boldsymbol{\beta}) \tag{5}$$
$$V(z/\boldsymbol{y})=(1+\boldsymbol{\beta}'Ⓗ^{-2}\boldsymbol{\beta})^{-1} \tag{6}$$

であり，また $\boldsymbol{y}$ の周辺分布は

$$\boldsymbol{y}\sim N(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{x},\boldsymbol{\Omega}) \tag{7}$$
$$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}'+Ⓗ^2 \tag{8}$$

である[①]。

3. EM 法による MIMIC モデルの推定

Dempster, Laird and Rubin [4] は不完備データ（incomplete data）から最尤推定量を反復

---

① （3）から（8）の導出については，拙稿 "EM 法による MIMIC モデルの最尤推定についての覚書", 国士舘大学政経論叢, No. 48, 1984, pp. 1–18.

計算によって求める方法を提示している。この演算の各反復過程は，Expectation-step (E-step) と Maximization-step (M-step) から成っているので，この演算方法を EM 法 (EM-algorithm) と呼んでいる。EM 法を型式的に表現すると次のようになる。

標本空間 $\mathscr{X}$ と $\mathscr{Y}$ が存在し，また $\mathscr{X}$ から $\mathscr{Y}$ への多対 1 (many-to-one) 写像が存在する。空間 $\mathscr{X}$ における“完備データ”(complete data) $\boldsymbol{X}$ を測る代りに，空間 $\mathscr{Y}$ において“不完備データ” $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{X})$ を測る ($\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{y}$ は前節のものと同じベクトルではない)。いま，パラメーター $\phi\in\Omega$ (Ω はパラメーター空間) によって $\boldsymbol{X}$ の密度関数を $f(\boldsymbol{X}|\phi)$ と表わし，また $\boldsymbol{y}$ の密度関数は

$$g(\boldsymbol{y}|\phi)=\int_{\mathscr{X}(\boldsymbol{y})} f(\boldsymbol{X}|)\phi d\boldsymbol{X},$$
$$\mathscr{X}(\boldsymbol{y})=\{\boldsymbol{X}: \boldsymbol{y}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{y}\}$$

のように与えられるものとする。パラメーター ϕ は最尤法，すなわち，$\phi\in\Omega$ において $\boldsymbol{y}$ の密度関数 $g(\boldsymbol{y}|\phi)$ の最大化，によって推定される。多くの場合，完備データーの密度関数，$f(\boldsymbol{X}|\phi)$, の最大化は不完備データーの密度関数，$g(\boldsymbol{y}|\phi)$, を最大化することよりも単純である。EM 法の主たる特色は，$f(\boldsymbol{X}|\phi)$ を $\phi\in\Omega$ において最大化する (M-step) ことである。$\boldsymbol{X}$ は測定不可能であるから，$\log f(\boldsymbol{X}|\phi)$ を，$\boldsymbol{y}$ と当該時点でのパラメーター ϕ_P が与えられたときの，その条件付期待値で置き換える (E-step)。このために，

$$k(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{y},\phi)=f(\boldsymbol{X}|\phi)/g(\boldsymbol{y}|\phi)$$

を $\boldsymbol{y}$ と ϕ が与えられたときの $\boldsymbol{X}$ についての条件付密度とするならば，対数尤度は

$$L(\phi')=\log g(\boldsymbol{y}|\phi')=Q(\phi'|\phi)-H(\phi'|\phi) \tag{9}$$

となり，ここで

$$Q(\phi'|\phi)=E\{\log f(\boldsymbol{X}|\phi')|\boldsymbol{y},\phi\}$$
$$H(\phi'|\phi)=E\{\log k(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{y},\phi')|\boldsymbol{y},\phi\}$$

は，すべての (ϕ',ϕ) について存在すると仮定される。そして，EM 反復，$\phi_P\to\phi_{P+1}\in M(\phi_P)$ を次のように定義する。

E-step.　完備データの対数尤度の期待値 $Q(\phi|\phi_P)$ を定める。

M-step.　$Q(\phi|\phi_P)$ を最大とする $\phi\in\Omega$ における ϕ_{P+1} を選定する。

M は点対集合写像，すなわち，$M(\phi_P)$ は $\phi\in\Omega$ において $Q(\phi|\phi_P)$ を最大とする ϕ の値の集合である。

Dempster et al. [4] は一般化 EM 法 (GEM 法) を次のように定義している。すなわち，

$$Q(\phi'|\phi)\geq Q(\phi|\phi) \tag{10}$$

が，すべての $\phi'\in M(\phi)$ について成立するような，反復方式 $\phi_P\to\phi_{P+1}\in M(\phi_P)$,（この場合，$\phi\to M(\phi)$ は点対集合写像），を GEM 法という。

EM 法は GEM の特殊ケースである。GEM 法のいかなる $\{\phi_P\}$ についても,

$$L(\phi_{P+1}) \geq L(\phi_P) \tag{11}$$

が GEM の定義と次の不等式

$$H(\phi|\phi) \geq H(\phi'|\phi), \quad \phi' \in \Omega \tag{12}$$

から成立する。なお, (11)と(12)の証明は Dempster et al. [4] の Lemma 1 と Theorem 1 を参照。

Chen [3] は MIMIC モデルのパラメーター $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \Theta^2)$ の推定に EM 法を適用し, それは以下のようにすすめられる。

いま, 行列 $X(T\times k)$ と $Y(T\times m)$ を, それぞれ(1)式の $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の T 個の観測値から成る標本とし, また $\boldsymbol{z}(T\times 1)$ を X と Y に対応して z の観測ベクトルとする。

(2)式から, $f_1(Y|\boldsymbol{z};\boldsymbol{\beta},\Theta^2)$ を $\boldsymbol{z}$ が与えられたときの Y の密度関数, また $f_2(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{\alpha})$ を $\boldsymbol{z}$ の密度関数とすれば, Y と $\boldsymbol{z}$ の結合密度は

$$\begin{aligned} f(Y,\boldsymbol{z}|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\Theta^2) &= f_1(Y|\boldsymbol{z};\boldsymbol{\beta},\Theta^2)f_2(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{\alpha}) \\ &\propto |\Theta^2|^{-T/2}\exp\Big[-\frac{1}{2}\{tr(Y-\boldsymbol{z}\boldsymbol{\beta}')' \\ &\quad \times(Y-\boldsymbol{z}\boldsymbol{\beta}')\Theta^{-2}+(\boldsymbol{z}-X\boldsymbol{\alpha})'(\boldsymbol{z}-X\boldsymbol{\alpha})\}\Big], \end{aligned} \tag{13}$$

であり, 記号$\propto$は比例を意味している。また, Y の周辺密度は(7)式から

$$\begin{aligned} g(Y|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\Theta^2) &= \int f(Y,\boldsymbol{z}|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\Theta^2)dz \\ &\propto |\boldsymbol{\Omega}|^{-T/2}\exp\Big[-\frac{1}{2}tr(Y-X\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}')' \\ &\quad \times(Y-X\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}')\boldsymbol{\Omega}^{-1}\Big] \end{aligned} \tag{14}$$

と与えられる。

EM 法の文脈では, (13)式の $(Y,\boldsymbol{z})$ は観測不可能な $\boldsymbol{z}$ を有す完備データであり, また Y のみでは観測された不完備データとなる。さらに(13)式から, $f(Y,\boldsymbol{z}|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\Theta^2)$ は完備データ十分統計量の集合である $\{Y'Y,\boldsymbol{z}'Y,\boldsymbol{z}'X,\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}\}$ を有す指数型であることがわかる。EM 法にしたがうと, 各々の反復サイクルにおいて E-step と M-step を踏んでいくことになる。

最初の反復サイクルでの E-step に於て, 完備データ十分統計量, $\{Y'Y,\boldsymbol{z}'Y,\boldsymbol{z}'X,\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}\}$, は不完備データである Y が与えられたときのそれら統計量の平均 (期待) 値と, $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\Theta^2)$ の当該サイクルでの値 (current value) によって推定される。M-step に於ては, 完備データ十分統計量の新規の推定量が E-step で与えられると, (13)式の尤度 $f(Y,\boldsymbol{z}|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\Theta^2)$ を最大とする $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\Theta^2)$ の新規の値が得られる。

$\{Y'Y, z'Y, z'X, z'z\}$ を推定するために，Y が与えられたときの z の条件付分布の平均値と分散を用いる。(5)，(6)式にしたがうと，一定の $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, Ⓗ^2)$ については，

$$E(z\,|\,Y)=(1+\boldsymbol{\beta}'Ⓗ^{-2}\boldsymbol{\beta})^{-1}(X\boldsymbol{\alpha}+YⒽ^{-2}\boldsymbol{\beta}) \tag{15}$$

$$\begin{aligned}E(z'z\,|\,Y)&=E(z'\,|\,Y)E(z\,|\,Y)+T(1+\boldsymbol{\beta}'Ⓗ^{-2}\boldsymbol{\beta})^{-1}\\&=(1+\boldsymbol{\beta}'Ⓗ^{-2}\boldsymbol{\beta})^{-2}(\boldsymbol{\alpha}'X'X\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\alpha}'X'YⒽ^{-2}\boldsymbol{\beta}\\&\quad+\boldsymbol{\beta}'Ⓗ^{-2}Y'YⒽ^{-2}\boldsymbol{\beta})+T(1+\boldsymbol{\beta}'Ⓗ^{-2}\boldsymbol{\beta})^{-1}\end{aligned} \tag{16}$$

を得る。(15)，(16) の結果と

$$E(Y'Y\,|\,Y)=Y'Y,\quad E(z'Y\,|\,Y)=E(z'\,|\,Y)Y,$$
$$E(z'X\,|\,Y)=E(z'\,|\,Y)X$$

の事実を結びつけると，E-step は次のように展開される。

$(\boldsymbol{\alpha}_{(P)}, \boldsymbol{\beta}_{(P)}, Ⓗ^2_{(P)})$ をこの演算法の P サイクル時の $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, Ⓗ^2)$ の値とすれば，次のサイクルの E-step は，

E-step: 完備データ十分統計量 $\{Y'Y, z'Y, z'X, z'z\}$ は $\{Y'Y, (z'Y)_{(P)}, (z'X)_{(P)}, (z'z)_{(P)}\}$ によって推定し，

$$(z'Y)_{(P)}=(1+\boldsymbol{\beta}'_{(P)}Ⓗ^{-2}_{(P)}\boldsymbol{\beta}_{(P)})^{-1}(\boldsymbol{\alpha}'_{(P)}X'Y+\boldsymbol{\beta}'_{(P)}Ⓗ^{-2}_{(P)}Y'Y), \tag{17}$$

$$(z'X)_{(P)}=(1+\boldsymbol{\beta}'_{(P)}Ⓗ^{-2}_{(P)}\boldsymbol{\beta}_{(P)})^{-1}(\boldsymbol{\alpha}'_{(P)}X'X+\boldsymbol{\beta}'_{(P)}Ⓗ^{-2}_{(P)}Y'X), \tag{18}$$

$$\begin{aligned}(z'z)_{(P)}&=(1+\boldsymbol{\beta}'_{(P)}Ⓗ^{-2}_{(P)}\boldsymbol{\beta}_{(P)})^{-2}(\boldsymbol{\alpha}'_{(P)}X'X\boldsymbol{\alpha}_{(P)}+2\boldsymbol{\alpha}'_{(P)}X'YⒽ^{-2}_{(P)}\boldsymbol{\beta}_{(P)}\\&\quad+\boldsymbol{\beta}'_{(P)}Ⓗ^{-2}_{(P)}Y'YⒽ^{-2}_{(P)}\boldsymbol{\beta}_{(P)})+T(1+\boldsymbol{\beta}'_{(P)}Ⓗ^{-2}_{(P)}\boldsymbol{\beta}_{(P)})^{-1},\end{aligned} \tag{19}$$

である。

(13)式により，あるいはより直接的に(2)式により，$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, Ⓗ^2)$ の最尤推定量は，完備データ十分統計量が与えられると，最小二乗推定量によって個々に得られる。したがって，E-step から $\{Y'Y, (z'Y)_{(P)}, (z'X)_{(P)}, (z'z)_{(P)}\}$ が与えられると，パラメーター $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, Ⓗ^2)$ の新規の値 $(\boldsymbol{\alpha}_{(P+1)}, \boldsymbol{\beta}_{(P+1)}, Ⓗ^2_{(P+1)})$ を求める M-step は次のようになる。

M-step: 次式によって $\boldsymbol{\alpha}_{(P+1)}$, $\boldsymbol{\beta}_{(P+1)}$ および $\theta_{i(P+1)}$ を計算する。

$$\boldsymbol{\alpha}_{(P+1)}=(X'X)^{-1}(X'z)_{(P)},\quad (X'z)_{(P)}=(z'X)'_{(P)}, \tag{20}$$

$$\boldsymbol{\beta}'_{(P+1)}=(z'z)^{-1}_{(P)}(z'Y)_{(P)}, \tag{21}$$

$$\theta^2_{i(P+1)}=T^{-1}\{\gamma_{ii}-\beta^2_{i(P+1)}(z'z)_{(P)}\},\ i=1,\ldots,m, \tag{22}$$

ここで，γ_{ii} は行列 $Y'Y$ の i 番目の対角要素，$\theta^2_{i(P+1)}$ は $Ⓗ^2_{(P+1)}$ の i 番目の対角要素，そして $\beta_{i(P+1)}$ はベクトル $\boldsymbol{\beta}_{(P+1)}$ の i 番目の要素をあらわす。

EM 法の反復計算を実行する場合，先ずパラメーターの初期値を適宜に定めておき，各サイクルにおいて E-step と M-step を踏んで，一般に P サイクル行って，パラメーターの系列が収束するまで反復する。

4. EM 法の収束

Dempster et al. [4] は EM 法により計算されるパラメーターの系列 $\{\phi_P\}$ の収束性について検討しているが，Boyles [2], Wu [7] が指摘するように，Dempster et al. の paper の定理2 (p.7) と定理8 (p.8) に示された $\{\phi_P\}$ の収束性については疑問がもたれている（定理1と定理4は正しい)。

不完備データの対数尤度 $L(\phi')$ の有界な系列 $L(\phi_P)$ について，

$$L(\phi_{P+1}) \geq L(\phi_P)$$

の関係は，$L(\phi_P)$ が単調にある値 L^* に収束することを示唆している。そこで L^* がパラメーター空間 Ω における $L(\phi)$ の最大値であるかどうか，もしそうでなければ，それが極大値か，あるいは Stationary value（$L(\phi)$ の第一次導関数が零となる値）なのかが問題となる。

Wu [7] はこの問題とこれに関連した EM あるいは GEM 系列 $\{\phi_P\}$ の収束性の問題を以下のように検討している。そのため次の仮定を設定している：

$$\Omega \text{ は } \gamma \text{ 次元ユーグリッド空間 } R^r \text{ の部分集合} \tag{23}$$

$$\Omega_{\phi_0} = \{\phi \in \Omega : L(\phi) \geq L(\phi_0)\} \text{ は，} L(\phi_0) > -\infty \text{ についてコンパクト} \tag{24}$$

$$L \text{ は } \Omega \text{ において連続かつ } \Omega \text{ 内部において微分可能} \tag{25}$$

(23)，(24)および(25)の帰結として

$$\{L(\phi_P)\}_{P \geq 0} \text{ は } \phi_0 \in \Omega \text{ において上界がある。} \tag{26}$$

(24)のコンパクトについての仮定を現実的なものとするために，EM 法あるいは GEM 法の出発点（初期値）ϕ_P は $L(\phi_0) > -\infty$ を満足していると仮定する。L, Q, H の導関数を計算する場合，ϕ_P は Ω の内部にあると仮定する。

(11)および(26)から，$L(\phi_P)$ は単調にある値 L^* に収束する。しかし，L^* は EM 法についての Ω における最大値であるという保証はない。$L = Q - H$, の関係において，Q の最大化は M-step ですすめられるが，H 項についてはその保証がない。

また，極大値への収束についても，十分な解答を下せない。いま，ϕ_P は Ω 内部のある値 ϕ^* に収束し，Hessian 行列 $D^{20}Q(\phi^* | \phi^*)$ と $D^{20}H(\phi^* | \phi^*)$ が最初の ϕ^* に関して存在し，また，$D^{20}Q(\phi' | \phi)$ は (ϕ', ϕ) において連続であると仮定する。M-step の定義にしたがって，$-D^{20}Q(\phi^* | \phi^*)$ は非負定符号 (non-negative definite) であり，また $-D^{20}H(\phi^* | \phi^*)$ は Dempster et al. [4] の Lemma 2 によって非負定符号である。$D^2L(\phi^*) = D^{20}Q(\phi^* | \phi^*) - D^{20}H(\phi^* | \phi^*)$ であるから（$D^2L(\phi) < 0$ とならないから)，ϕ^* は極大とならない。

また Wu [7] は例を用いて，極大でなく stationary value へ収束する可能性を示し，EM 系列 $L(\phi_P)$ の収束については stationary value への収束について考察している。stationary point は第一次導関数が零となる点を指し，すべての極値は stationary point であり（しかし，すべての stationary point が極値ではない），幅の広い範囲での収束を考えていることになる。

Wu [7] の導出した，EM 系列 $\{\phi_P\}$ の収束性に関する定理や結果の中から，必要とする条件の証明が容易で実用性の高いものを挙げておく。

(i) EM 系列 $\{\phi_P\}$ はその尤度を増大させ，$L(\phi_P)$ は，もし上界があれば，ある値 L^* に収束する。

(ii) $Q(\psi|\phi)$ が ψ と ϕ の両方において連続であれば，L^* は L の stationary value である。Q の連続性を満たす密度（関数）の重要な集合 (class) は曲線指数族 (curved exponential family) である。ϕ_P がある点 ϕ^* に収束するならば，ϕ' と ϕ に於ける $D^{10}Q(\phi'|\phi)$ に関する連続性の条件の下で，ϕ^* は stationary point である。

(iii) $L(\phi)$ が Ω において唯一の stationary point をもつ単峰形 (unimodal) であり，また $D^{10}Q(\phi'|\phi)$ が ϕ と ϕ' において連続である場合，EM 系列 $\{\phi_P\}$ は $L(\phi)$ を最大とする唯一の点 ϕ^* に収束する。

一般に，対数尤度 L が幾つかの極値や stationary point をもつ場合，EM 系列の収束がどの点（最大か，極大か，stationary point か）において実現するかは，初期値の選択いかんにかかっている。我々の行った EM 系列の収束についての実験では，初期値の取り方によって収束のしかたに差異が見られた。初期値のいかんにかかわらず，収束に至るまでの反復回数はいずれも多くを要し，収束が遅いことが認められた。

MIMIC モデルに EM 法を適用してそのパラメーターを推定する場合の，EM 系列 $\{\phi_P\}$ の収束のチェックは，不完備データ Y の周辺密度，$g(Y|\phi)$，の対数尤度 $L(\phi)$ を追跡していく。

まず Y の周辺密度は

$$g(Y|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \text{Ⓗ}^2) \propto |\Omega|^{-\frac{1}{2}T} \exp\left\{-\frac{1}{2}Ttr(Y-X\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}')'(Y-X\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}')\boldsymbol{\Omega}^{-1}\right\},$$
$$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}'+\text{Ⓗ}^2 \qquad (27)$$

である。そして $g(Y|\phi)$ の対数尤度は

$$L(\phi)=-\left(\frac{T}{2}\right)\{\log|\boldsymbol{\Omega}|+tr[(Y-X\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}')'(Y-X\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}')\boldsymbol{\Omega}^{-1}]\}$$

となるから，$L(\phi)$ の最大は次の function value F の最小である。

$$F=\log|\boldsymbol{\Omega}|+tr[(Y-X\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}')'(Y-X\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}')\boldsymbol{\Omega}^{-1}],$$
$$|\boldsymbol{\Omega}|=|\text{Ⓗ}^2|(1+\boldsymbol{\beta}'\text{Ⓗ}^{-2}\boldsymbol{\beta}),\quad |\text{Ⓗ}^2|=\theta_{11}^2\times\theta_{22}^2\times\cdots\times\theta_{mm}^2,$$
$$\boldsymbol{\Omega}^{-1}=\text{Ⓗ}^{-2}-(1+\boldsymbol{\beta}'\text{Ⓗ}^{-2}\boldsymbol{\beta})^{-1}\text{Ⓗ}^{-2}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}'\text{Ⓗ}^{-2}, \qquad (28)$$

パラメーター系列 $\{\phi_P\}=\{\boldsymbol{\alpha}_{(P)}, \boldsymbol{\beta}_{(P)}, \text{Ⓗ}^2_{(P)}\}$, $P=0, 1,\ldots, n$ について F 値を追跡し，これが最小となるところで $\{\phi_P\}$ が ϕ^* に収束したことになる。この場合，ϕ^* は stationary point と解

釈され，$L(\phi_P)$ は stationary value に収束する。

5.　経済分析への適用例

この節では，前節までに記述した MIMIC モデルとその EM 法による推定を，恒常所得の変化が家計最終消費支出に及ぼす影響を分析するために適用する。

当該期の恒常所得 Y_t^p は潜在変数 (latent variable) であり測定不可能な経済変数であるから，これを4年間の所得，Y_t，Y_{t-1}，Y_{t-2}，Y_{t-3} の加重平均で表わす。他方，家計最終消費支出の項目，食料費 C_{1t}，被服費 C_{2t}，光熱費 C_{3t}，住居費 C_{4t} および雑費 C_{5t} のそれぞれが，恒常所得の変化に対してどの程度の反応（変化）を示すか，その反応度を調べるために，次の MIMIC モデルを特定化する。

$$Y_t^p=\alpha_0 Y_t+\alpha_1 Y_{t-1}+\alpha_2 Y_{t-2}+\alpha_3 Y_{t-3}+\varepsilon,$$

$$\begin{pmatrix} C_{1t} \\ C_{2t} \\ C_{3t} \\ C_{4t} \\ C_{5t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{pmatrix} Y_t^p+\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon \sim N(0,1),\quad \boldsymbol{\mu} \sim N(\boldsymbol{0}, \Theta^2),$$

$$\Theta^2=\begin{pmatrix} \theta_{11}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0_{22}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0_{33}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta_{44}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{55}^2 \end{pmatrix}$$

パラメーター，$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は恒常所得決定のウェイトであり，古い時点の所得ほど，その決定への影響度（ウェイト）が順次逓減していく，またその和は1となる ($\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$)。また，恒常所得の変化に対応する各消費項目の反応度がパラメーター，β_1，β_2，β_3，β_4，β_5，である。パラメーター，θ_{11}^2，θ_{22}^2，θ_{33}^2，θ_{44}^2，θ_{55}^2，は攪乱ベクトル μ の分散共分散行列の対角要素をあらわす。

表1は上記の MIMIC モデルのパラメーターの EM 法による推定の展開を示したものである（推定のためのデータは，1975年から82年の暦年データを用い，いずれの変数も1975年基準値である)。function value は(8)式の値であり，表1の初期値を与えた場合，収束に至るまで62回の反復を要している。その結果，恒常所得決定ウエイトは $\alpha_0=0.81626$, $\alpha_1=0.40789$, $\alpha_2=0.11900$, $\alpha_4=-0.32857$, となり，当期および前期所得がその決定要因として大きなウエイトを占めている。また，消費項目の反応度は被服費において最も高く，$\beta_2=0.18455$, 次いで住

表 1 EM 法によるパラメーターの収束

iteration / parameter	0	14	30	38	42	46	50	60	62
α_1	1.0000	−0.12900	1.13927	3.19600	1.80097	1.32780	1.07719	0.82821	0.81626
α_2	1.0000	−0.10259	−8.27061	8.48750	9.53277	6.28611	4.06390	0.80041	0.40789
α_3	〃	0.15640	11.2811	−12.1936	−11.7631	−7.44753	−4.55079	−0.37160	0.11990
α_4	〃	−0.28842	−3.11875	0.79066	0.85361	0.48980	0.21324	−0.26103	−0.32857
β_1	〃	−0.21425	0.20593	0.18756	0.14972	0.14658	0.14672	0.14795	0.14823
β_2	〃	−0.29171	0.27164	0.23161	0.18304	0.18012	0.18107	0.18399	0.18455
β_3	〃	−0.19499	0.18355	0.16092	0.12762	0.12492	0.12515	0.12654	0.12685
β_4	〃	−0.22695	0.21671	0.19662	0.15680	0.15341	0.15347	0.15467	0.15497
β_5	〃	−0.19902	0.18531	0.61069	0.12655	0.12393	0.12423	0.12577	0.12611
θ_{11}^2	〃	−0.56579	1.53415	−0.44989	1.39106	1.61242	1.64808	1.67263	0.16764
θ_{22}^2	〃	−4.16819	0.16132	−0.20387	0.88862	1.16146	1.16681	1.11740	1.11036
θ_{33}^2	〃	−1.00350	0.86560	−0.37092	1.02228	1.18387	1.20481	1.20834	1.20825
θ_{44}^2	〃	−1.66748	0.74507	−0.14023	0.62905	0.87711	0.92065	0.95184	0.95608
θ_{55}^2	1.0000	−1.39756	0.61853	−0.54667	0.88224	1.03858	1.05648	1.05273	1.05123
Function Value	12981.9	837.22	273.19	182.26	64.78	40.74	38.72	38.46	38.46

居費における $\beta_4=0.15497$, 食料費の $\beta_1=0.14823$, 光熱費の $\beta_3=0.12685$, 雑費の $\beta_5=0.12611$ の順になっている。

恒常所得が消費行動を規定するとした場合，その恒常所得の変動がどの消費項目において影響が大きいかを MIMIC モデルで分析した結果，被服費，住居費に於て大きくあらわれ，恒常所得の減少はこうした項目の支出減少をもたらすことになる。

6. むすび

本稿は，複数の原因（変数）から成る一つの潜在変数と多元指標の関係の特定化と推定方法を取り扱った。複数の原因が一つの潜在変数となって作用し，これに反応する複数の指標が存在するとき，このような現象（関係）は MIMIC モデルとして特定化が可能である。このモデルは，一つの潜在変数（測定不可能）が多くの原因変数によって表わされることを示す式と，その潜在変数の作用によって反応する指標変数との関係を示す式の二つから成る構造型である。このモデルの未知のパラメーターの推定には，単一方程式の推定に適用される推定方式をそのまま適用することはできない。そこで，EM 法を用いて MIMIC モデルのパラメーターの推定を行う方式を展開した。この演算方式は，パラメーターの最尤推定値を得るまでに，多数回の反復計算を要するが，M-step での最尤推定量は簡単な型で示されることから，実用に際して要易にこの推定方式が適用できるものと考える。

なお，本稿の中に掲載した適用例の計算は，国士舘大学電子計算機センターに設置された，Honeywell DPS8/70 を使用して行った。また計算をすすめるにあたって，計算プログラム作成および実行は，同センターの福嶋輝久氏の尽力によるものであることを付記して謝意を表したい。

Appendix　Computer Program

MIMIC モデルのパラメーターを EM algorithm によって推定するための computer program は以下のようなものである。

```
3393T 01   01-31-85    10.819     M I M I   M O D E L   B Y   E M   M E T H O D                LABEL ......   PAGE     1

OPTIONS USED:    ASCII,NCOMDK,NDECK,NDUMP,NFORM,HEX,LNO,LSTIN,NLSTOU,NOMAP,SNUMBER,NXREF

      C        M I M I   M O D E L   B Y   E M   M E T H O D
      C
      C
      C         DESIGNER ----- K.HARADA
      C         AUTHOR   ----- T.FUKUSHIMA
      C
      C
      C       K --- NO. OF VARIABLE
      C       T --- NO. OF DATA
      C       M --- NO. OF SIGNAL
      C
      C***********   P A R A M E T E R   S E T   ***************
      C
              PARAMETER( K=4,IT=8,M=5 )
      C
      C       ******** SUBROUTINE ********
      C
      C        MTRNSS --- MATRIX TRANSPOSITION
      C        MMUL1S --- MATRIX MULTIPLICATION
      C        MADDS  --- MATRIX ADDITION
      C        MINV2S --- MATRIX INVERSION
      C        MSUBS  --- MATRIX SUBTRACTION
      C
      C
      C       ******** SIZE OF ARRAY ********
      C
               DIMENSION  X(IT,K),Y(IT,M),Z(IT,1),AF(K,1),BT(M,1),ST(M,M)
               DIMENSION  XTX(K,K),YTY(M,M),XTY(K,M),YTX(M,K),XTXWK(K,K)
               DIMENSION  ZTY(1,M),ZTX(1,K),ZTZ(1,1),ZTZG(1,1)
               DIMENSION  STG(M,M),XT(K,IT),YT(M,IT),ZT(1,IT)
               DIMENSION  AFT(1,K),BTT(1,M),TENWK(IT,IT),WK11X(1,1)
               DIMENSION  WK1M(1,M),WK11(1,1),WK1M2(1,M),WK1M3(1,M),WK1M4(1,M)
               DIMENSION  ZTYP(1,M),ZTXP(1,K),ZTZP(1,1),XTZP(K,1)
               DIMENSION  WK1K1(1,K),WK1K2(1,K),WK1K3(1,K)
               DIMENSION  WK112(1,1),WK113(1,1),WK114(1,1),WKM11(M,1)
               DIMENSION  AFP1(K,1),BTTP1(1,M),STP1(M),BTP1(M,1)
               DIMENSION  WKTM1(IT,M),WKTM2(IT,M),WKMT1(M,IT)
               DIMENSION  WKMM1(M,M),WKMM2(M,M),WKMM3(M,M),FV(1,1)
               DIMENSION  WKT11(IT,1),WKT12(IT,1),WK1T1(1,IT)
      C
               WRITE(6,1008)
          1008 FORMAT("1   ")
               N=-1
               EPS=1.0E-15
      C
      C        ***** D A T   R E A D  (P,X,Y,AF,BT,ST)
      C
               READ(5,*) IP
      C
               READ(5,*) ((X(I,J),I=1,IT),J=1,K)
               READ(5,*) ((Y(I,J),I=1,IT),J=1,M)
               READ(5,*) (AF(I,1),I=1,K)
               READ(5,*) (BT(I,1),I=1,M)
               DO 10 I=1,M
   1           DO 10 J=1,M

3393T 01   01-31-85    10.819     M I M I   M O D E L   B Y   E M   M E T H O D                LABEL ......   PAGE     2

   2           ST(I,J)=0.0
   2           STG(I,J)=0.0
   2        10 CONTINUE
               READ(5,*) (ST(I,I),I=1,M)
      C
      C********  S C A L E   A D J U S T  X  ************
               DO 11 I=1,IT
   1           DO 11 J=1,K
   2           X(I,J)=X(I,J) / 10000.0
   2        11 CONTINUE
      C
      C********  S C A L E   A D J U S T  Y  *************
               DO 12 I=1,IT
   1           DO 12 J=1,M
   2           Y(I,J)=Y(I,J) / 10000.0
   2        12 CONTINUE
      C **********************************
      C
            15 CONTINUE
               IER=0
      C
               DO 20 I=1,M
   1           STG(I,I)=1.0/ST(I,I)
   1        20 CONTINUE
      C
      C                                                  X TEN
               DO 30 I=1,IT
   1           DO 30 J=1,IT
   2           TENWK(I,J)=0.0
   2        30 CONTINUE
               DO 40 I=1,IT
   1           DO 40 J=1,K
   2           TENWK(I,J)=X(I,J)
   2        40 CONTINUE
               CALL MTRNSS(TENWK,IT,ILL)
               DO 50 I=1,K
   1           DO 50 J=1,IT
   2           XT(I,J)=TENWK(I,J)
   2        50 CONTINUE
      C
      C                                                  Y TEN
               DO 60 I=1,IT
   1           DO 60 J=1,M
   2           TENWK(I,J)=Y(I,J)
   2        60 CONTINUE
               CALL MTRNSS(TENWK,IT,ILL)
               DO 70 I=1,M
   1           DO 70 J=1,IT
   2           YT(I,J)=TENWK(I,J)
   2        70 CONTINUE
      C                                                  Z TEN
               DO 80 I=1,IT
   1           ZT(1,I)=Z(I,1)
   1        80 CONTINUE
      C
      C                                                  AF TEN
               DO 90 I=1,K
```

```
3393T 01  01-31-85   10.819     M I M I   M O D E L   B Y   E M   M E T H O D                    LABEL ......  PAGE    3

 1           AFT(1,I)=AF(I,1)
 1        90 CONTINUE
      C                                                        BT TEN
             DO 100 I=1,M
 1           BTT(1,I)=BT(I,1)
 1       100 CONTINUE
      C                                                         XTX
             CALL MMUL1S(XT,X,XTX,K,IT,K,ILL)
             IER=IER+1
             IF(ILL.NE.0) GO TO 999
      C                                                         YTY
             CALL MMUL1S(YT,Y,YTY,M,IT,M,ILL)
             IER=IER+1
             IF(ILL.NE.0) GO TO 999
      C                                                         XTY
             CALL MMUL1S(XT,Y,XTY,K,IT,M,ILL)
             IER=IER+1
             IF(ILL.NE.0) GO TO 999
      C                                                         YTX
             CALL MMUL1S(YT,X,YTX,M,IT,K,ILL)
             IER=IER+1
             IF(ILL.NE.0) GO TO 999
      C                                                         ZTY
             CALL MMUL1S(ZT,Y,ZTY,1,IT,M,ILL)
             IER=IER+1
             IF(ILL.NE.0) GO TO 999
      C                                                         ZTX
             CALL MMUL1S(ZT,X,ZTX,1,IT,K,ILL)
             IER=IER+1
             IF(ILL.NE.0) GO TO 999
      C                                                         ZTZ
             CALL MMUL1S(ZT,Z,ZTZ,1,IT,1,ILL)
             IER=IER+1
             IF(ILL.NE.0) GO TO 999
      C
      C----------------- E  S T E P --------------------
      C
             CALL MMUL1S(BTT,STG,WK1M,1,M,M,ILL)
             IER=IER+1
             IF(ILL.NE.0) GO TO 999
             CALL MMUL1S(WK1M,BT,WK11,1,M,1,ILL)
             IER=IER+1
             IF(ILL.NE.0) GO TO 999
             WK11X(1,1)=1.0 + WK11(1,1)
             WK11(1,1)=1.0/(1.0+WK11(1,1))
             CALL MMUL1S(AFT,XTY,WK1M,1,K,M,ILL)
             IER=IER+1
             IF(ILL.NE.0) GO TO 999
             CALL MMUL1S(BTT,YTY,WK1M2,1,M,M,ILL)
             IER=IER+1
             IF(ILL.NE.0) GO TO 999
             CALL MADDS(WK1M,WK1M2,WK1M3,1,M,ILL)
             IER=IER+1
             IF(ILL.NE.0) GO TO 999
      C------------------------------------------------- ZTYP
             CALL MMUL1S(WK11,WK1M3,ZTYP,1,1,M,ILL)
             IER=IER+1

3393T 01  01-31-85   10.819     M I M I   M O D E L   B Y   E M   M E T H O D                    LABEL ......  PAGE    4

             IF(ILL.NE.0) GO TO 999
      C
             CALL MMUL1S(AFT,XTX,WK1K1,1,K,K,ILL)
             IER=IER+1
             IF(ILL.NE.0) GO TO 999
             CALL MMUL1S(BTT,STG,WK1M3,1,M,M,ILL)
             IER=IER+1
             IF(ILL.NE.0) GO TO 999
             CALL MMUL1S(WK1M3,YTX,WK1K2,1,M,K,ILL)
             IER=IER+1
             IF(ILL.NE.0) GO TO 999
             CALL MADDS(WK1K1,WK1K2,WK1K3,1,K,ILL)
             IER=IER+1
             IF(ILL.NE.0) GO TO 999
      C
      C                                                           ZTXP
             CALL MMUL1S(WK11,WK1K3,ZTXP,1,1,K,ILL)
             IER=IER+1
             IF(ILL.NE.0) GO TO 999
      C
      C
             CALL MMUL1S(WK1K1,AF,WK112,1,K,1,ILL)
             IER=IER+1
             IF(ILL.NE.0) GO TO 999
             WK113(1,1)=2.0
             CALL MMUL1S(WK113,WK1M,WK1M4,1,1,M,ILL)
             IER=IER+1
             IF(ILL.NE.0) GO TO 999
             CALL MMUL1S(STG,BT,WKM11,M,M,1,ILL)
             IER=IER+1
             IF(ILL.NE.0) GO TO 999
             CALL MMUL1S(WK1M4,WKM11,WK114,1,M,1,ILL)
             IER=IER+1
             IF(ILL.NE.0) GO TO 999
      C
             CALL MMUL1S(WK1M3,YTY,WK1M4,1,M,M,ILL)
             IER=IER+1
             IF(ILL.NE.0) GO TO 999
             CALL MMUL1S(WK1M4,WKM11,WK113,1,M,1,ILL)
             IER=IER+1
             IF(ILL.NE.0) GO TO 999
             RT=IT
             WKX=RT*(1/WK11X(1,1))
             WK=WK113(1,1)+WK114(1,1)+WK112(1,1)
            ZTZP(1,1)=(1.0/WK11X(1,1)**2)*WK+WKX
      C                                                            ZTZP
      C
             IF(N .LT. 0) THEN
 1             DO 191 I=1,K
 2             AFP1(I,1)=AF(I,1)
 2       191   CONTINUE
 1             DO 192 I=1,M
 2             BTP1(I,1)=BT(I,1)
 2             BTTP1(1,I)=BT(I,1)
 2             STP1(I)=ST(I,I)
 2             STG(I,I)=1.0/STP1(I)**2
 2       192   CONTINUE
```

```
     1            GO TO 235
     1          ENDIF
                DO 200 I=1,K
     1          XTZP(I,1)=ZTXP(1,I)
     1      200 CONTINUE
                DO 210 I=1,K
     1          DO 210 J=1,K
     2          XTXWK(I,J)=XTX(I,J)
     2      210 CONTINUE
          C
                CALL MINV2S(XTXWK,K,K,EPS,ILL)
                IER=IER+1
                IF(ILL.NE.0) GO TO 999
          C
          C                                                AFP1
                CALL MMUL1S(XTXWK,XTZP,AFP1,K,K,1,ILL)
                IER=IER+1
                IF(ILL.NE.0) GO TO 999
          C
                ZTZG(1,1)=1.0/ZTZP(1,1)
          C                                                BTTP1
                CALL MMUL1S(ZTZG,ZTYP,BTTP1,1,1,M,ILL)
                IER=IER+1
                IF(ILL.NE.0) GO TO 999
          C
                DO 220 I=1,M
     1          BTP1(I,1)=BTTP1(1,I)
     1      220 CONTINUE
          C
                DO 230 I=1,M
     1          STP1(I)=1.0/RT*(YTY(I,I)-BTP1(I,1)**2 * ZTZP(1,1))
     1          STG(I,I)=1.0/STP1(I)**2
     1      230 CONTINUE
          C
          C     ***** FUNCTION VALUE 1 CALCULATION *****************
          C
            235 CONTINUE
                WK=ZTZP(1,1)
                IF(WK.LT.0.0) WK=-WK
                WK=SQRT(WK)
          CCC   WRITE(6,*) WK
                DO 240 I=1,IT
     1          Z(I,1)=WK
     1      240 CONTINUE
                CALL MMUL1S(Z,BTTP1,WKTM1,IT,1,M,ILL)
                IER=IER+1
                IF(ILL.NE.0)GO TO 999
                CALL MSUBS(Y,WKTM1,WKTM2,IT,M,ILL)
                IER=IER+1
                IF(ILL.NE.0)GO TO 999
                DO 244 I=1,IT
     1          DO 244 J=1,M
     2          WKMT1(J,I)=WKTM2(I,J)
     2      244 CONTINUE
                CALL MMUL1S(WKMT1,WKTM2,WKMM1,M,IT,M,ILL)
                IER=IER+1
                IF(ILL.NE.0) GO TO 999
```



```
                CALL MMUL1S(WKMM1,STG,WKMM2,M,M,M,ILL)
                IER=IER+1
                IF(ILL.NE.0) GO TO 999
                CALL MMUL1S(X,AFP1,WKT11,IT,K,1,ILL)
                IER=IER+1
                IF(ILL.NE.0) GO TO 999
                CALL MSUBS(Z,WKT11,WKT12,IT,1,ILL)
                IER=IER+1
                IF(ILL.NE.0) GO TO 999
                DO 246 I=1,IT
     1          WK1T1(1,I)=WKT12(I,1)
     1      246 CONTINUE
                CALL MMUL1S(WK1T1,WKT12,FV,1,IT,1,ILL)
                IER=IER+1
                IF(ILL.NE.0) GO TO 999
          C
                WK=0.0
                STGS=0.0
                DO 248 I=1,M
     1          WK=WK+WKMM2(I,I)
     1          STGS=STGS+STG(I,I)
     1      248 CONTINUE
                FV(1,1)=WK
          C
          C     ***** FUNCTION VALUE 2 CALCULATION ******************
          C
                SWK=STGS*WK11X(1,1)
          C
                CALL MMUL1S(BTP1,BTTP1,WKMM1,M,1,M,ILL)
                IER=IER+1
                IF(ILL.NE.0) GO TO 999
          C
                CALL MMUL1S(STG,STG,WKMM2,M,M,M,ILL)
                IER=IER+1
                IF(ILL.NE.0) GO TO 999
                CALL MMUL1S(WKMM1,WKMM2,WKMN3,M,M,M,ILL)
                IER=IER+1
                IF(ILL.NE.0) GO TO 999
          C
                DO 249 I=1,M
     1          DO 249 J=1,M
     2          WKMM1(I,J)=WK11(1,1)*WKMM3(I,J)
     2      249 CONTINUE
          C
                CALL MSUBS(STG,WKMM1,WKMM2,M,M,ILL)
                IER=IER+1
                IF(ILL.NE.0) GO TO 999
          C
                CALL MMUL1S(X,AFP1,WKT11,IT,K,1,ILL)
                IER=IER+1
                IF(ILL.NE.0) GO TO 999
          C
                CALL MMUL1S(WKT11,BTTP1,WKTN1,IT,1,M,ILL)
                IER=IER+1
                IF(ILL.NE.0) GO TO 999
          C
                CALL MSUBS(Y,WKTM1,WKTM2,IT,M,ILL)
```

```
3393T 01   01-31-85    10.819    M I M I   M O D E L   B Y   E M   M E T H O D                    LABEL ......  PAGE    7

                 IER=IER+1
                 IF(ILL.NE.0) GO TO 999
       C
                 DO 253 I=1,IT
     1           DO 253 J=1,M
     2           WKMT1(J,I)=WKTM2(I,J)
     2       253 CONTINUE
       C
                 CALL MMUL1S(WKMT1,WKTM2,WKMM1,M,IT,M,ILL)
                 IER=IER+1
                 IF(ILL.NE.0) GO TO 999
       C
                 CALL MMUL1S(WKMM1,WKMM2,WKMM3,M,M,M,ILL)
                 IER=IER+1
                 IF(ILL.NE.0) GO TO 999
       C
                 TRMMS=0.0
                 DO 254 I=1,M
     1           TRMMS=TRMMS+WKMM3(I,I)
     1       254 CONTINUE
       C
                 F=ALOG(SWK)+TRMMS
       C
       C
                 N=N+1
                 WRITE(6,1009)N
            1009 FORMAT(//,"  ",I5)
                 WRITE(6,1000) (AFP1(I,1),I=1,K)
            1000 FORMAT(/ "   A  ",10E15.6 )
                 WRITE(6,1001) (BTP1(I,1),I=1,M)
            1001 FORMAT(/ "   B  ",10E15.6 )
                 WRITE(6,1002) (STP1(I),I=1,M)
            1002 FORMAT(/ "  Q2  ",10E15.6 )
                 WRITE(6,1003) FV(1,1),F
            1003 FORMAT(/ " FUNCTION VALUE ",2E15.6 )
       C
       C
                 DO 250 I=1,K
     1           AF(I,1)=AFP1(I,1)
     1       250 CONTINUE
                 DO 260 I=1,M
     1           BT(I,1)=BTP1(I,1)
     1       260 CONTINUE
                 DO 270 I=1,M
     1           ST(I,I)=STP1(I)
     1       270 CONTINUE
       C
                 IF(N.NE.IP) GO TO 15
       C
                 GO TO 9999
       C
             999 WRITE(6,*) "   IER=",IER,ILL
            9999 CONTINUE
                 STOP
                 END
*****W     7 MEMORY EXPANDED. USE ¥LIMITS OR CORE= OPTION FOR NEXT RUN
```

(1985年1月31日　受理)

References

[1] Anderson, T. W.: An Introduction to Multivariate Statistical Analysis. New York: Wiley, 1958.

[2] Boyles, R. A.: "On the Convergence of the EM Algorithm", Journal of the Royal Statistical Society, B45 (1983), 47–50.

[3] Chen, C.: "The EM Approach to the Multiple Indicators and Multiple Causes Model Via the Estimation of the Latent Variable", Journal of the American Statistical Association, 76 (1981), 704–708.

[4] Dempster, A. P., N. M. Laird and D. B. Rubin: "Maximum Likelihood from Incomplete Data Via the EM Algorithm", Journal of the Royal Statistical Society, B39 (1977), 1–38.

[5] Goldberger, A. S.: "Unobservable Variables in Econometrics", in: P. Zarembka, ed., Frontiers in Econometrics. New York: Academic Press, 1974.

[6] Watson, M. W. and R. F. Engle: Alternative Algorithms for the Estimation of Dynamic Factor MIMIC and Varying Coefficient Regression Model", Journal of Econometrics, 23 (1983), 385–400.

[7] Wu, C. F.: "On the Convergence Properties of the EM Algorithm", The Annals of Statistics, 11 (1983), 95–103.