

## 乱流中における濃度変動の拡散のモデル化

岸本 健\*

Modeling of Diffusion of Concentration Fluctuation  
in Turbulent flow

By Kishimoto Ken\*

**Synopsis:** For the computer simulations on the reacting turbulent flows, the mathematical model of turbulent flows must be combined with the models of species diffusion and chemically reactions.

In many reports, respecting on the turbulent reacting flows, the model of the turbulence is two equation model, velocity fluctuating energy  $k$  and its dissipation rate  $\varepsilon$ , and the diffusion models are proposed on the analogy of  $k$ - $\varepsilon$  model and turbulent Prandtl and Schmidt numbers in these equations are adopted.

Conventional turbulent Schmidt numbers are in range 0.7 to 0.8, but author thinks these values must be closer to unity than those on the consideration of turbulent momentum transfer mechanisms in flows.

A new proposed diffusion model described in this paper is characterized by the production and dissipation terms formulated based on the power spectrum of the concentration fluctuation.

A modelled equation for the concentration fluctuations has been tested for the isothermal jet flow and the predictions are satisfactory quality.

**要旨:** 乱流燃焼場での数値解析では、流れが乱流であるため濃度拡散と反応のモデルを組み合わせて解く必要がある。

この種の数値解析における乱れのモデルは乱れのエネルギー  $k$  とその消散速度  $\varepsilon$  とにより  $k$ - $\varepsilon$  モデルがとられ、濃度の変動については、 $k$ - $\varepsilon$  モデルとのアナログと乱流プラントン/シュミット数の採用で方程式がつけられた。その際のシュミット数は0.7~0.8が採用されたが、乱流中での移動現象を考えるとさらに1に近いはずであるというのがこの論文の動機である。

そこで、乱れのパワースペクトラムに基づいた濃度変動の強さの生成と消滅の式を作り実験と対比した。その結果、ほぼ良好な一致と認められることができモデルの妥当なることを確めた。

## 1. はじめに

多くの実用燃焼装置は乱流拡散火炎となっている。この火炎では最適混合率の場が存在し安定性がよく、燃焼量の制御が容易である。しかし、燃焼現象は、燃料の拡散と燃焼の化学反応が同時に同じ場でおこるため複雑である。

近年、この反応と混合の場の数値解析は、D. B. Spalding らによって  $k$ - $\varepsilon$  という乱流運動エネルギーと乱流運動エネルギーの消散率の保存式を運動量の保存方程式に加えて解くことによって、乱流運動の時間平均場の解析がなされ成功をおさめている。さらに、拡散の場では、化学

種の保存方程式と濃度の変動エネルギー  $g$  の保存方程式を以上に加えて解いている<sup>1),2)</sup>。そのとき、濃度の保存式として

$$\rho u \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} = \rho (D_t + D) \left( \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial y^2} \right)$$

という式が用いられ、乱流拡散係数  $D_t$  は、乱流粘性係数  $\mu_t$  に対して

$$D_t = S_{ct} \mu_t / \rho \quad S_{ct}: \text{乱流シュミット数}$$

と定義される。乱流による物質の拡散は分子単位でなく渦単位で輸送されるのが大きいと考えると、 $S_{ct} \approx 1$  となることが予想されるが、既にその数値は0.7~0.8と1より小さな値が提案されている。これは濃度では変動の高い周波数成分、いいかえると小さなスケールの渦の中では、運動としての渦の消滅に当る分子粘性の影響よりも

\* 機械工学科 助教授

Associate Prof., Mechanical Engng. Div.

速く濃度の分子拡散による均一化がおこるものと推定される。この機構を明らかにするため、変動の周波数分析から濃度変動の消散についての知見を得ようとする目的により本論文では循環流のない噴流において上の方法を適用し濃度の変動エネルギー  $g$  の消散率  $\varepsilon$  を決定するための  $g$  の保存式を提案した。

## 2. 保存方程式と従来のモデル<sup>1),2)</sup>

軸対称流定常乱流場の解析として用いられるのは、ナビエ・ストークスの方程式に時間平均操作を施こして得られるレイノルズ方程式である。

$$\frac{\partial \bar{\rho}u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho}v \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{\rho}u'v' \right) \\ &\simeq \bar{\rho}u'v' \simeq \mu_{eff} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \end{aligned} \quad (2)$$

式(1)が連続の式、式(2)が  $x$  方向の運動量保存式で、 $y$  軸方向も同様となる。式(3)は N.S. (ナビエ・ストークス) 式に時間平均操作を施こした式であり、変動のレイノルズ応力  $-\bar{\rho}u'v'$  などの 2 次の相関項は  $\mu_t$  という乱流粘性係数に平均速度勾配を乗じたものとして与える。一方、N.S. 式を運動エネルギー保存式として、式全体に速度を乗じ時間平均操作を施こし、 $x, y, (z)$  方向の和をつくると乱れのエネルギー  $k = 1/2(\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2 + \bar{w}'^2)$  の保存式ができあがる。そして 2 次の相関項を式を閉じるためにアナロジをかけて、次の形とする。

$$\bar{\rho}u \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{\rho}v \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - \bar{\rho}\varepsilon + C_{\rho} \frac{\mu_t}{\sigma_{\rho}} \cdot g \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (3)$$

ここで  $\varepsilon$  は消散項を形成しており、分子粘性による項は  $\mu \ll \mu_t$  で  $10^8$  ほどのちがいがあがあるため省略している。この消散率  $\varepsilon$  は、乱流粘性係数との次元考察で式(3.a)のように記述される。

$$\mu_t = C_D \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.a)$$

また、消散率も、微分量の 1 次相関項であり、保存方程式の形にまとめることができる

$$\begin{aligned} \bar{\rho}u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \bar{\rho}v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_{\varepsilon}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + C_{\varepsilon 1} C_D \rho k \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\ &\quad - \frac{C_{\varepsilon 2}}{C_D} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (4)$$

となり、 $C_D, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}$  などは定数で  $\sigma_{\rho}$  や  $\sigma_{\varepsilon}$  はそれぞれ乱流のプラントル、シヨミット数である。

運動量の保存式と同様に、化学種の保存式は

$$\bar{\rho}u \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \bar{\rho}v \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( D \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} - \bar{\rho}c'u' \right) \quad (5)$$

となり、運動エネルギー式と同様に、式(5)の時間平均操作前の式に濃度  $c$  を乗じて時間平均をとり、乱流拡散係数  $D_t$  を導入すると式(6)となる。

$$\bar{\rho}u \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \bar{\rho}v \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( D_t \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \right) \quad (6)$$

これから、 $k$  を導いたのと同じ手法で  $c$  の変動  $g$  に対しては

$$\bar{\rho}u \frac{\partial g}{\partial x} + \bar{\rho}v \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_g} \frac{\partial g}{\partial y} \right) + C_{g1} \mu_t \left( \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \right)^2 - \frac{C_{g2}}{C_D} \rho \varepsilon g \quad (7)$$

となり、複雑化する。ここで右辺第 1 項の拡散項中の分子拡散係数  $D$  を前述と同じ理由で省いたり、第 2 項に出てくる  $\bar{c}u$  をおきなおし、 $\partial u/\partial x$  に比例する形を用いたりするものもある。しかし、Spalding 一派は普遍定数化の性質をもったもののみを経験定数として  $C_1, C_2, C_3, C_D, C_g, C_g$  などと決めて用いており、各種の流れにおいて、この定数はほぼ一定の値をとることを確めており流れの解析上で定数として扱ってよいことを提案している。このまとめることによって閉じることでできた方程式群に対して、さらに高次の相関項についても解く試みがなされたが、上述の  $k-\varepsilon$  2 方程式モデルでの解析結果が最も良好で高次の相関項を考慮に入れるメリットはないとの報告もある。

## 3. 新モデル

2 次の相関項でほぼ流れの性質を把えることが可能であれば流れ中の変動をフーリエ変換して拡散方程式を作り、2 次の項でまとめることもできる。

つまり、濃度の変動を等方性乱流の一方向について、変動の波数を  $\lambda$  [m<sup>-1</sup>] で表わす。周波数  $\varphi$  は  $\lambda \bar{U}$  にほぼ等しい。式(10)で、濃度は、 $\lambda$  の波数成分では

$$c_{\lambda} - \bar{c} = a_{\lambda} \sin(2\pi\lambda x) \quad (10)$$

となり、 $\lambda$  の波数成分変動の強さは式(10)を平均して

$$\overline{c_{\lambda}^2} = \overline{(c_{\lambda} - \bar{c})^2} = \int_0^1 a_{\lambda}^2 \sin^2(2\pi\lambda x) d(\lambda x) = \frac{a_{\lambda}^2}{2} \quad (11)$$

であり、 $c_{\lambda 1} c_{\lambda 2}$  で  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  であれば 0 となる。この  $a_{\lambda}^2/2$  は  $\lambda$  についての変動の power spectrum となる。この正弦波の変動は分子拡散によって減衰してゆくので、1 次元の非定常拡散方程式をラランジュ座標の上で考えて、式(13)と次式となる。

$$\frac{\partial c_\lambda'}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c_\lambda'}{\partial x^2} \quad (12)$$

∴  $t = 0$  のとき  $c_\lambda' = a_\lambda \sin(2\pi\lambda x)$

$$c_\lambda = \bar{c} + c_\lambda' = \bar{c} + a_\lambda \sin(2\pi\lambda x) \exp\{-D(2\pi\lambda)^2 t\} \quad (13)$$

変動エネルギー  $g$  は、 $\lambda$  についての変動の power spectrum  $f(\lambda) = \overline{c_\lambda'^2}/2$  を用いて、 $x$  について積分すると

$$g_\lambda = \overline{c_\lambda'^2} = f(\lambda) \exp\{-2D(2\pi\lambda)^2 t\} \quad (14)$$

となり、 $g_\lambda$  の減衰速度は消散率  $\varepsilon_g$  であり、式(15)となる。

$$\varepsilon g_\lambda = -\left. \frac{dg_\lambda}{dt} \right|_{t=0} = -2D(2\pi\lambda)^2 f(\lambda) \quad (15)$$

である。

一方、運動エネルギーとその消散率の関係から類推すると

$$\frac{dg_\lambda}{dt} = -D \left( \frac{\partial c_\lambda'}{\partial x} \right)^2 = -D a_\lambda^2 (2\pi\lambda)^2 \cos(2\pi\lambda x)^2$$

となり、場で平均を行なうことで求められる。

$$\varepsilon_g = -\int_0^\infty \frac{dg_\lambda}{dt} d\lambda = \int_0^\infty f(\lambda) \cdot D \cdot (2\pi\lambda)^2 d\lambda \quad (16)$$

となって、式(15)、(16)をみて完全にアナログが成立する。

以上の議論は1次元であるが、等方性を仮定して3次元にすると単純に式(17)のように  $g$  の消散項を扱える。

$$\varepsilon_g = 3 \int_0^\infty 2D(2\pi\lambda)^2 f(\lambda) d\lambda \quad (17)$$

また、拡散は平均濃度場で、乱流拡散係数  $D_t$  を用いて

$$D_t \frac{\partial g}{\partial y}$$

となることは式(7)と同様に自明である。

一方主成項は、濃度勾配のある場での速度変動が濃度変動をもたらすので、 $g$  の生成モデルを図1のように考える。図1のように微小距離  $\delta x$  で平均濃度勾配  $\partial \bar{c}/\partial x$  があるとき  $\delta x$  の中心  $A$  からの距離  $x$  にある流体塊が  $A$  の位置に存在する流体塊と入れかわる確率を  $p(x)$  とする。

この確率の見積りも平均拡散に近いプロセスであると考えると、非定常拡散方程式を解くとその結果は誤差関数となり、正規化された確率は

$$p(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D_t t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4D_t \cdot t}\right\} \quad (18)$$

となる。図1のように微小区間では線形と考えられるので式(18)の  $x$  を  $c$  におきかえることはできる。しかし、

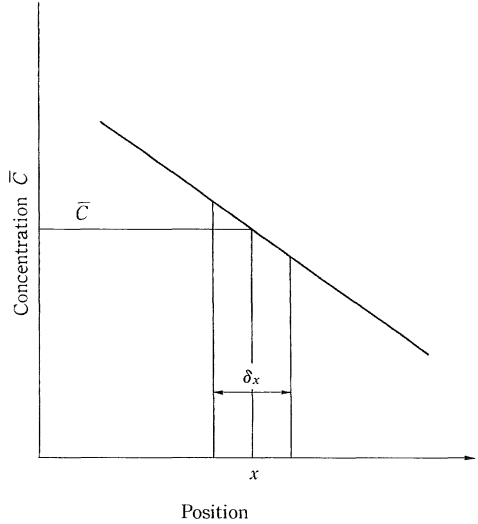


図1 濃度変動の生成原理

線形近似は極めて局所に限られる。しかし、線形近似を広げて、

$$\bar{c} \approx \left( \frac{d\bar{c}}{dx} \right) x$$

とすると

$$p(\bar{c}) d\bar{c} = \frac{1}{(d\bar{c}/dx)\sqrt{4\pi D_t \cdot t}} \exp\left\{-\frac{\bar{c}^2}{4(d\bar{c}/dx)^2 D_t \cdot t}\right\} d\bar{c} \quad (19)$$

となり、場全体で求めると、平均濃度の変化は式(20)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{c}^2 p(\bar{c}) d\bar{c} = 2D_t \cdot t \left( \frac{d\bar{c}}{dx} \right)^2 \quad (20)$$

となり、これが  $g$  の生成になると考える。消散項と同じ

$$\frac{dg}{dt} = 2D_t \left( \frac{d\bar{c}}{dx} \right)^2$$

ように3次元に拡張すると、

$$\frac{dg}{dt} = 2D_t \left\{ \left( \frac{d\bar{c}}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\bar{c}}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\bar{c}}{dz} \right)^2 \right\} \quad (21)$$

となり、まとめると

$$\rho u \frac{\partial g}{\partial x} + \rho v \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( D_t \frac{\partial g}{\partial y} \right) + 2D_t \left( \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon_g \quad (22)$$

ただし  $\varepsilon_g = 3 \int_0^\infty c_g D(2\pi\lambda)^2 f(\lambda) d\lambda$

となる。 $c_g$  はアナログを成立させるため用いた定数であり、ここでは  $c_g = 2$  とする。しかし、3次元に拡張させたときに、 $\partial \bar{c}/\partial x$  と  $\partial \bar{c}/\partial y$  は独立であっても、相関値となる消散項では  $(\partial \bar{c}/\partial x)(\partial \bar{c}/\partial y)$  という項が2次元以上の解

析では出現し、その量を等方性という仮定のもとで  $(\partial \bar{c} / \partial x)^2$  または  $(\partial \bar{c} / \partial y)^2$  に等しいとおいたために  $\epsilon_g$  の値でまたは1の値をとることになったが、さらに詳細な検討をする必要があり、等方性を各方向での乱れの特性は対称性をもつがそのスケールが異なり、 $\partial \bar{c} / \partial x \propto \partial \bar{c} / \partial y$  が成立するとして  $\epsilon_g$  という定数を設定し、本解析では2という値とした。

ここで2次元で式(7)と比較すると

$$\begin{aligned} \text{消散項} \quad \epsilon_g &= 3 \int_0^\infty 2D(2\pi\lambda)^2 f(\lambda) d\lambda \\ &\leftrightarrow \frac{C_{e2}}{C_D} \frac{\epsilon}{k} g \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \text{生成項} \quad 2D_t \left\{ \left( \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ &\leftrightarrow C_{g1} \mu_t \left( \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\text{拡散} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( D_t \frac{\partial g}{\partial y} \right) \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_t \frac{\partial g}{\partial y} \right) \quad (25)$$

拡散項については議論していないが乱流拡散は、分子拡散とアナログされる項であり説明の必要なく Fick の法則とアナログした上式が定義式となる。

この比較で生成項と拡散項は次元の差であり、流れが Jet であることを考えれば、全く同じといってもよい。しかし、消散項では異なり、Spalding のアナログに対して、本モデルでは  $f(\lambda)$  という量を用いている。そのため本モデルのみでは乱れのパワースペクトル  $f(\lambda)$  が微分方程式の組に対して閉じていないことになるが、消散項を  $\epsilon g / k$  に比例するとしてアナログが可能であるかどうかの評価に用いることはできる。

#### 4. 数値計算結果と実験

以上の新モデルに対する評価をするために、濃度拡散を数値計算でシミュレートし、実験結果と対比させて議論した。

##### 4-1 実験

乱流噴流は文献(4)に載せた実験装置を用いて計測を行い、空気中の  $\text{CO}_2$  濃度を熱細線プローブ<sup>4),5)</sup> を図2用い測定し、その結果を分析器にかけた。測定方法は基本的には前述の文献と同じであるので省略するが濃度を測定するプローブの応答は線形性が良く保たれており、応答の最大周波数は、熱慣性の補償をして 3.1 kHz 以上であるので、十分な応答性をもつ。また、濃度変動は速度変動と比較して高周波成分が少なく上述の仕様でよいと思われるが、式(17)において、 $0 \sim \infty$  の積分は、3.1kHz で打切る必要がある

$$\epsilon_g = 3 \int_0^\infty 2D(2\pi\lambda)^2 f(\lambda) d\lambda = 6D \int_0^\infty \omega^2 f^*(\omega) d\omega \quad (26)$$

3.1 kHz 以上の周波数成分に対しては式(26)の  $\omega^2$  を乗じた項が影響し  $\omega^2 f^*(\omega)$  で  $\omega > 15 \times 10^3$  以上では  $f^*(\omega)$

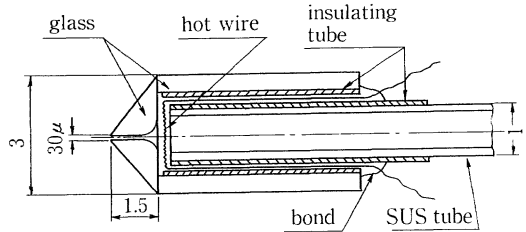


図2 プローブ詳細図

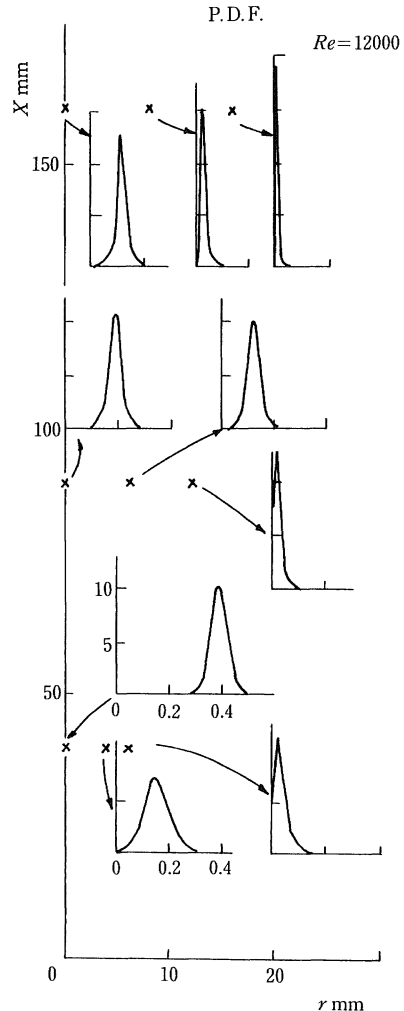


図3 確率密度分布

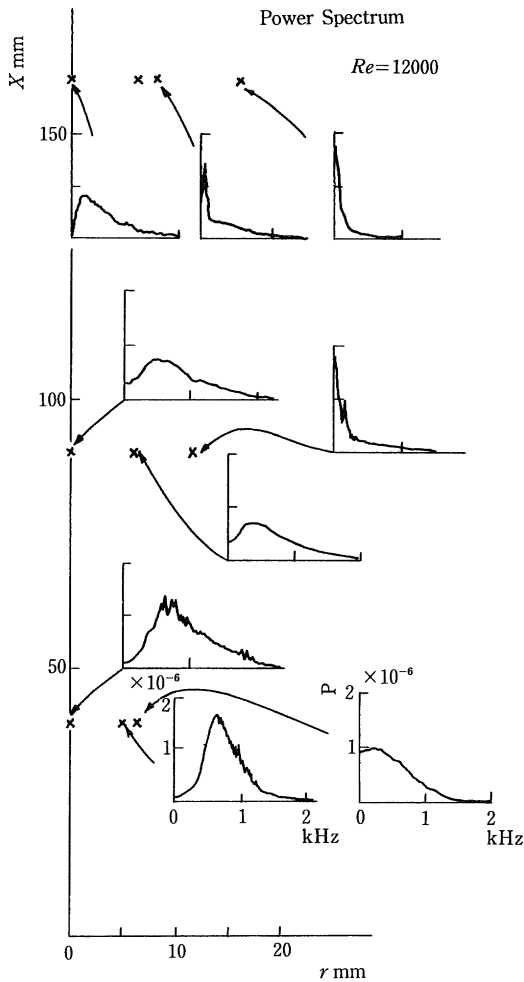


図4 パワースペクトラム

が小さくても無視できない。そのため  $f^*(\omega)$  には高周波成分での Kolmogorov の  $-5/3$  乗仮説をとり入れて計算するというような形をとるが、 $-5/3$  乗では都合が悪いので仮説において分子拡散での消散項を  $\omega^{-7/3}$  に比例するという考え方を導入すると高周波領域にまで可積分となる。この仮定で計算された  $\epsilon_g$  の誤差で、打切を 3.1 kHz にした積分とは、後流の場ではほとんどなく、わずかに噴流の出口において差をもつにすぎなかった。つまり、power spectrum の形状のみから判断すると、噴流出口の  $du/dx$  または  $d\bar{c}/dx$  の大なる所では高周波成分が多く、消散も速い。この測定結果の図3に確率密度関数、図4にパワースペクトラムを示す。パワースペクトラムと確率密度関数の評価は濃度の変動エネルギー  $g$  において

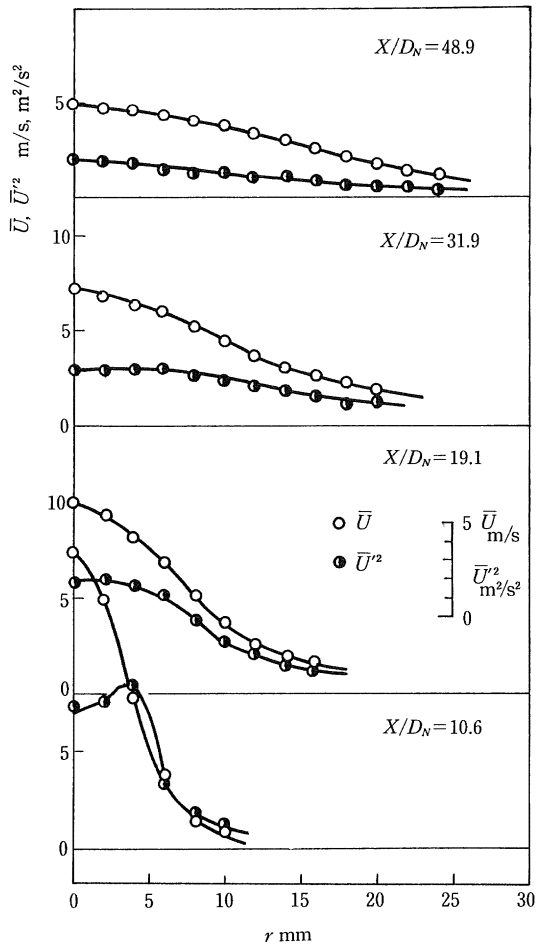


図5 流速の分布 (Re=12000)

式(27)が成立することで確かめられる。

$$g = \overline{(c-\bar{c})^3} = \int_0^1 (c-\bar{c})^3 p(c) dc = \int_0^\infty f(\varphi) d\varphi \quad (27)$$

この式においても十分に一致しているの、数値計算に用いる  $\epsilon_g$  の値は信頼性あるものと考えてさしつかえない。

実験は、ノズル流速 11.5 m/s ( $Re_d = 12000$ ), 15.3 m/s ( $Re = 16000$ ) の2種類で行った。流速は LDV および熱線風速計で測定した。図5, 6にその結果を示す。式(22)を見てわかるように、式中には  $k$ ,  $\epsilon$  といった速度の乱れを示すパラメータは出現しない。そこで、 $u, v$  および  $\bar{c}$  に実験値を用いて  $g$  を解くことができる。この解析には GENMIX<sup>2)</sup> というコードを用いた。こうして求めた  $g$  の分布を図7に示す。定性的には良好な一致がみられるが十分一致しているわけではない。

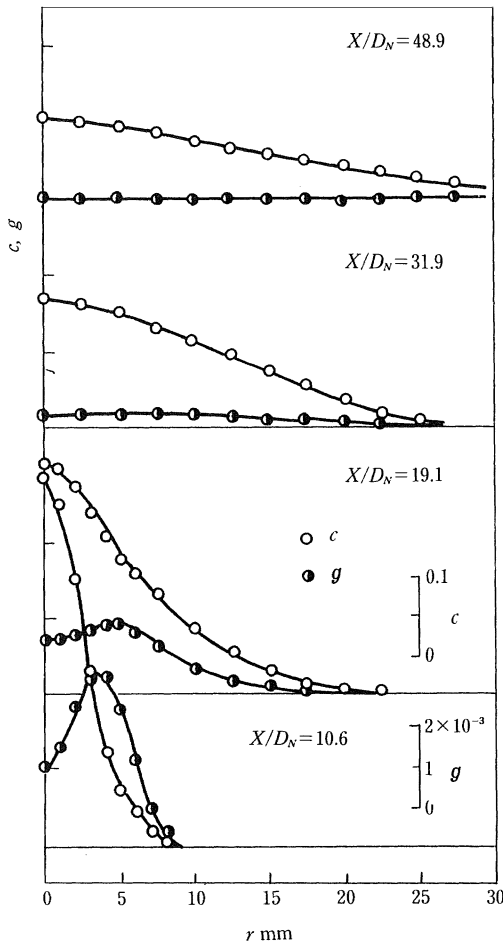


図6 濃度分布 (Re=12000)

5. まとめ

濃度の変動強さ  $\overline{(c-\bar{c})^2} = g$  の保存式において各項目を吟味することで新しいモデルを提案し、数値解析によりこのモデルにもとづくシミュレーションを実施した。また、実験結果と比較して定性的には良好な一致を得ることができ、このモデルが本研究の範囲では有効であることを確めた。

6. 使用した記号

- $a_\lambda, C_1, C_2$  など : 定数
- $c$  : 濃度
- $D$  : 分子拡散係数
- $D_t$  : 乱流拡散係数  $= \mu_t / \sigma_g$
- $f(\lambda)$  : 波数  $\lambda$  の power spectrum
- $g$  :  $= \overline{(c-\bar{c})^2}$  濃度変動の強さ

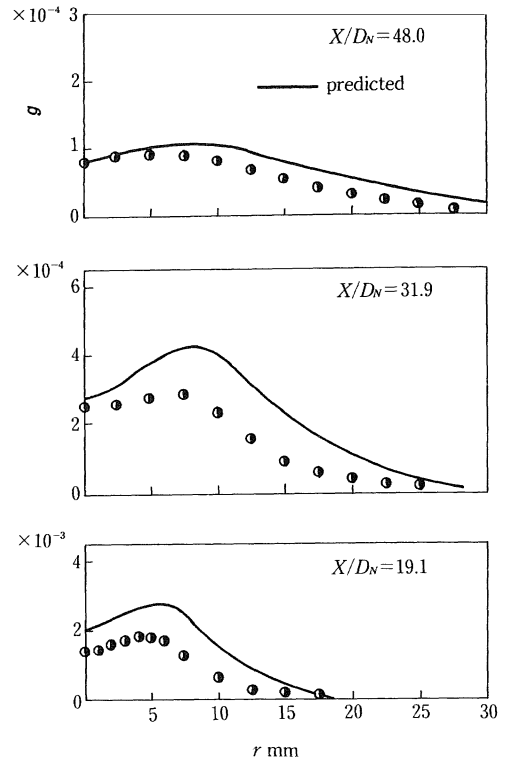


図7 g の分布と比較

- $k$  : 乱れのエネルギー
- $p(c)$  : 確率密度関数
- $p$  : 圧力
- $u, v, w$  : 流速
- $x, y, z$  : 座標軸
- $\varepsilon$  : 消散率または消散関数
- $\lambda$  : 変動の波数
- $\varphi$  : " 周波数
- $\mu$  : 粘性係数
- $\mu_t$  : 乱流粘性係数
- $\rho$  : 密度
- 添字  $-$  : 時間平均値
- ' : 平均値まわりの変動値
- $\lambda$  : 波数

謝辞

本研究は、早大理工故小泉睦男教授の助言を得て進められ、実験は当時修士であった桜井泰明(現三菱原子力)氏が行ったものである。

小泉教授および桜井氏に深く感謝の意を表します。

(原稿受付 昭和57年 9月17日)

## 参 考 文 献

- 1) Spalding D. B., HMT-1, GENMIX-A general computer program for two-dimensional parabolic phenomena, Pergamon Press, Oxford (1977)
- 2) Gosman A. D, Pun. W. M., 他 Heat and Mass Transfer in recirculating flows, Academic Press, London (1973)
- 3) 桜井：第20回燃焼シンポジウム予稿集 (昭57-11) p. 293
- 4) Era Y., Report of the Research Institute of Sci. and Tech., Nihon Univ., No. 21 (1977-10), 9
- 5) Brown G. L. and Rebollo M. R., AIAA Journal, 10-5 (1972-5), 645