ノート Note

電子回路に対する微分方程式の定式化について

森　岡　　望*

A Formulation of Differential Equations for Electronic Circuits

*By Nozomi Morioka**

Synopsis: A new procedure is given to construct the differential equations directly from the electronic circuit.

要旨：電子回路から直接に微分方程式を構成する新しい手順が与えられている。

1. はじめに

電子回路の過渡現象を解析しようとする場合，一般的には微分方程式によって表現し，それを解くことによって現象を考察する方法がとられる。

ここでは，計算機で数値解析を行なう場合にとられる連立一階微分方程式の形で機械的操作によって定式化する方法を述べる。

この方法は (1) 入力情報から微分方程式の定式化が機械的操作によって行なえる，(2) 回路の状態変数の選定が容易である，(3) 二端子非線形素子はその電圧—電流特性から得られる関数形の関数値で式中に組込める，(4) 定式化の結果が物理的性質を忠実に表現している，等の利点がある。

2. 理　　論

ブレイトンとモーサによって発表された解析法[1,2] はテレゲンの定理とキルヒホッフの法則が基本となっており，回路の状態変数としてインダクタンス L に流れる電流と静電容量 C の電圧を選ぶ。回路中に含まれるインダクタンス $L_1, L_2, \dots, L_p$ に流れる電流を $i_1, i_2, \dots, i_p$ とすればそれらの電圧は $L_1\dfrac{di_1}{dt}, L_2\dfrac{di_2}{dt}, \dots, L_p\dfrac{di_p}{dt}$ である。また回路中の静電容量 $C_1, C_2, \dots, C_q$ の電圧を $v_1, v_2, \dots, v_q$ とすれば，それらに流れる電流は $C_1\dfrac{dv_1}{dt}, C_2\dfrac{dv_2}{dt}, \dots, C_q\dfrac{dv_q}{dt}$ である。

次に P を回路の混合ポテンシャルとすれば

$$P=F-G+H$$

の3項から構成され，F は電流ポテンシャルと呼ばれ，変数として選んだインダクタンス L に流れる電流 i の関数であり，G は電圧ポテンシャルで変数として選んだ静電容量 C の電圧 v の関数である。そして H はループポテンシャルで，変数 i, v の関数である。また各ポテンシャルの次元は（電圧×電流）である。このとき微分方程式は

$$\left.\begin{aligned}
L_1\frac{di_1}{dt}&=\frac{\partial P}{\partial i_1}\\
L_2\frac{di_2}{dt}&=\frac{\partial P}{\partial i_2}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
L_p\frac{di_p}{dt}&=\frac{\partial P}{\partial i_p}\\
C_1\frac{dv_1}{dt}&=-\frac{\partial P}{\partial v_1}\\
C_2\frac{dv_2}{dt}&=-\frac{\partial P}{\partial v_2}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
C_q\frac{dv_q}{dt}&=-\frac{\partial P}{\partial v_q}
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

で表わされる。すなわち式 (1) は p 個の L と q 個の C の存在によって $(p+q)$ 元の連立一階微分方程式となる。また $L\dfrac{di}{di}=\dfrac{\partial P}{\partial i}$ の式はキルヒホッフの電圧則を，$C_1\dfrac{dv}{dt}=-\dfrac{\partial P}{\partial v}$ は，キルヒホッフの電流則を満たしている。

2-1. 回路素子と各種ポテンシャルの関係

定式化を行なうためには回路の混合ポテンシャル P を求める必要がある。今，回路素子としては二端子素子で**表1**に示すものに限定する。なお非線形素子 $f(v)$, $g(i)$ は負性抵抗素子で素子の電圧—電流特性から得られた関

* 電気工学科　助教授
Assistant Professor, Electrical Engineering Division

表1 回路素子と各ポテンシャル

回路素子 ＼ ポテンシャル	電流ポテンシャル		電圧ポテンシャル		ループポテンシャル	
	F	偏微係数 F′	G	G′	H	H′
抵　抗 R	$-\frac{1}{2}Ri^2$	$-Ri$	$-\frac{1}{2R}v^2$	$-\frac{1}{R}v$		
直流電圧源 E	$\pm E\cdot i$	$\pm E$				
直流電流源 I			$\pm I\cdot v$	$\pm I$		
非線形素子 f(v)			$-\int_0^v f(v)dv$	$-f(v)$		
非線形素子 g(i)	$-\int_0^i g(i)di$	$-g(i)$				
変数 i と変数 v					$\pm iv$	$\pm v$ / $\mp i$

数形が与えられているものとする。また**表1**に素子と各ポテンシャルとの関数及びその偏微係数を示す。表中の符号は $v=-Ri$ の基本定義によるものでこれは式 (1) の符号と整合をとるためにとられている。**表1**で抵抗 R は電流ポテンシャル F あるいは電圧ポテンシャル G のいずれでも定義できるが定式化に便利な一つのポテンシャルとして使い分ければよい。直流電圧源 E 及び非線形素子 $g(i)$ は必ず電流ポテンシャルで定義しなければならない。このため回路中に実在しない L_0 を仮挿入して形式的にポテンシャルを定義しなければならない場合が生ずる。また直流電流源 I 及び非線形素子 $f(v)$ は電圧ポテンシャルで定義しなければならない。この場合には C_0 の仮挿入が生ずる時がある。

回路中の L 及 C (仮挿入した L_0, C_0 を含めて) 以外の全ての素子が電流ポテンシャルか電圧ポテンシャルで定義された時点でループポテンシャルを定義することになる。ループポテンシャルの符号は L に流れる電流の方向でループ電流の方向を定めたときループ電流が C の電圧 v の高電位から流入する場合を－とする。逆のとき＋と考える。

ループポテンシャルの取り方は，回路中の L 又は L_0 の1つに注目して，他の L, L_0 を通ることなく C 又は C_0 をできるだけ多く含む閉ループ電流を考え，その閉ループ中に含まれる C 又は C_0 の電圧 v との間で定義するが，全ての L, L_0 についてループを取ったとき回路中の全 C, C_0 の電圧は一度以上ループポテンシャルとして採用されていることが必要である。なお同一の C 又は C_0 の電圧が複数のループで定義されることは許される。これらのポテンシャルの求め方を人間が行なう場合，小規模回路では直観的な能力で可能であるが大規模回路では機械的操作で行なう必要が生ずる。そこで次の様な機械的操作による定式化の手順を考えた。

この手順の概要は回路の接続情報から並列部，直列部を検索し，次の段階ではそれらを1つの構成要素として取り扱い，順次回路を並列部，直列部に集約登録して行く。それ以上集約できない回路を最簡形として登録後，これまでの各段階で登録された各部の素子をポテンシャル指標として $L(L_0)$, $C(C_0)$ に注目して改めて登録することによって，最終的にはその指標を使い，各ポテンシャルの偏微係数を用いて係数行列を作成する方法である。

このとき並列部はその一方の節点で，その後の段階で直列部の構成要素となったとき，その直列部に流れる電流とでキルヒホッフの電流則を満す式が得られる。直列部はその後の段階で並列部の構成要素となったとき，閉ループが形成されその並列部の (節点間) 電圧とでキルヒホッフの電圧則を満す式が得られる。

3. 定式化の手順

計算機上で定式化する場合の概要流れ図を**図1**に示す。

回路情報としては接続関係を示す始点，終点と，素子情報を示す素子のタイプ及び素子値が必要である。なお電流の方向あるいは電圧の極性について明記する必要がある素子については始点，終点で代用し，電流の方向は始点から終点の方向に流れると仮定し，電圧は始点が＋，終点が－と仮定する。また仮挿入する L_0 又は C_0 につ

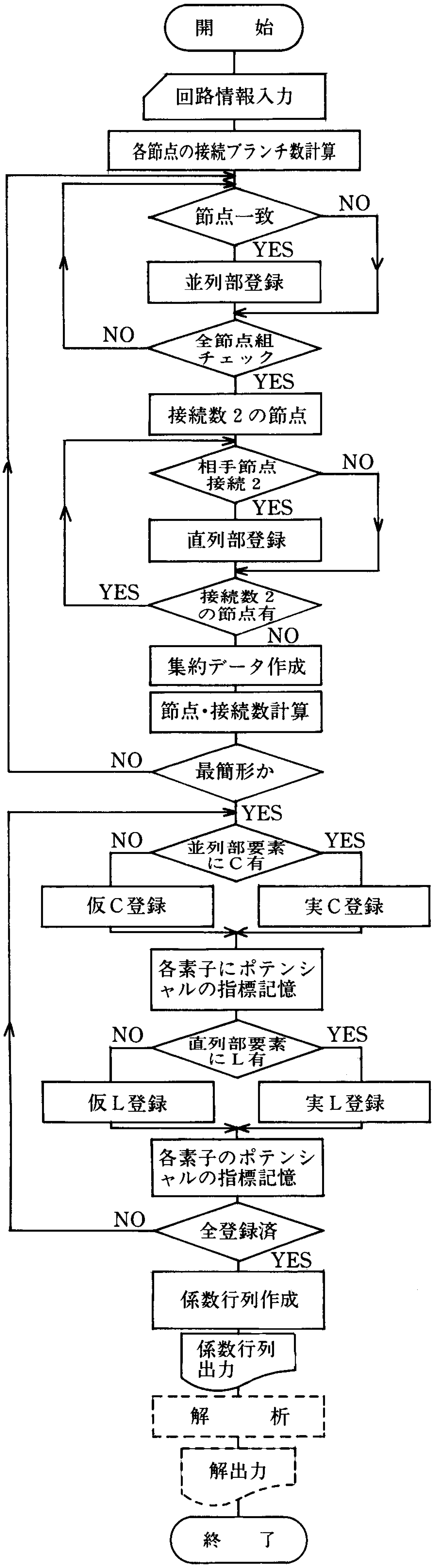


図1　概要流れ図

いても同様に考える。非線形素子については始点，終点タイプ，関数形の係数をデータとして入力する。

入力が終了した時点から流れ図にそって説明をすると

手順1　入力データ（又は集約データ）の始点，終点から，各節点の接続ブランチ数を計算する。

手順2　始点，終点データから同一節点間に接続されている素子をさがし，2個以上であれば1つの並列部として登録してゆく。登録済の節点の組にはチェックを入れ，全ての始点，終点の組に対して行なう。並列部の登録情報は始点，終点，段階数 n および構成素子タイプである。

手順3　手順1で求めた節点・接続数データで接続数2の節点に注目してスタック形式によって接続数が3以上となる節点まで始点・終点データと連系しながら追跡し，その節点を代表始点とし，逆方向に追跡して他端を代表終点として直列部登録を行なう。全ての接続数2がチェックされるまで登録する。直列部の登録情報は代表始点，代表終点，段階数 n，素子のタイプおよび構成節点である。

手順4　手順2で並列部として登録された始点・終点の組と手順3で直列部として登録された代表始点・終点の組およびこの段階で並列部，直列部に含まれなかった素子の始点・終点で集約データを作成する。

手順5　集約データについて手順1と同様な節点・接続数を計算する。

手順6　最簡形の形に回路が集約されたか判定し，最簡形であれば最終登録を行ない手順7へ。最簡形でなければ段階数を $n+1$ として手順2へ。

ここで言うところの最簡形には手順5で得られた情報が (1) 2節点で接続数がいずれも2の場合（これは直列とも並列とも考えられるが）最終登録では並列部として登録される。(2) 2節点でブランチの接続数がいずれも m であれば，m 個の構成要素が並列となった最簡形。(3) l 節点の全てが接続数2であれば，l 個の構成要素が直列となった最簡形がある。なお，$l(\geqq 4)$ 節点でかつ接続数が $m(\geqq 3)$ の場合は直列部又は並列部として登録できない最簡形であるので，この定式化では処理対象外としている。

手順7　最簡形までの各段階数に対応する並列部，直列部登録情報から L, C に注目して各回路素子のポテンシャルがどの L 又は C で関係づけられるかの指標を記憶する。また L に対しては C のテーブルを用意しループポテンシャルの指標を記憶する。具体的には第一段階で登録された各並列部について構成素子中に C が存在すれば代表 C として登録し，なければ仮挿入する C_0 を登録する。その後に構成素子ごとに電圧ポテンシャルの

指標を記憶する。このとき電流ポテンシャルで定義しなければならない素子についてはそのブランチに L_0 を仮挿入して指標を記憶する。もし，L_0 の挿入や構成素子として L が存在すれば，その L, L_0 に注目して C あるいは C_0 のループポテンシャルの指標を記憶する。

直列部の処理は，直列部の構成子中に L があればその L を，なければ仮挿入の L_0 を代表登録する。次いで電流ポテンシャルで表わせる素子の指標を記録する。電圧ポテンシャルでのみ表現すべき素子はその節点間に C_0 を仮挿入し，指標を記憶すると共にループポテンシャルの指標も記憶する。このときある段階ですでに処理された並列部が構成要素として含まれている場合があるがそのときは代表 C とのループポテンシャルの指標を求めればよい。

手順8 最終登録までの処理が終了すれば手順9へ。そうでなければ手順7へ。

手順9 手順7で求められた指標から係数行列の作成を行なう。

以上が手順の大まかな説明である。

4. 定式化の表現形式

前述したように原理的には定式化は式 (1) の表現であるが L_0 や C_0 の仮挿入を行なって処理を進めてきたが最終的には $L_0=0, C_0=0$ とする必要がある。さらに解析に便利な表現形式をとる必要もあるので次のような式の構造を考えた。

ここで

$$\begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{v} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{LR} & h_{LC} & 0 & h_{LC_0} \\ h_{CL} & g_{CR} & h_{CL_0} & 0 \\ 0 & h_{L_0C} & f_{L_0R} & h_{L_0C} \\ h_{C_0L} & 0 & h_{C_0L_0} & g_{C_0R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v \\ i_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pm\frac{E}{L} \\ \pm\frac{I}{C} \\ \pm E \\ \pm I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{g(i)}{L} \\ -\frac{f(v)}{C} \\ -g(i) \\ -f(v) \end{bmatrix} \quad (2)$$

i : 回路中に存在する L に流れる電流

v : 〃 C の電圧

i_0 : 仮挿入した L_0 に流れる電流

v_0 : 〃 C_0 の電圧

f_{LR}: L によって関係づけられる R の電流ポテンシャルの係数 $\frac{-R}{L}$ をもつ主対角行列

g_{CR}, h_{L_0C} の g, h: 電圧ポテンシャル，ループポテンシャルの係数の意味

5. 例　題

先に示した定式化の手順によって図 2(a) の回路の定式化処理の例解を示す。手順2及び手順3で登録される情報を表にしたものが表2, 表3である。また回路が集約されて最簡形に至る段階を示したものが図2中の (b) (c) (d) である。これに対応して (e) (f) (g) は各段階で回路素子のポテンシャル指標が得られるもの素子を示している。また仮挿入される L_0, C_0 を示し，さらにループ電流も明示されている。

表2, **表3**に基づいて手順7で処理された結果が**表4**である。表中の符号は極性から導かれるもので偏数係数の符号を示すものである。なお抵抗に関しては単に1の指標のみ入れているのは常に偏微係数は－であるためである。

表4から式 (1) の形で表現すると次式が得られる。

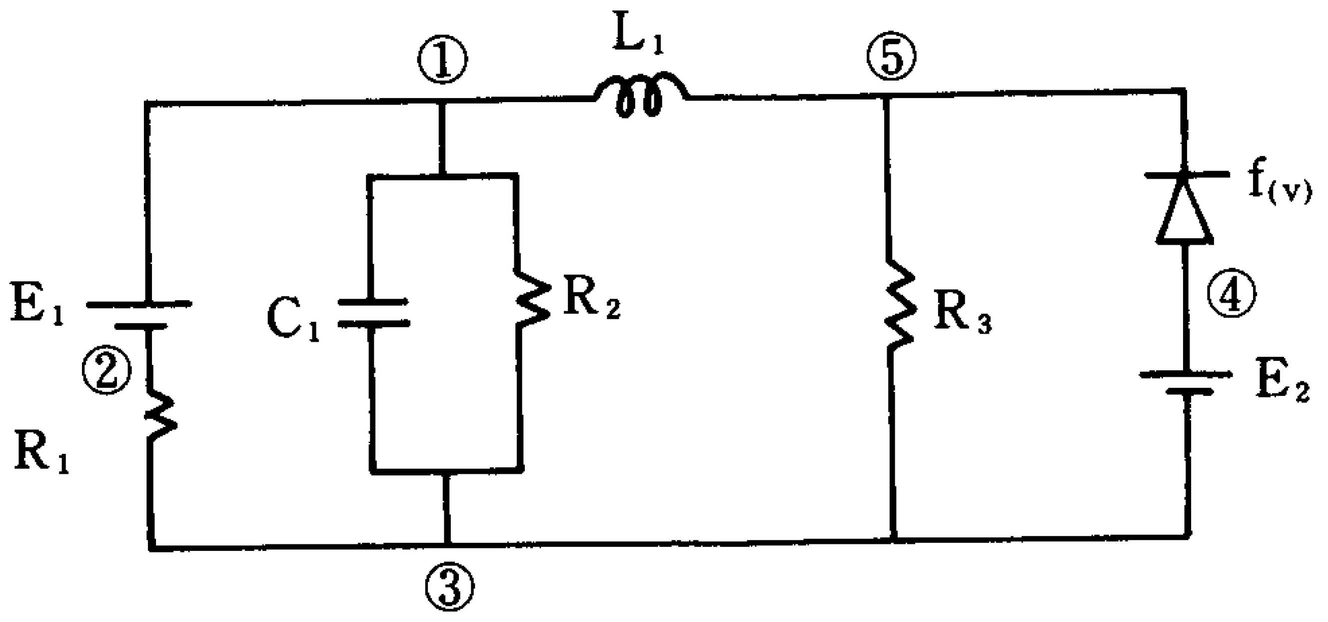
$$\left.\begin{aligned} L_1\frac{di_1}{dt} &= v_1 - v_{02} \\ C_1\frac{dv_1}{dt} &= -\frac{1}{R_2}v_1 + i_{01} - i_1 \\ L_{01}\frac{di_{01}}{dt} &= 0 = E_1 - R_1 i_{01} - v_1 \\ L_{02}\frac{di_{02}}{dt} &= 0 = E_2 - v_{01} - v_{02} \\ C_{01}\frac{dv_{01}}{dt} &= 0 = -f(v_{01}) + i_{02} \\ C_{02}\frac{dv_{02}}{dt} &= 0 = -\frac{1}{R_3}v_{02} + i_1 + i_{02} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

式 (3) を式 (2) の表現にすると式 (4) が得られる。

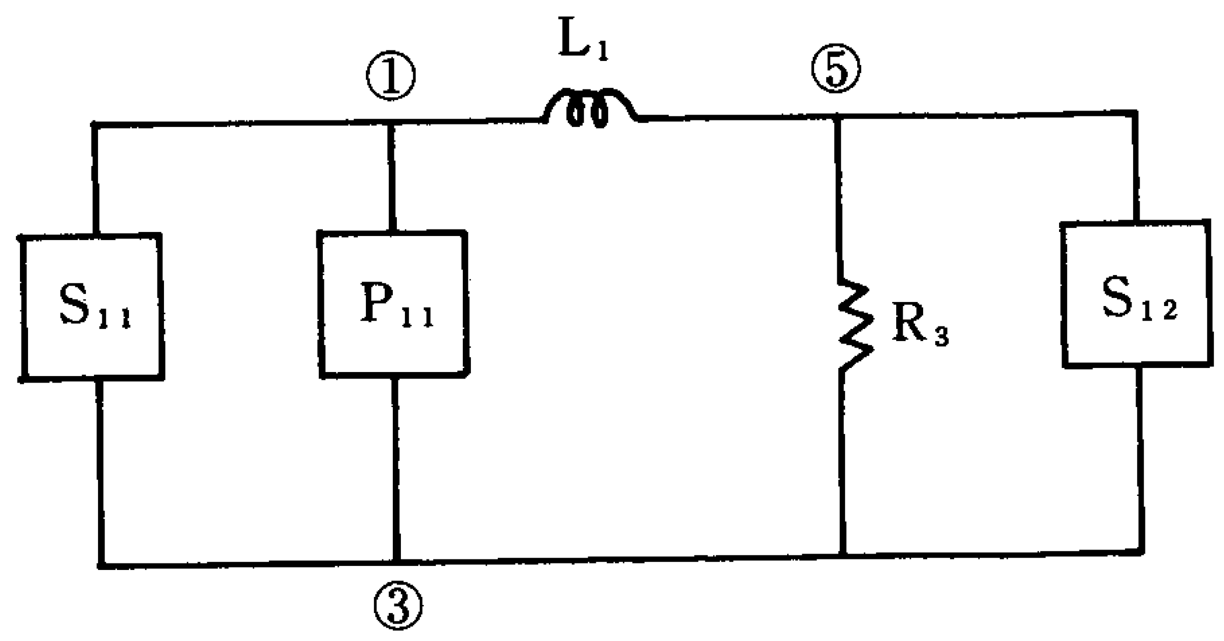
$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{v}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ -\frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_1R_2} & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_1 \\ i_{01} \\ i_{02} \\ v_{01} \\ v_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_1 \\ E_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -f(v_{01}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

式 (3) で

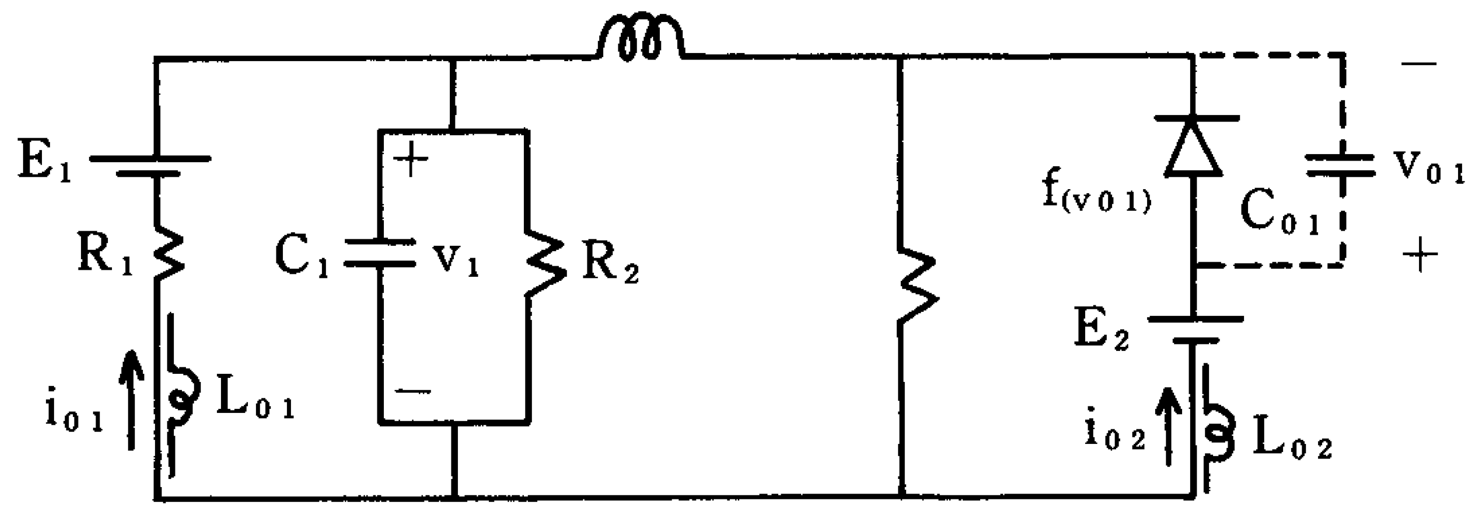
第1式は節点①⑤③①の閉ループで電圧則を



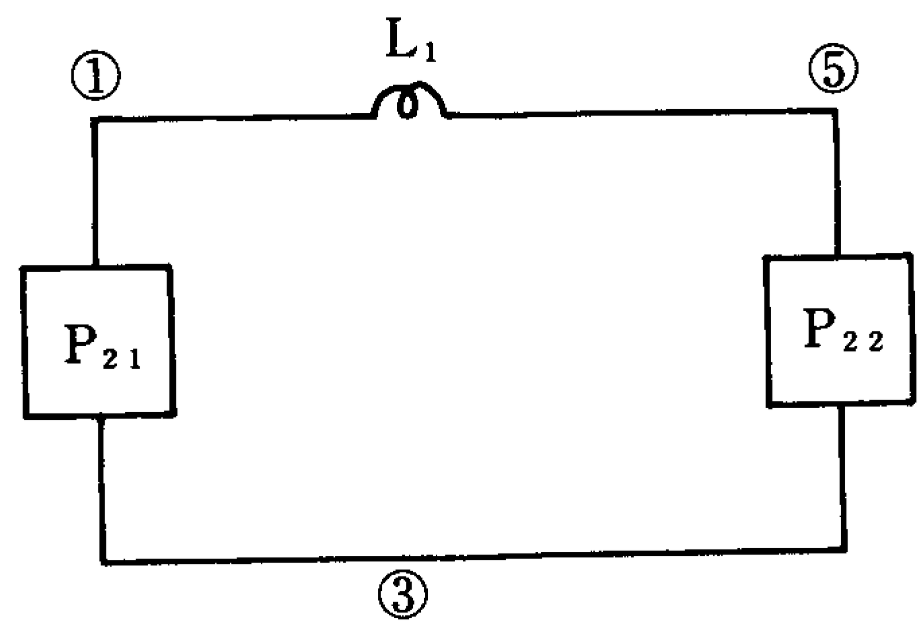
(a)



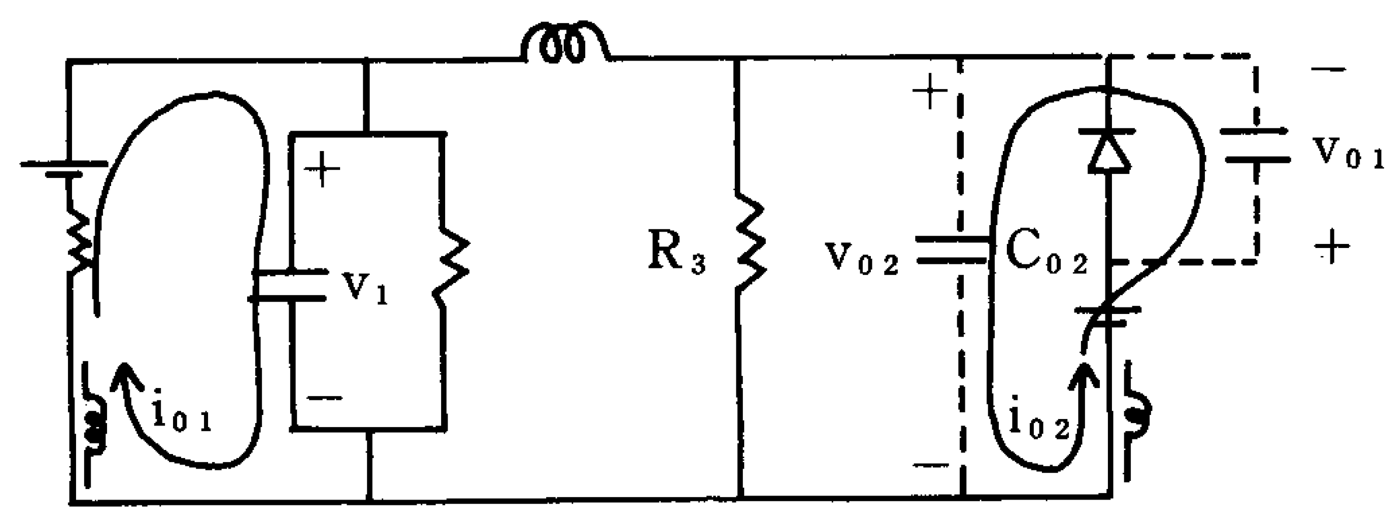
(b) 第1段階



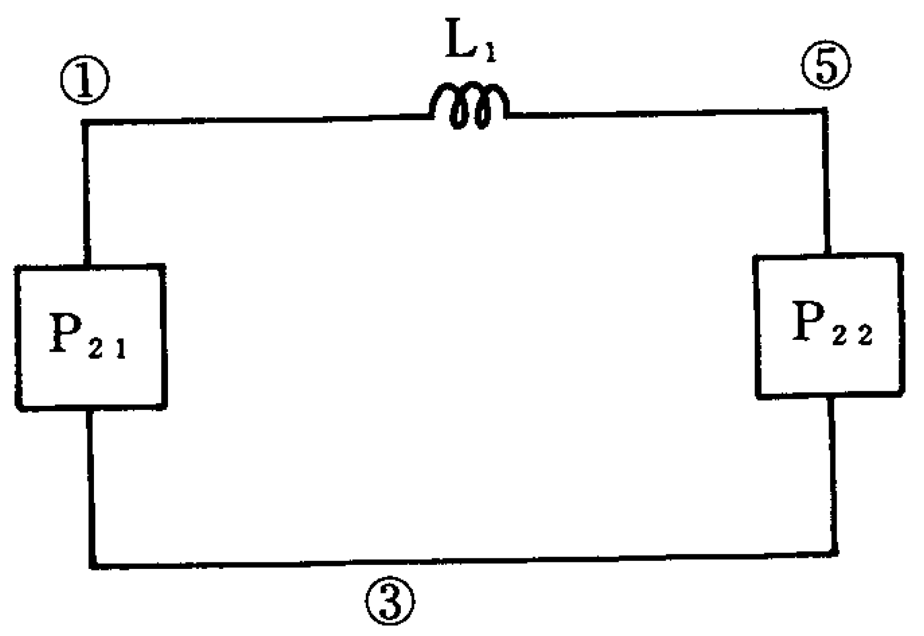
(e)



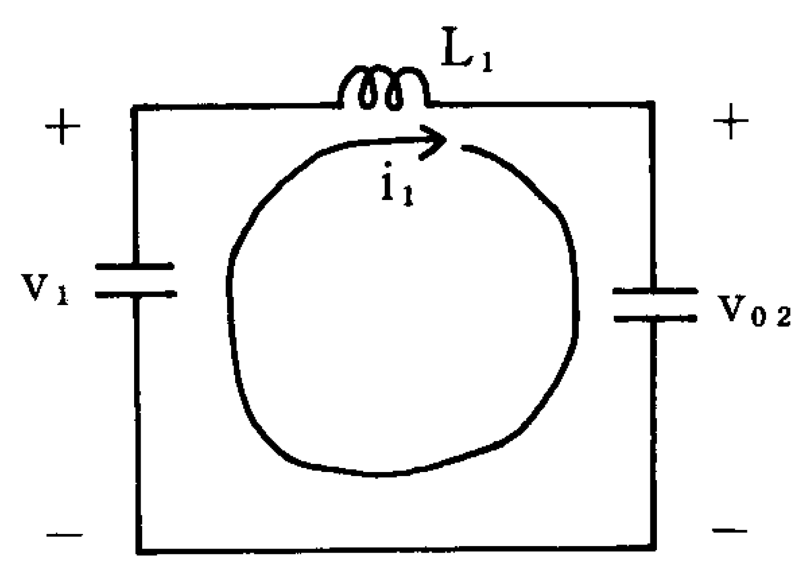
(c) 第2段階(最簡形)



(f)



(d) 最簡形の登録



(g)

図2 例題回路

表2 並列部登録情報

	始点	終点	段階	代表C	代表C_0	構成素子
(P_{11})	①	③	1	C_1		C_1, R_2
(P_{21})	①	③	2	C_1		S_{11}, P_{11}
(P_{22})	⑤	③	2		C_{02}	R_3, S_{12}

表3 直列部登録情報

	代表 始点	代表 終点	段階	代表L	代表L_0	構成素子	構成節点
(S_{11})	③	①	1		L_{01}	R_1, E_1	③ ② ①
(S_{12})	③	⑤	1		L_{02}	E_2, $f(v)$	③ ④ ⑤
(最簡)	①	③		L_1		L_1, P_{22}, P_{21}	① ⑤ ③ ①

表4 回路素子のポテンシャル指標

L	R_1	R_2	R_3	C_1	C_{01}	C_{02}	E_1	E_2	$g(i)$
1				+1		−1			

C	R_1	R_2	R_3	L_1	L_{01}	L_{02}	I_1	I_2	$f(v)$
1		1		−1	+1				

L_0	R_1	R_2	R_3	C_1	C_{01}	C_{02}	E_1	E_2	$g(i)$
1	1			−1			+1		
2					−1	−1		+1	

C_0	R_1	R_2	R_3	L_1	L_{01}	L_{02}	I_1	I_2	$f(v)$
1						+1			−1
2			1	+1		+1			

第2式は節点①で電流則を

第3式は節点③②①③の閉ループで電圧則を

第4式は節点③④⑤③の閉ループで電圧則を

第5式は節点④で電流則を

第6式は節点⑤で電流則を

満足するように定式化がされていることが解かる。

すなわちこの定式化の方法を用いれば導かれた結果の式はキルヒホッフの法則を直接表現していることから物理的性質を理解しやすい。

計算機処理で定式化を行なう場合は表4の指標から直接式 (4) の形式で求めることが可能である。また定式化中に L_0, C_0 の仮挿入があれば得られる方程式 (4) は連立一階微分・代数方程式となる。

6. おわりに

これまで述べてきたように，電子回路の微分方程式による定式化について基礎的な方法を確立することができた。また数値解析法として Gear の積分アルゴリズムを使用すると，定式化の容易さと数値解析の特徴がより一層発揮されるものと考えられる。

しかし現在の定式化では取扱えない回路があり，回路素子の種類を増すこと等，今後に残された問題点もある。

参考文献

1) R. K. Brayton, J. K. Moser: A Theory of Nonlinear Networks I, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. XXII, No. 1, P. 1～P. 33, 1964.

2) 藤田廣一：非線形問題，現代応用数学講座 7, p. 54～p. 69. コロナ社，昭53