

# 汚泥の摩擦係数に関する基礎的研究

金 成 英 夫\*

## Fundamental Study on the Friction Factor of Sludges

By Hideo Kanari\*

**Synopsis:** This paper deals with the friction factor of slurry from water purification plant and sewage sludge in pipe line transportation. Friction factor of slurries is examined on the experimental results, according to the power-law fluid in circular pipe.

As a result of this investigation, in turbulent flow region pipe diameter is largely affect on the friction factor and slurry concentration is considered to be no effect on friction factor.

**要旨:** 本論文は上水汚泥および下水汚泥を管路輸送した場合の摩擦係数について、指数法則流体の管内流動理論に従って実験値に検討を加えたものである。その結果、乱流領域における汚泥の摩擦係数は汚泥濃度にはほとんど関係はないが、管径の影響を受けることを示した。

### 1. 緒 論

上水汚泥および下水汚泥はそれぞれ浄水過程および下水処理過程で発生する。これらの汚泥は浄水場および下水処理場ごとに単独で処理・処分されているのが現状であるが、数ヶ所の浄水場あるいは下水処理場の汚泥を1ヶ所に集めて一括処理することも検討されている。上水汚泥および下水汚泥は含水率が高く、スラリー状であること、また、多量に、かつ、絶えず発生するため、一括処理する場合の輸送手段としては管路輸送が最も確実に経済的であるとされている。

汚泥輸送管路の設計を行なう場合、汚泥の摩擦係数を知ることが大切である。汚泥は多量の固形物を含むスラリーであるため、その流動特性は水などのニュートン流体とは異なる。したがって、汚泥の摩擦係数は水の場合の関係式をそのまま用いて求めることはできない。汚泥の摩擦係数に関する従来の研究は汚泥濃度と摩擦係数との関係あるいはレイノルズ数と摩擦係数との関係を実験的に求めているにすぎない<sup>1)2)3)4)5)</sup>。

そこで、本論文はDodgeらが展開した非ニュートン流体（指数法則流体）に関する管内流れの抵抗理論<sup>6)</sup>に従って、上水汚泥および下水汚泥の摩擦係数について検

討を加えたものである。

### 2. 指数法則流体の摩擦抵抗

DodgeとMetznerはMillikanらがニュートン流体で用いたのと同様な考え方で指数法則流体の抵抗法則について検討している<sup>6)</sup>。すなわち、指数法則流体の速度勾配とせん断応力との間には次の関係がある。

$$\tau = k \left( \frac{du}{dy} \right)^n \quad (1)$$

ここで、指数法則流体の管内流れをニュートン流体の場合と同様に、次の3つの領域に分ける。

- |        |   |                              |                                 |
|--------|---|------------------------------|---------------------------------|
| 層流底層   | ; | $0 \leq y \leq \delta$       | 乱れの影響は無視できる。                    |
| 遷移層    | ; | $\delta \leq y \leq \lambda$ | 乱れと粘性せん断の影響はある程度存在する。           |
| 乱流主流部分 | ; | $\lambda \leq y \leq R$      | 粘性せん断よりも乱流による運動量伝達が流速分布を決定している。 |

指数法則流体の場合、ニュートン流体の粘性係数の代りに構造粘度指数  $n$  および流体粘稠度指数  $k$  を用いると、流速は

$$u = f(R, \rho, \tau_w, k, n, y) \quad (2)$$

と表わせる。ここで、次元解析を行なうと、

$$\frac{u}{u^*} = f_1(z, \xi, n) \quad (3)$$

\* 土木工学科 助教授 工学博士  
Associate Professor, Civil Engineering Division, Dr. of Engineering

ここで,

$$\xi = \frac{r}{R} \quad (4)$$

$$z = \frac{R^n \cdot \rho \cdot u^{2-n}}{k} \quad (5)$$

となる。層流底層内では、管の半径  $R$  は流速  $u$  に影響しない。さらに、遷移層においても同様に考えると、これらの領域では流速は

$$u = f(\rho, \tau_w, k, n, y) \quad (6)$$

と表わせる。ここで、次元解析を行なうと、

$$\frac{u}{u^*} = f_2(z\xi^n, n) \quad (7)$$

となる。(7)式はニュートン流体 ( $n=1$ ) では実験結果と良く一致する。そこで、(7)式は  $0 \leq \xi \leq \xi_1$  の範囲でも成立すると仮定する。ここで、 $\xi_1$  は  $\lambda/R$  よりほんの少し大きな値である。

一方、速度欠損 ( $U_m - u$ ) は(2)式から  $R, \rho, \tau_w, k, n$ , および  $y$  の関数である。しかしながら、乱無主流部分では速度欠損は乱流の不規則な流速変動によって決まり、見掛け粘度には無関係であると考えられている。この仮定はニュートン流体では実証されている。指数法則流体の場合でも、ニュートン流体と同じことが成立するものと仮定すると、速度欠損は  $k$  に無関係となる。すなわち、

$$U_m - u = f(\tau_w, \rho, R, y, n) \quad (8)$$

次元解析を行なうと次の様になる。

$$\frac{U_m - u}{u^*} = f_3(\xi, n) \quad (9)$$

(9)式の適用範囲は厳密に言えば、乱流主流部分すなわち  $\lambda/R \leq \xi \leq 1$  である。半径に比べて、層流底層および遷移層の厚さは小さいので、近似的には、(9)式が管の全断面に適用できると仮定すると、次の様になる。

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{R^2} \int_0^R u \cdot r \, dr \\ &= \frac{2}{R^2} \int_0^R U_m r \, d\xi - \frac{2u^*}{R^2} \int_0^R f_3(\xi, n) r \, d\xi \end{aligned} \quad (10)$$

$n$  を一定にすると、(10)式は次の様になる。

$$\frac{U_m - V}{u^*} = P_n \quad (11)$$

ここで、

$$P_n = \frac{2}{R^2} \int_0^R f_3(\xi, n) r \, d\xi \quad (12)$$

ニュートン流体では、壁面層 (wall layer) は非常に薄く、(11)式は許容誤差範囲内で成立するので、指数法則流体 ( $0 < n < 1$ ) でも(11)式が成立すると仮定する。

一方、摩擦係数は次の式で定義される。

$$f = \frac{\tau_w}{\rho V^2} = \frac{D \cdot \Delta P}{4L} \quad (13)$$

また、

$$\frac{V}{u^*} = \sqrt{\frac{2}{f}} \quad (14)$$

ここで、(3)式を管の中心部分に適用すると、

$$\frac{U_m}{u^*} = f_1(z, 1, n) = F_1(z, n) \quad (15)$$

(11), (14) および (15) 式から

$$\sqrt{\frac{2}{f}} = F_1(z, n) - P_n \quad (16)$$

となる。したがって、摩擦係数は関数  $F_1(z, n)$  が分れば、求めることができる。

乱流主流部分の外側、すなわち、 $\lambda/R \leq \xi \leq \xi_1$  の範囲では、(7)式および(9)式は成立すると考える。(7)および(9)式から  $u/u^*$  を消去し、(15)式の  $U_m/u^*$  を代入すると、

$$f_2(z\xi^n, n) = F_1(z, n) - f_3(\xi, n) \quad (17)$$

となる。ここで、(17)式の左辺は  $\xi^n$  の関数であるのに対して、右辺の  $F_1$  は  $\xi^n$  には無関係で、 $f_3$  は  $\xi$  の関数である。したがって、(17)式を次のように変形する。

$$f_2(z\xi^n, n) = F_1(z, n) - f_3(\xi^n, n) \quad (18)$$

ここで、 $n$  を一定と考えて、(18)式から  $n$  を消去すると、

$$f_{2n}(z\xi^n) = F_{1n}(z) - f_{3n}(\xi^n) \quad (19)$$

となる。ここで、

$$\frac{df_{2n}}{d(z\xi^n)} = f'_{2n} \quad (20)$$

とおくと、

$$\left( \frac{\partial f_{2n}}{\partial z} \right)_\xi = \frac{df_{2n}}{d(z\xi^n)} \left( \frac{\partial(z\xi^n)}{\partial z} \right)_\xi = f'_{2n} \xi^n \quad (21)$$

となる。(19)式において、

$$\left( \frac{\partial f_{2n}}{\partial z} \right)_\xi = \left( \frac{\partial F_{1n}(z)}{\partial z} \right)_\xi = \frac{\partial F_{1n}}{\partial z}$$

よって、

$$f'_{2n} \xi^n = \frac{\partial F_{1n}}{\partial z} \quad (22)$$

となる。同様にして、(19)式において、

$$\left( \frac{\partial f_{2n}}{\partial \xi^n} \right)_z = \frac{df_{2n}}{d(z\xi^n)} \left( \frac{\partial(z\xi^n)}{\partial \xi^n} \right)_z = f'_{2n} z \quad (23)$$

$$f'_{2n} z = - \frac{df_{3n}}{d\xi^n} \quad (24)$$

となる。

ここで、 $dF_{1n}/dz$  は  $\xi$  に独立であるので、(22)式から  $f'_{2n}$  は  $f(z)/\xi^n$  の形となる。一方、 $df_{3n}/d\xi^n$  は  $z$  に独立であるので、(24)式から  $f'_{2n}$  は  $f(\xi^n)/z$  の形となる。これらの条件は次の式で満足する。すなわち、

$$f'_{2n} = \frac{A_n}{z \cdot \xi^n} \quad (25)$$

(22) と (25) 式から、

$$dF_{1n}(z) = A_n \frac{dz}{z} \quad (26)$$

となり、積分すると次のようになる。

$$F_{1n}(z) = \frac{U_m}{u^*} = A_n \ln z + B_n \quad (27)$$

(27) 式を(16)式に代入すると、

$$\sqrt{\frac{2}{f}} = A_n \ln z + B_n - P_n \quad (28)$$

となり、さらに、(5)式と(14)式を代入すると、

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = A_{1n} \log [Re^0 f^{1-\frac{n}{2}}] + C_n \quad (29)$$

ここで、

$$Re^0 = \frac{D^n \cdot V^{2-n} \cdot \rho}{k} \quad (30)$$

$$A_{1n} = 1.628 A_n \quad (31)$$

$$C_n = 0.4901 A_n \left(1 + \frac{n}{2}\right) + B_n - P_n \quad (32)$$

となる。

レイノルズ数として  $Re^0$  の代りに Metzner と Reed が提案した広義のレイノルズ数<sup>7)</sup> を用いることとする。すなわち、Metzner らは層流領域における速度勾配  $(-du/dr)_0$  は次の式で与えられるとした。

$$\left(-\frac{du}{dr}\right)_0 = \frac{3n'+1}{4n'} \left(\frac{8V}{D}\right) \quad (33)$$

$n'$  が一定の場合、(33) 式を積分すると、

$$\tau_0 = \frac{D \cdot \Delta P}{4L} = k' \left(\frac{8V}{D}\right)^{n'} \quad (34)$$

となる。この(34)式は(1)式と類似しており、 $n'$  が一定の場合、工学的には次の関係があるとされている<sup>7)</sup>。

$$n' = n \quad (35)$$

$$k' = k \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^n \quad (36)$$

ここで、(33) 式を(13)式に代入すると、

$$f = \frac{16k' \cdot 8^{n'-1}}{D^{n'} \cdot V^{2-n'} \cdot \rho} \quad (37)$$

となる。さらに、ニュートン流体の場合と同様に、

$$f = \frac{16}{Re} \quad (38)$$

とおくと、広義のレイノルズ数は次のようになる。

$$Re = \frac{D^{n'} \cdot V^{2-n'} \cdot \rho}{8^{n'-1} k'} \quad (39)$$

(29) 式と(39) 式から、

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = A_{1n} \log [Re f^{1-\frac{n'}{2}}] + C'_n \quad (40)$$

ここで、

$$C'_n = A_{1n} \log \left[ \left(\frac{1}{8}\right) \left(\frac{6n'+2}{n'}\right)^{n'} \right] + C_n \quad (41)$$

となる。以上が Dodge らによって誘導された指数法則流体に関する抵抗法則である。

円管内の流動の場合、次の Darcy-Weisbach の式で定義される摩擦損失係数を用いることが多い。すなわち、

$$h_f = \lambda_f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} \quad (42)$$

この場合、

$$f = \frac{\lambda_f}{4} \quad (43)$$

となる。したがって、(40) 式は

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda_f}} = A'_{1n} \log [Re \lambda_f^{1-\frac{n'}{2}}] + C''_n \quad (44)$$

ここで、

$$A'_{1n} = \frac{1}{2} A_{1n} \quad (45)$$

$$C''_n = \frac{1}{2} C'_n - 0.301 \left(1 - \frac{n'}{2}\right) A_{1n} \quad (46)$$

となる。(44) 式の  $A'_{1n}$  および  $C''_n$  は実験的に決定する必要がある。

### 3. 実験装置および実験方法

上水汚泥および下水汚泥の摩擦係数の測定に用いた実験管路は塩化ビニール製であり、図-1 はその実験装置の概要を示したものである。表-1 に実験装置の諸元を示した。圧力損失は汚泥が入り込まないように圧力安定槽を設けたマンノメーターで、さらに、流量は管径 16.2 mm および 24.6 mm の実験管路については体積法で、管径 76.6 mm の実験管路では重量法で測定した。

実験に用いた汚泥は A 浄水場の上水汚泥および O 下

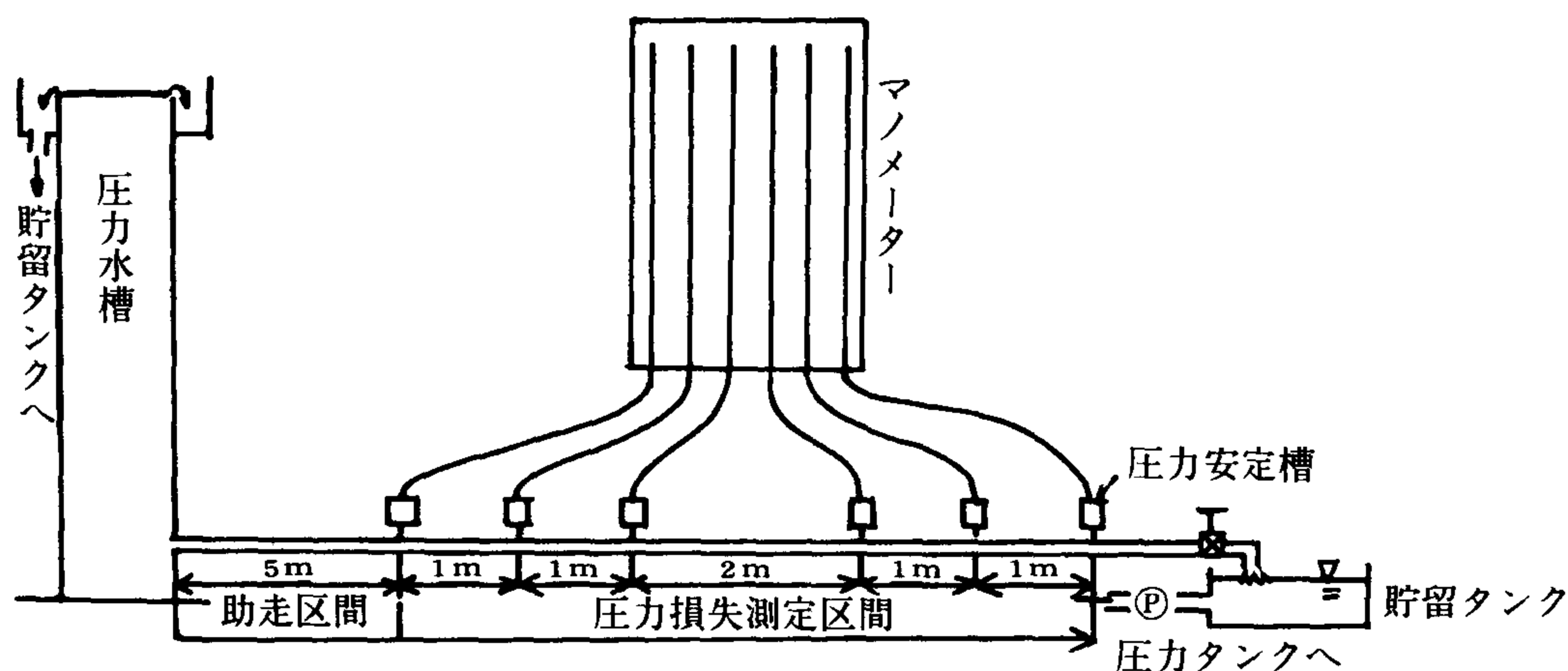


図-1 実験装置

表-1 実験装置の諸元と供試汚泥

管 径 (mm)	助走区間 (m)	圧力損失測定 区間 (m)	汚泥の種類	汚泥濃度 (mg/l)	有機物含有率 (VS/TS%)	備 考
16.2	1	3	上水汚泥	9,200~ 87,000	—	A 浄水場
24.6	5	6	下水汚泥 (返送汚泥)	2,000~ 35,000	66.9~83.4 (平均77.1)	O 下水処理場 (活性汚泥法)
76.6	5	6	下水汚泥 (返送汚泥)	5,000~ 20,000	73.5~82.1 (平均78.2)	O 下水処理場 (活性汚泥法)

水処理場の下水汚泥（余剰汚泥）である。A 浄水場は河川水を原水とし、凝集剤として硫酸アルミニウムを用いている。供試汚泥は沈殿池から引き抜き、濃縮槽を経たものを用いた。O 下水処理場は活性汚泥法で下水を処理している。供試汚泥は余剰汚泥を用いた。

#### 4. 実験結果と考察

図-2 は水を用いた場合の実験管路のレイノルズ数と摩擦損失係数との関係である。ここで、レイノルズ数は次の式で計算した。すなわち、

$$Re = \frac{D \cdot V \cdot \rho}{\mu} \quad (47)$$

図-2 に示すように、層流領域では

$$\lambda_f = \frac{64}{Re} \quad (48)$$

の理論曲線に、一方、乱流領域では滑らかな管における Prandtl-Kármán の関係式

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda_f}} = 2.03 \log [Re \sqrt{\lambda_f}] - 0.80 \quad (49)$$

に一致しているのが認められる。実験に使用した管路は塩化ビニール製であり、粗度は高々 0.005 mm 程度<sup>5)</sup>、

また、0~0.002 mm ともされている<sup>9)</sup>。したがって、粗度を  $k_s = 0.002$  mm とした場合の相対粗度は表-2 のようになる。図-2 および表-2 を総括的に検討すると、実験管路は滑らかな管であると考えられる。

上水汚泥および下水汚泥の流動特性を回転粘度計で検討した結果、これらの汚泥は擬塑性流体として取り扱うことができ、工学的な範囲では、これらの汚泥の速度勾配とせん断応力との関係は(1)式で表わせるとされている<sup>5)8)</sup>。したがって、前述の指数法則流体の摩擦抵抗の関係式が適用できる。

上水汚泥および下水汚泥の管路輸送における流速と管長 100 m 当りの損失水頭 (m) との関係を図-3 に示す。層流領域での  $\log V$  と  $\log h_f$  との関係は直線である。このことは、(34)式の  $n'$  が一定であることを示している。したがって、(35)式および(36)式が成立し、さらに、(40)式および(44)式が成立することになる。図-4 は上水汚泥および下水汚泥の  $\log [Re \lambda_f^{-\frac{n'}{2}}]$  と  $\sqrt{1/\lambda_f}$  との関係を示したものである。これらの関係は直線で表わせる。

(44)式の誘導過程で分るように、(44)式の  $A'_{1n}$  およ

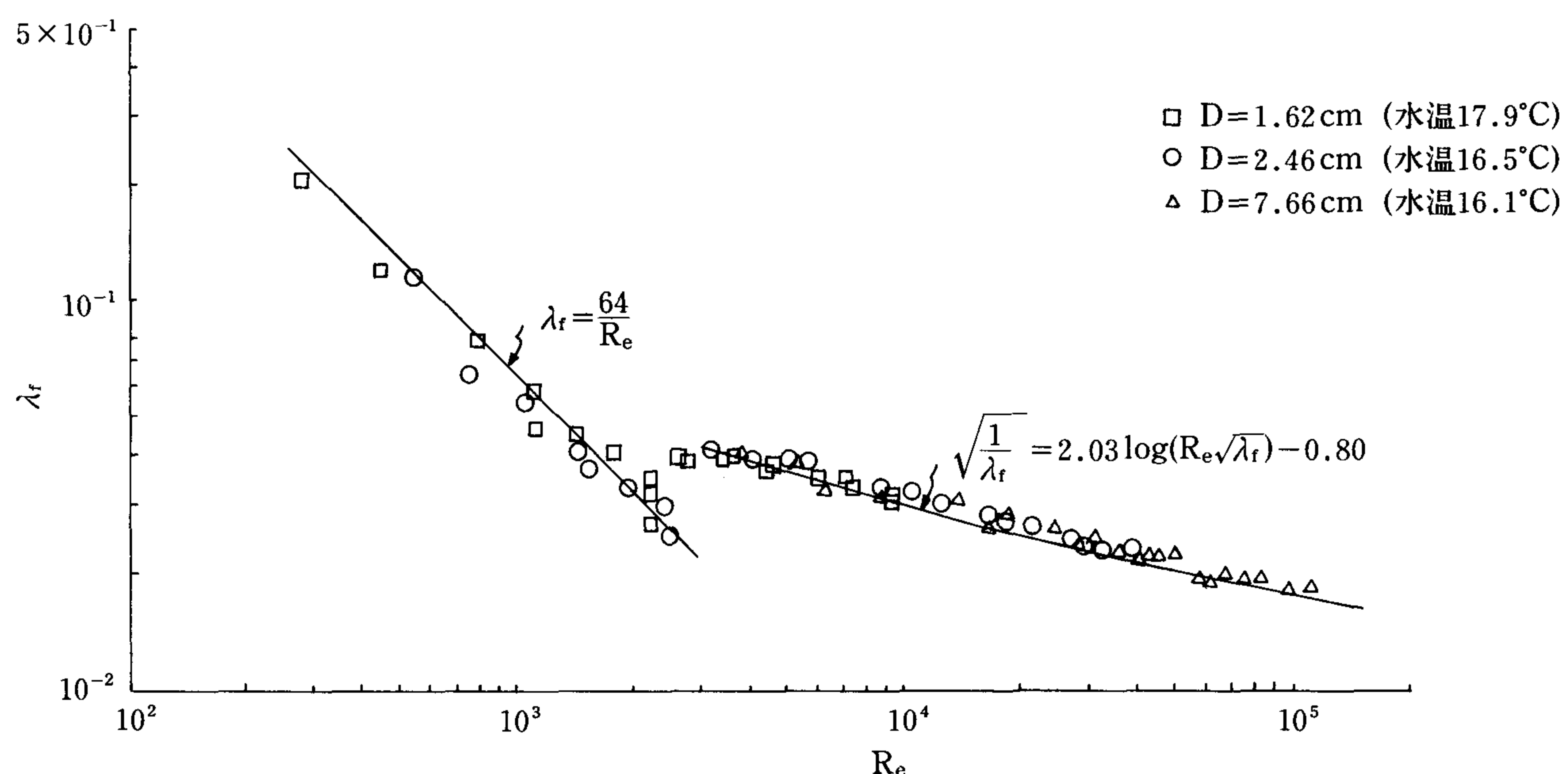


図-2 レイノルズ数と摩擦係数との関係

表-2 実験管路の相対粗度

D(mm)	$k_s/D$
16.2	$1.23 \times 10^{-4}$
24.6	$8.13 \times 10^{-5}$
76.6	$2.61 \times 10^{-5}$

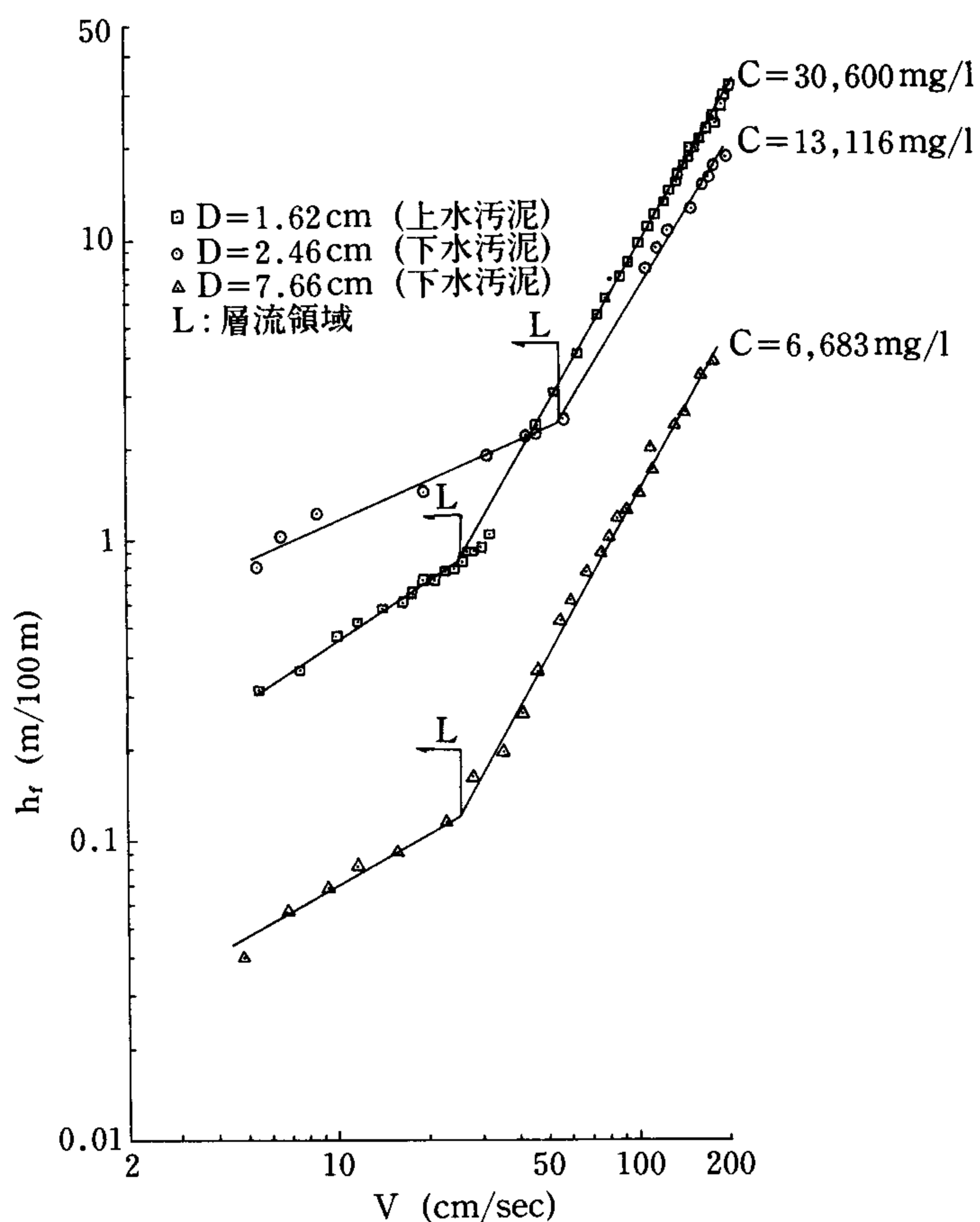
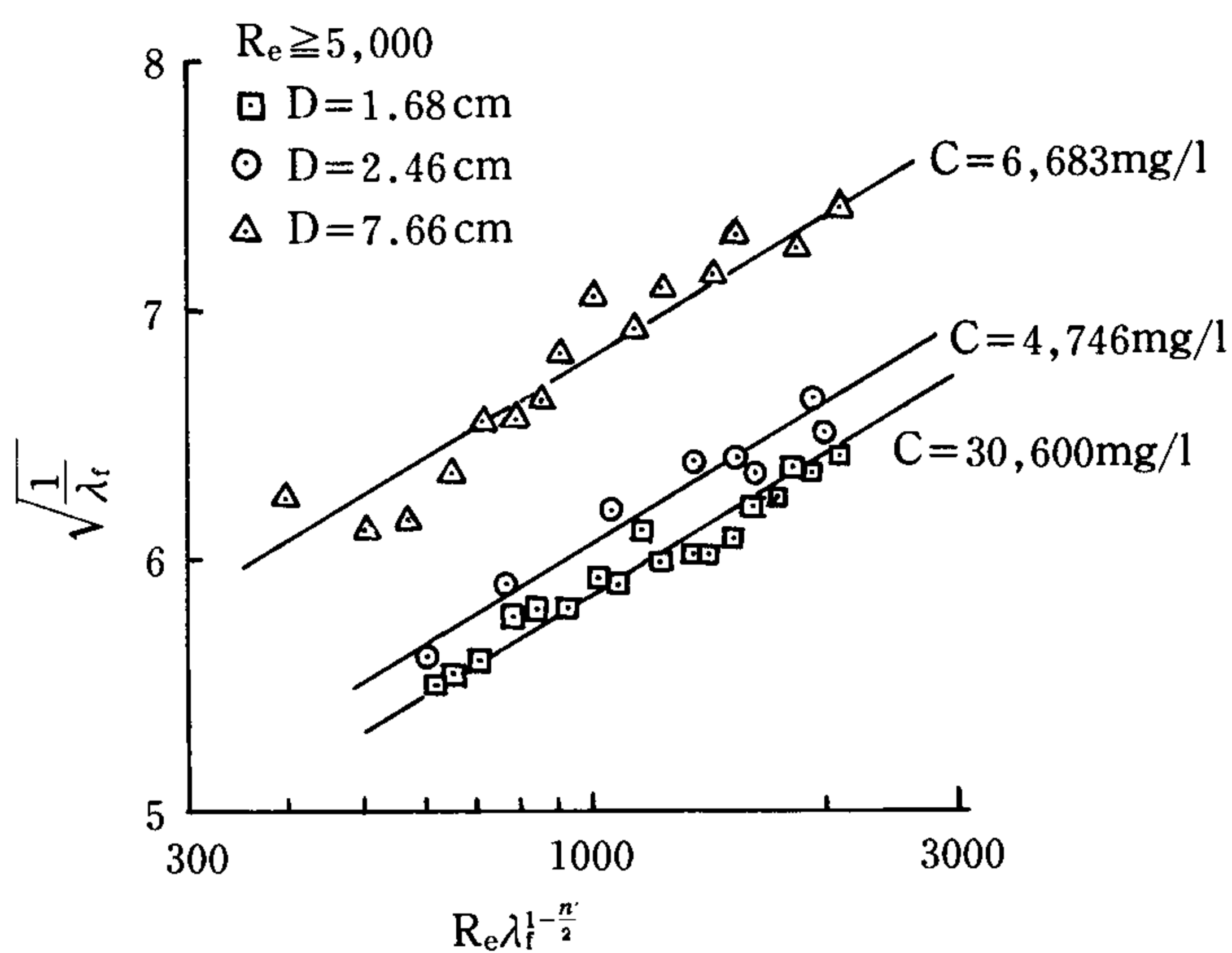
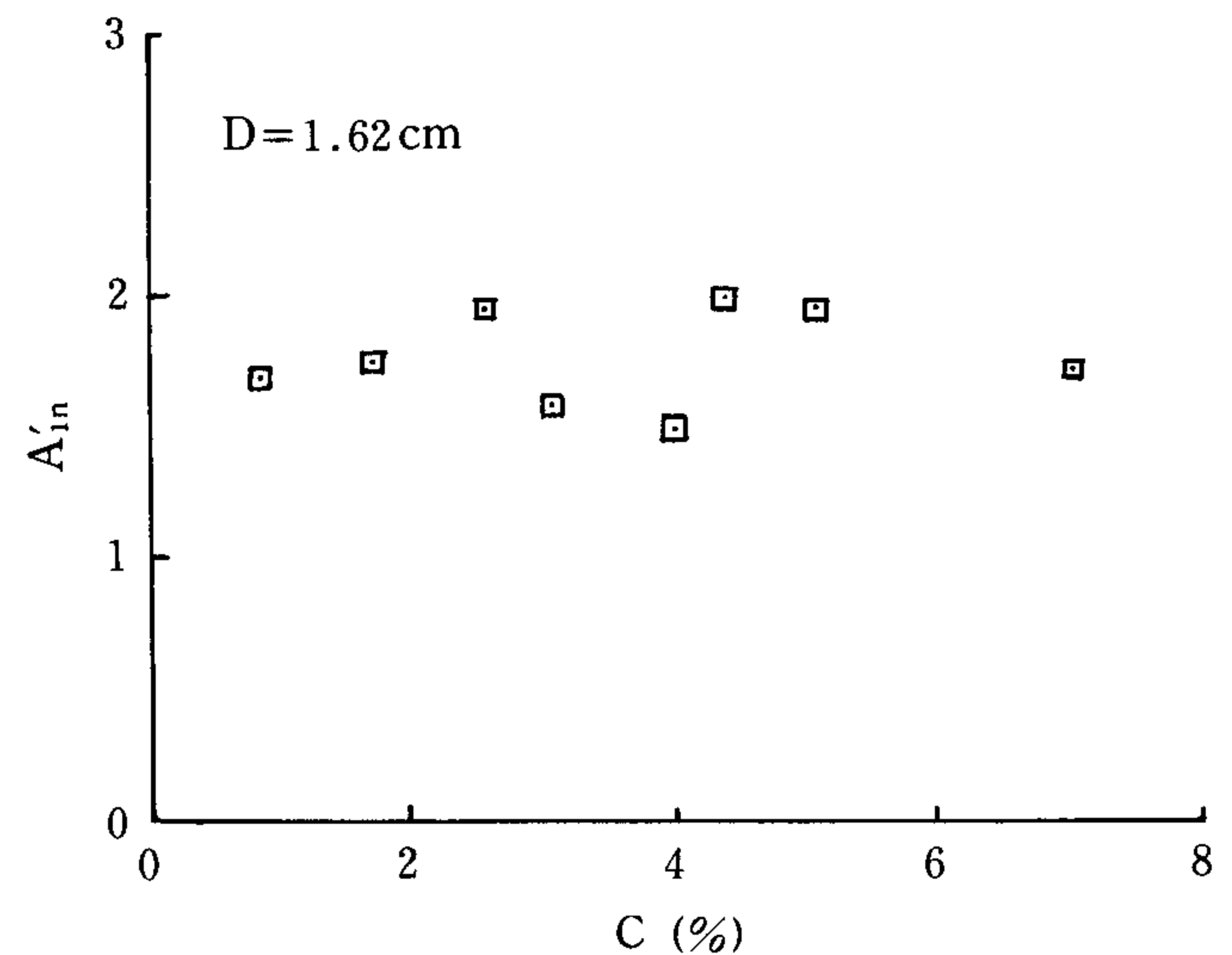
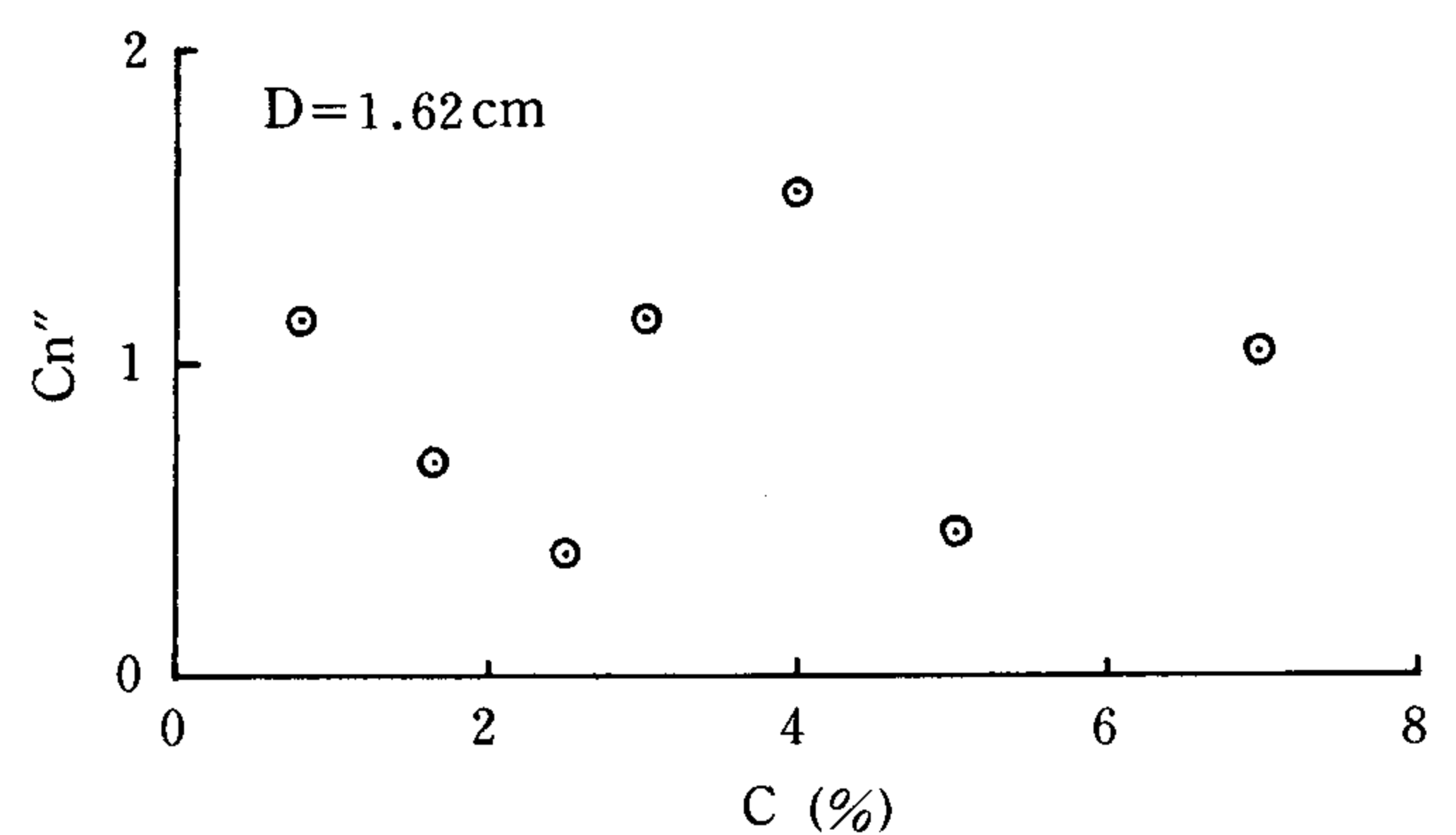
 $k_s=0.002$  mm とした場合

図-3 汚泥の流速と損失水頭との関係

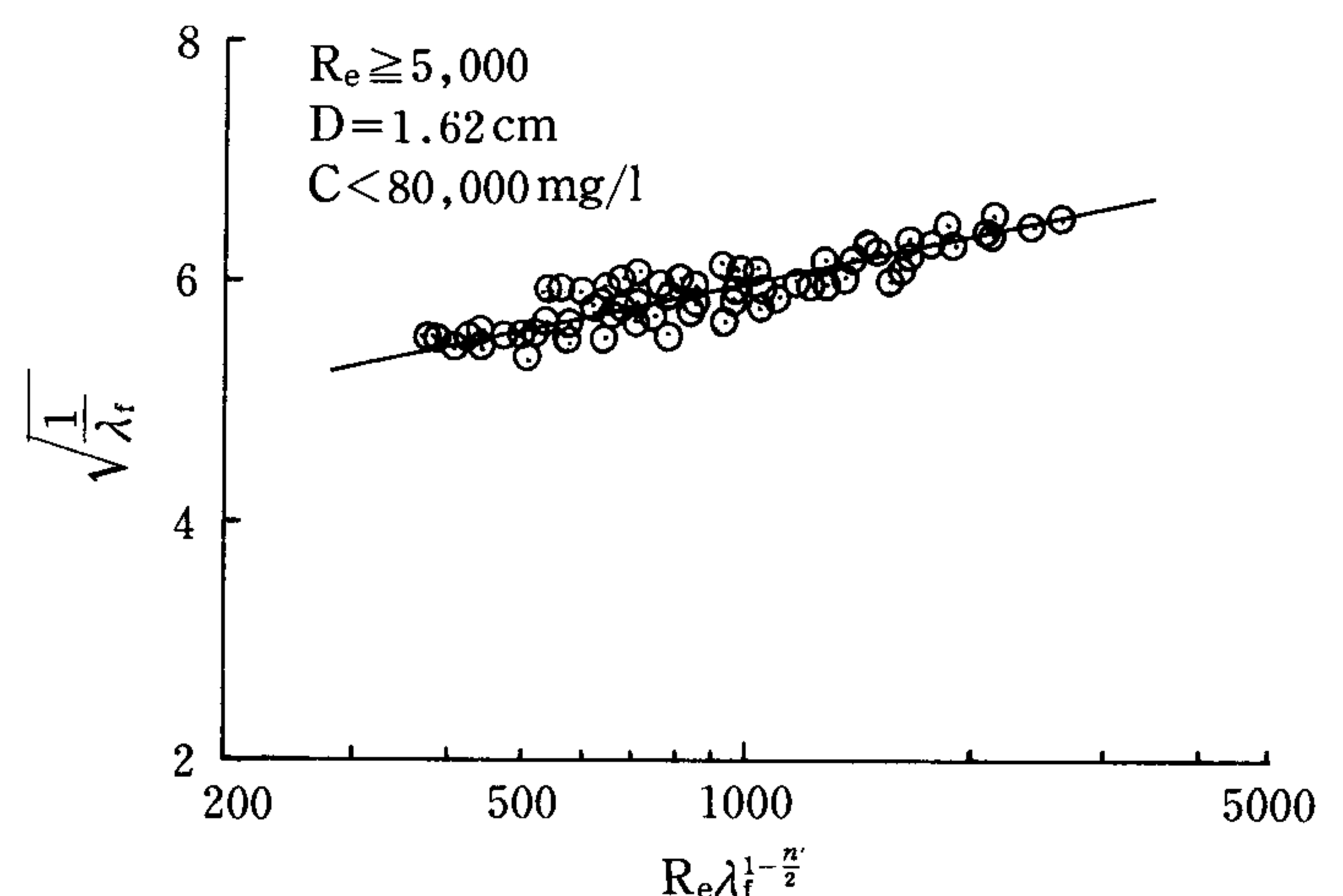
図-4 汚泥の  $\log [R_e \lambda_f^{1-\frac{n'}{2}}]$  と  $\sqrt{1/\lambda_f}$  との関係

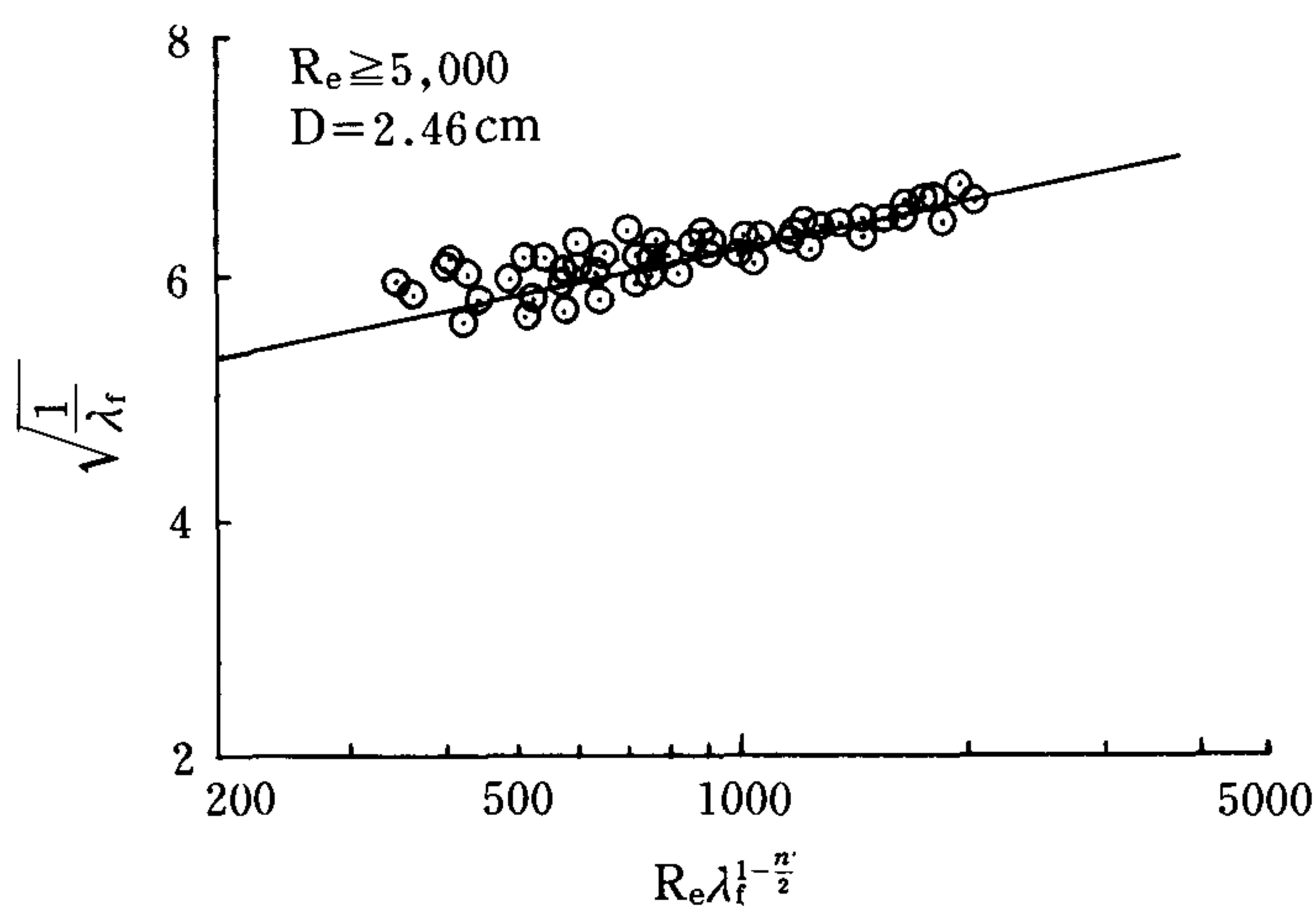
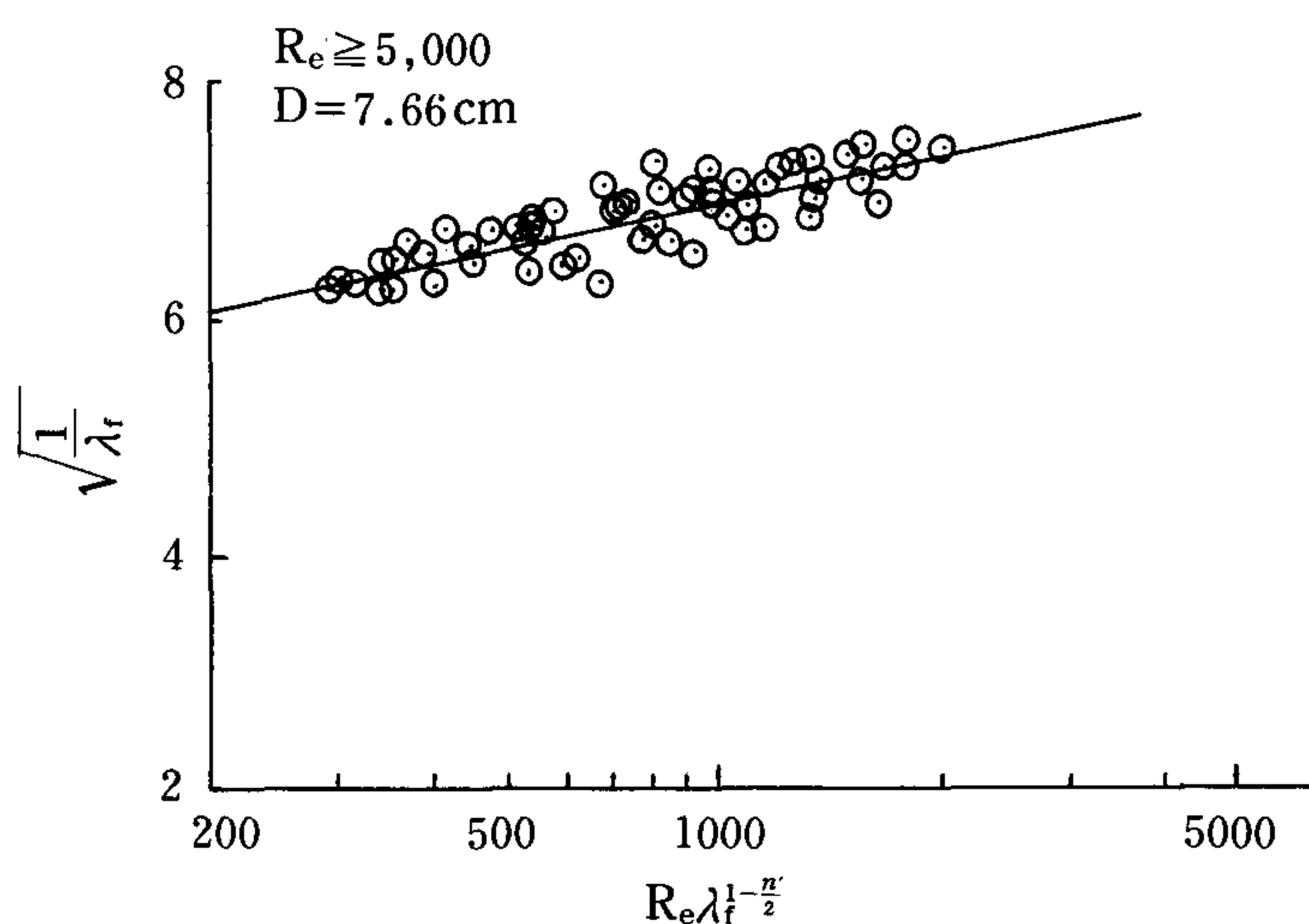
び  $C_n$  は  $n'$  の関数である。ここで、 $n'$  は汚泥濃度のみの関数であるため<sup>5)8)10)</sup>、結局、係数  $A'_{in}$  および  $C_n$  は汚泥濃度の関数となる。図-5 および図-6 はそれぞれ汚

図-5 汚泥濃度と  $A'_{in}$  との関係図-6 汚泥濃度と  $C_n$  との関係

泥濃度と  $A'_{in}$  および  $C_n$  との関係を示したものである。これらの図に見られるように、 $A'_{in}$  および  $C_n$  は汚泥濃度に関係なくほぼ一定と考えることができる。

$A'_{in}$  および  $C_n$  が汚泥濃度に関係なくほぼ一定であることから、供試汚泥の全ての濃度について  $R_e \lambda_f^{1-\frac{n'}{2}}$  と  $1/\lambda_f$  との関係をプロットし図-7、図-8 および図-9 に示した。これらの関係はそれぞれ次の式で表わすことができる。すなわち、

図-7 汚泥の  $\log [R_e \lambda_f^{1-\frac{n'}{2}}]$  と  $\sqrt{1/\lambda_f}$  との関係

図-8 汚泥の  $\log [Re \lambda_f^{1-\frac{n'}{2}}]$  と  $\sqrt{1/\lambda_f}$  との関係図-9 汚泥の  $\log [Re \lambda_f^{1-\frac{n'}{2}}]$  と  $\sqrt{1/\lambda_f}$  との関係

$D = 16.2 \text{ mm}$

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda_f}} = 1.30 \log [Re \lambda_f^{1-\frac{n'}{2}}] + 2.08 \quad (50)$$

$D = 24.6 \text{ mm}$

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda_f}} = 1.30 \log [Re \lambda_f^{1-\frac{n'}{2}}] + 2.30 \quad (51)$$

$D = 76.6 \text{ mm}$

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda_f}} = 1.30 \log [Re \lambda_f^{1-\frac{n'}{2}}] + 3.04 \quad (52)$$

これらの直線の傾きは

$$A'_n = 1.30 \quad (53)$$

と同じであるが、切片  $C'_n$  は管径とともに変化している。図-10は管径と  $C'_n$  との関係を示したものであり、これらの関係は次の式で表わせる。すなわち、

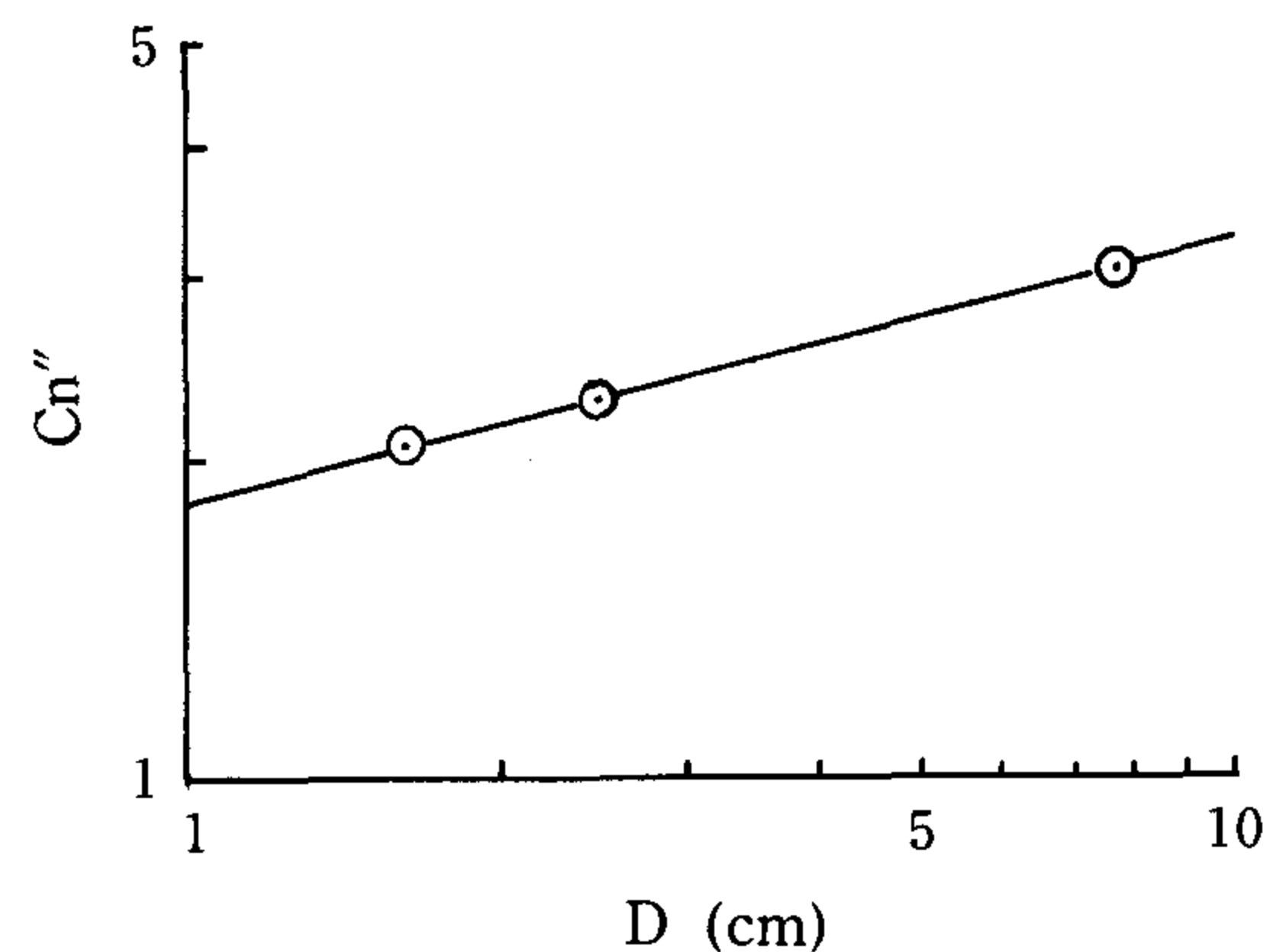
$$C'_n = 1.83 D^{0.252} \quad (54)$$

$D$ ; 管径 (cm)

したがって、乱流領域 ( $Re \geq 5000$ ) において、汚泥の円管内の流動における摩擦抵抗は次の式で表わすことができる。すなわち、

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda_f}} = 1.30 \log [Re \lambda_f^{1-\frac{n'}{2}}] + 1.83 D^{0.252} \quad (55)$$

但し  $D$ : 管径 (cm)

図-10 管径と  $C'_n$  との関係

## 5. 結 論

上水汚泥および下水汚泥の管路輸送における摩擦係数について指数法則流体の抵抗法則をもとに管壁が滑らかな管路を用いて実験的に検討を加えた。その結果、次の結論を得た。すなわち、

(1) 乱流領域における上水汚泥および下水汚泥の  $\log [Re \lambda_f^{1-\frac{n'}{2}}]$  と  $\sqrt{1/\lambda_f}$  との関係は直線となる。

(2) 係数  $A'_n$  は汚泥濃度および管径に関係なく一定であるが、 $C'_n$  は管径とともに大きくなる。

(3) 滑らかな管の乱流領域 ( $Re \geq 5000$ ) における摩擦損失係数の関係式を示した。

## 謝 辞

本研究を行なうに際して早稲田大学教授遠藤郁夫先生に懇切なる御指導を賜りました。ここに記して謝意を表します。

## 記 号

$A_n$	; 構造粘度指数の関数
$A_{1n}$	; 構造粘度指数の関数
$A'_{1n}$	; 構造粘度指数の関数
$B_n$	; 構造粘度指数の関数
$C_n$	; 構造粘度指数の関数
$C'_n$	; 構造粘度指数の関数
$D$	; 管径
$du/dy$	; 速度勾配
$f$	; 摩擦係数
$g$	; 重力加速度
$k$	; 流体粘稠度指数
$k'$	; 流体粘稠度指数
$L$	; 管長
$n$	; 構造粘度指数
$n'$	; 構造粘度指数
$P_n$	; 構造粘度指数の関数
$\Delta P$	; 圧力損失



- $r$  ; 管の中心からの距離  
 $R$  ; 管の半径  
 $u$  ; 流速  
 $u^*$  ; 摩擦速度 ( $=\sqrt{\tau_w/\rho}$ )  
 $U_m$  ; 管内の最大流速  
 $V$  ; 平均流速  
 $y$  ; 管壁からの距離  
 $z$  ; 無次元数  
 $\delta$  ; 層流底層の厚さ  
 $\lambda$  ; 遷移層と乱流本流部分の境界層までの厚さ  
 $\lambda_f$  ; 摩擦損失係数  
 $\mu$  ; 粘性係数  
 $\xi_1$  ;  $\lambda/R$  より少し大きい  $\xi$  値  
 $\rho$  ; 密度  
 $\tau$  ; せん断応力  
 $\tau_w$  ; 壁面のせん断応力

(原稿受付 昭和58年9月24日)

#### 参 考 文 献

- 1) "Friction of Sewage Sludge in Pipes", Progress Report of the Sanitary Engineering Division, Proc. ASCE, Vol. 55, No 7, PP 1773~1797, (1929).
- 2) Tsung-Lein Chou, "Flow of Concentrated Raw Sewage Sludge in Pipes", Proc. ASCE, PP 1780-1~1780-19, (1958).
- 3) D. H. Caldwell, H. E. Babbitt, "Flow of Muds, Sludges, and Suspensions in Circular Pipe", Ind. Engi. Chem., Vol. 33, No 2, PP 249~256, (1941).
- 4) Bengt O. A. Headström, "Flow of Plastics Materials in Pipes", Ind. Engi. Chem. Vol. 44, No 3, PP 651~656, (1952).
- 5) 遠藤郁夫, 金成英夫, "下水汚泥の摩擦損失係数に関する基礎的研究", 土木学会論文報告集, No 301, pp. 72~82, (1980).
- 6) D. W. Dodge, A. B. Metzner, "Turbulent Flow of Non-Newtonian Systems", A. I. Ch. E. Jour, Vol. 5, No 2, PP 189~204, (1959).
- 7) A. B. Metzner, J. C. Reed, "Flow of Non-Newtonian Fluids — Correlation of the Laminar, Transition, and Turbulent-flow Regions", A. I. Ch. E. Jour. Vol. 1, No 4, PP 434~440, (1955).
- 8) 遠藤郁夫, 金成英夫, 許田和義, "上水汚泥の管路輸送に関する実験的研究", 土木学会年次学術講演会講演概要集 (II), 第 36 回, pp. 133~134, (1981).
- 9) 吉川秀夫, "水理学", 技報堂, pp. 137, (1976).
- 10) 遠藤郁夫, 金成英夫, 岡野正周, "上水汚泥の摩擦損失水頭に関する実験的研究", 土木学会年次学術講演会講演概要集 (II), 第37回, pp. 17~18, (1982).