

回転機構のケーシングの内側プロファイル曲線として使用される一節ハイポトロコイドを極方程式を使用して解析する方法と理論式を誘導する方法

大八木 光 治*

Analyzing Mathematic Characteristics of the One Leaf Hypotrochoid, Applied as an Inside Profile Curve, in the Rotary Mechanism Casing, and Induction of Its Theoretical Formulas

*By Koji Ohyagi**

Synopsis: This paper, in the first chapter discusses that, so far, various closed curves-ellipse, triangular, hexagonal or other polygonal forms with rounded vertex have been applied for cam-rings or rotors of hydraulic pump or for attaining various kind of fits between shaft and bores with such closed curves. One of these curves the one cycle sine-cam curve is applied for the rotary mechanism such as a rotary compressor or a rotary piston engine. Furthermore, describes the mathematic relation between one cycle sine-cam curve and one leaf hypotrochoid, the mathematic characteristics and application of the curve profile for the purpose of presenting useful design data to whom interested in applying this curve. In the second chapter, explained the outline of the “sine-cam curve” and the mathematic characteristics of the rotary mechanism applying the one cycle sine-cam curve to the inside profile of casing, then the theoretical formulas according to working volume, compression ratio, torque and output power, as the compressor or the two cycle rotary piston engine. In the third chapter, proved that the one cycle sine-cam curve and the one leaf hypotrochoid is identical. In the fourth chapter, illustrated the machine tool which generates the sine-cam works, with photographs, and also explained its products.

The author designed a new type of sine-cam generator and accomplished the manufacture of the trial one recently.

要旨 第1章では従来、種々の閉曲線たとえば円形状の閉曲線や正三角形、六角形などの頂角部分を曲線で丸めた形の閉曲線を採用したワークを液圧ポンプのカムリングやロータに使用したり、またこのような閉曲線を軸と穴に使用して種々のはめあいをもたせている。

これらの曲線の一つである一サイクルサインカム曲線は回転ピストン圧縮機や回転ピストン機関のような回転機構に使用されている。

本文は、一サイクルサインカム曲線と一節ハイポトロコイドと間の数学的関係やカーブプロファイルの数学上の性質とその応用について記述し、この曲線の実用に興味を持たれる方々に設計上参考となる資料について記述する。

第2章ではサインカム曲線の概要ならびにサインカム曲線をケーシング内周に使用した回転機構の数学的性質を説明し、さらに、圧縮機または二サイクル回転ピストン機関として使用する場合の作動室容積、圧縮比、トルクおよび出力の理論式について説明する。

第3章では一サイクルサインカム曲線と一節ハイポトロコイドは同一曲線であることを証明する。

第4章では写真でサインカムワークを創成する工作機械とその加工品について説明する。

筆者は最近サインカムゼネレータを設計し試作を完了した。

* 機械工学教室 教授

Professor, Mechanical Engineering Division

1. はじめに

数多くの非円形閉曲線はそれぞれいろいろな方程式で表はされる。これらの方程式はその定数の値によって同一曲線を表はすことがある。ここでは1節ハイポトロコイドと1サイクルサインカム曲線の関係についてのべることにする。ここでとりあげる1節ハイポトロコイドとは内接する大小二円の半径の比が2:1で小円を固定し大円をころがり接触させるとき、大円の半径の延長上の定点の軌跡曲線のことである。半径の比が3:2のときは2節ハイポトロコイドとなる。これは、NSU-Wankel rotary piston engine のハウジング内側のプロフィール曲線として採用されている。

さて1節ハイポトロコイドは圧縮機のハウジングの内側のプロフィール曲線として古くから知られて実用に供されている。後述のように1サイクルサインカム曲線は、1節ハイポトロコイドの座標原点を移動して極方程式であらわしたものであることが判明したので研究の経過にしたがって1節トロコイド（以下ハイポを略してよぶことにする。）の性質を数学的に究明して機構とするときの基本式についてのべ、さらに既存の工作機械によってプロフィールが精密に研削仕上げしうることを説明して回転機構に関心のある方々の御批判をお願いする次第であります。

2. サインカム曲線

2.1 サインカム曲線の説明

図1は K を振幅とする正弦曲線の一部である。 θ が0のとき $y=-K$ であるとその方程式は $y=-K \cos \theta$ となる。

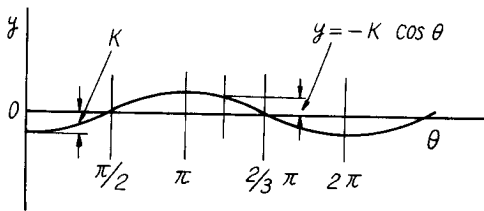


図 1

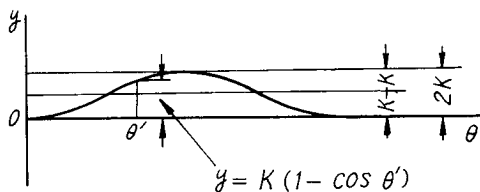


図 2

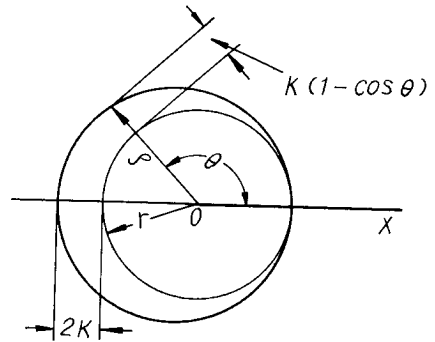


図 3

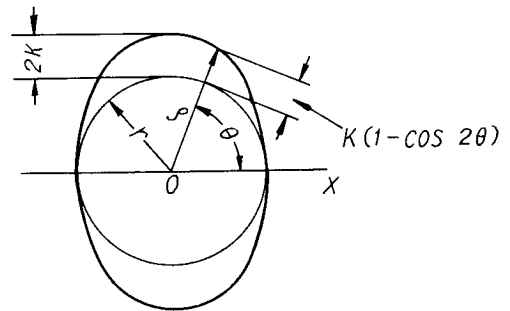


図 4

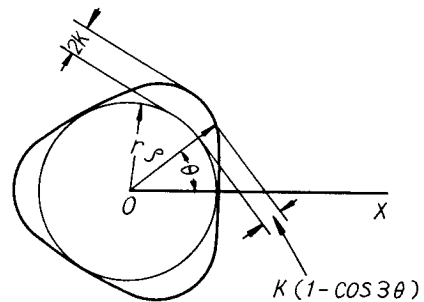


図 5

る。図2は図1の θ 軸を振幅 K だけ下方に平行移動したもので、 $y=K(1-\cos \theta)$ となる。図3は動径 q の回転角と図2の θ を1:1の対応で基円の半径 r に y の値、すなわち $K(1-\cos \theta)$ を加算してうる閉曲線でその極方程式は、 $q(\theta)=r+K(1-\cos \theta)$ である。図4は q の回転角と図2の θ を1:2の対応で基円半径 r に y の値すなわち、 $K(1-\cos 2\theta)$ を加算してえられる閉曲線でその極方程式は、 $q(\theta)=r+K(1-\cos 2\theta)$ である。

これは半径の長さが $r+K$ なる円周上に振幅 K なる2周波数の正弦波をかさねあわせたことを意味する。同様に図5の極方程式は $q(\theta)=r+K(1-\cos 3\theta)$ であり、加

算周波数は3サイクルである。このように動径 ρ が1回転するあいだに n サイクルの正弦波を加算してうる閉曲線 $\rho(\theta) = r + K(1 - \cos n\theta)$ を n サイクルサインカム曲線とよぶことにする。

2.2 サインカム曲線をプロフィールとする回転機構

2.2.1 サインカム曲線の動径の性質

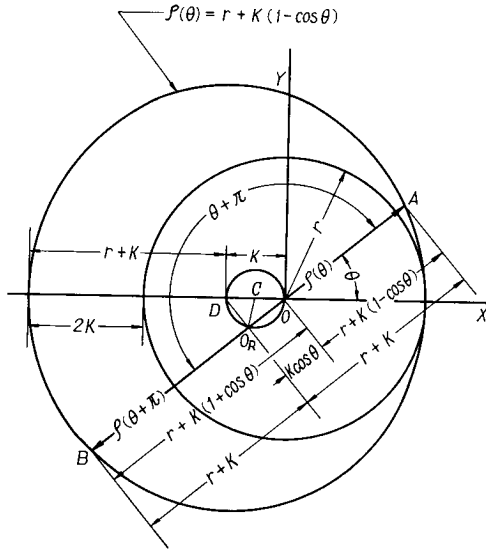


図 6

図 6 は 1 サイクルサインカム曲線で、 OA は θ に対応する動径 $\rho(\theta)$ で $\rho(\theta) = r + K(1 - \cos \theta)$ である。

OA と原点に関して対称な動径 OB は $\rho(\theta + \pi)$ で $\rho(\theta + \pi) = r + K(1 + \cos \theta)$ となるから直線 AB の長さは、 $AB = \rho(\theta) + \rho(\theta + \pi) = 2(r + K)$ である。すなわち極 O をとおる直線が曲線と交る 2 点間の距離は回転角 θ の値に関係なく一定である。この AB を 1 サイクルサインカム曲線の直径とよぶことにする。直径の中心 O_R は動径の回転につれて C を中心とし K を直径とする円周上を移動することを説明する。 $OD = K$, $CO = CD = K/2$

AB と円 C との交点を O_R とする。

$$\angle AOX = \angle DOO_R = \theta, \quad OO_R = DO \cos \theta = K \cos \theta,$$

$$\therefore O_RA = OA + OO_R = r + K - K \cos \theta + K \cos \theta = r + K$$

$$\text{また } O_RB = OB - OO_R = r + K - K \cos(\pi + \theta) - K \cos \theta$$

$$= r + K + K \cos \theta - K \cos \theta = r + K$$

$\therefore O_RA = O_RB$ すなわち極 O をとおる直径 AB の中心 O_R は XO 線上に中心 C をもち直径が K で円周が基円の中心 O をとおる円である。直径 AB が円 C と O で切するときは O_R は極 O に重なり、また A 点は始線 OX に直交する OY 線上にある。半径 CO_R が CO を始発位置として時計向きに $\angle OCO_R$ だけ回転するとき、すなわ

ち直径 AB の中心 O_R が O から C 円周上を O_R 点まで回転するとき、 OY 上にあった A 点はサインカム曲線上を移動して A 点に到達する。

$$\angle XO_A = \theta \quad \text{とすると}$$

$$\angle YO_A = \angle R - \theta \quad (1)$$

$$\angle COO_R = \angle CO_R O = \theta \quad (2)$$

$$\therefore \angle OCO_R = 2\angle R - 2\theta = 2(\angle R - \theta)$$

$$(1) \text{ と } (2) \text{ から } \angle OCO_R = 2\angle YO_A \quad (3)$$

式(3)は AB の中心 O_R が C を中心として回転する角度は O を中心として直径 AB が回転する角度の 2 倍であることを示している。この動径の数学上の性質を回転機構に応用した状態を図 7 について説明する。

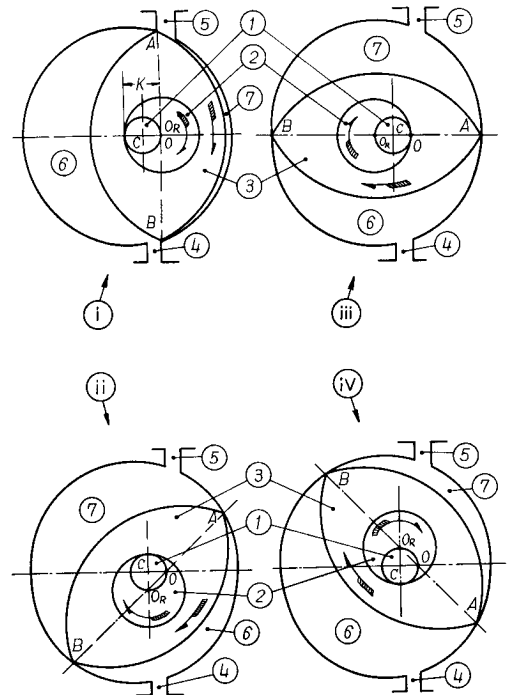


図 7

図 7 は回転式圧縮機の機構の略図である。各図のプロフィル曲線は 1 サイクルサインカム曲線で圧縮機ケーシングの内側プロフィールである。軸 1 の中心が図 6 の C 点に位置するようにケーシング側板 (図示省略) に設けた軸受で支承し、かつ軸 1 の直径は K とする。図 7 i, でケーシング内部では軸 1 上に偏心円筒状の突起を設けて偏心軸 2 とし、その偏心軸上に回転自在にロータ 3 の中心に設けた同径のボアをはめてその尖端がケーシング内面と A, B の 2 点で接触するようにする。偏心軸 2 の直径を $2K$ とするとロータ 3 の中心 O_R は C を中心とし K を直径とする軸 1 の外周上にある。軸 1 を視矢の方向に回

転するとロータ3は $\frac{1}{2}$ の角速度で同方向に回転する。軸1をi図の位置からii図の位置まで、 90° 回転するときロータ3のAB線がOを中心として、 45° 回転するとロータ3の尖端A,Bはつねにケーシング内面に接触して作動室を構成して吸入口4から吸入された流体は、ロータ3の回転につれて吸入作動室6が吐出作動室7に変化するから吐出口5から、吐出される。軸1がii図の位置からさら 90° に回転するとき、ロータ3が 45° 回転するようにしてiii図の相互位置を保持させるとA,B2点はケーシング内面に接触して離れないから作動室を形成する。このように軸とロータの回転比を2:1に保持して

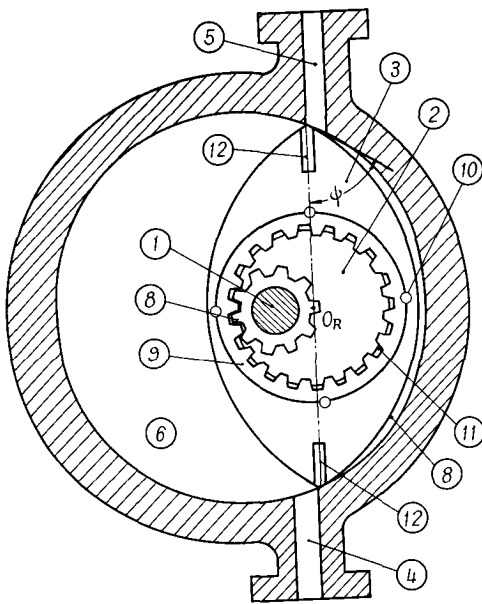


図 8

作動を円滑にするためには図8のようにタイミングギヤを使用することは周知のとおりである。平衡車8は側板(図示しない)に軸1と同心に固定する。内歯歯車9はロータ3にピン10で固定して、歯数比を2:1としてかみあわせる。内歯歯車の中心は図7の O_R と軸1の中心は同じくCと一致させる。このような機構として軸1を時計向きに回転すると、ロータも同じ向きに $\frac{1}{2}$ の回転速度でi ii iii iv図の順に回転して回転圧縮機が構成される。

2.2.2 ケーシング内面のプロフィールとしての性質

サインカム曲線の曲率半径と曲率中心をもとめてプロフィールの性質をあきらかにし、また画法をもとめることにする。(図9,10,11 参照)

一般に n サイクルサインカム曲線 $\rho(\theta) = r + K(1 - \cos n\theta)$ の θ に対応する動径の先端における曲線の曲率半径

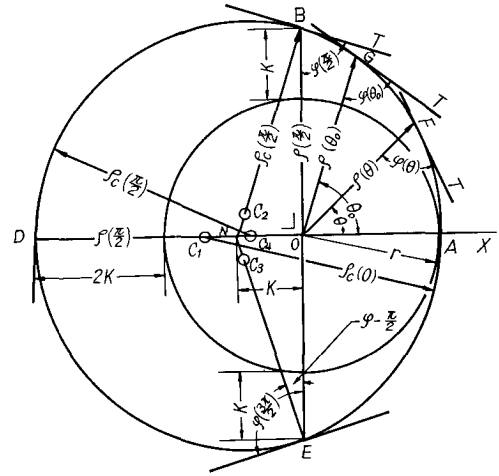


図 9

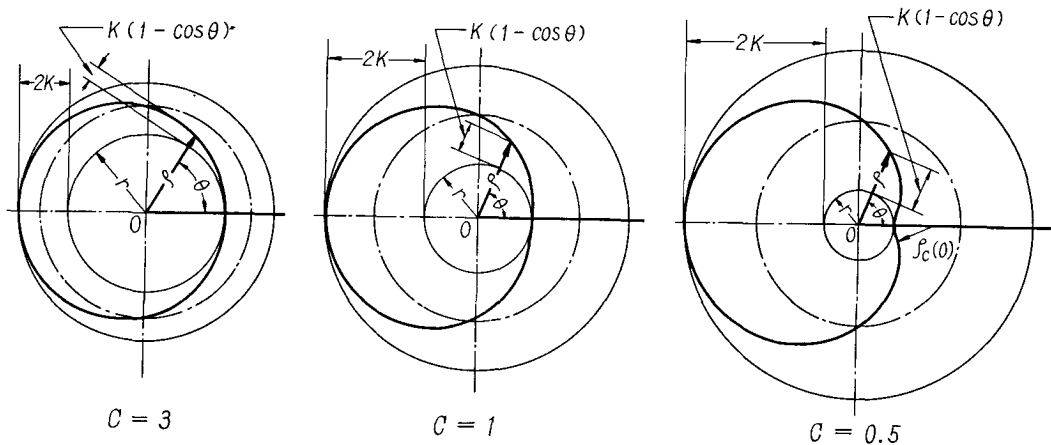


図 10

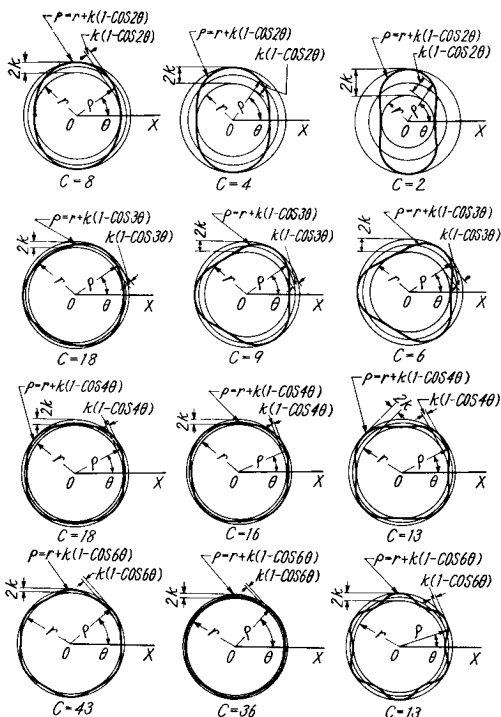


図 11

を $q_c(\theta)$ とすると

$$q_c(\theta) = \frac{[\{q(\theta)\}^2 + \{q'(\theta)\}^2]^{\frac{3}{2}}}{\{q(\theta)\}^2 + 2\{q'(\theta) - q(\theta)q''(\theta)\}} \\ = \frac{[r + K(1 - \cos n\theta)]^2}{\{r + K(1 - \cos n\theta)\}^2 + 2n^2K^3 \sin^2 n\theta - \{r + K(1 - \cos n\theta)\}^2 + n^2K^2 \sin^2 n\theta} \cdot r$$

基円半径 r と振幅 K との比を C とすると, $r = CK$

$$\therefore q_c(\theta) = \frac{\{(C+1 - \cos n\theta)\}^2}{C\{(C+1 - \cos n\theta)\}^2 + 2n^2 \sin^2 n\theta - (C+1 - \cos n\theta) \cdot n^2 \cos n\theta} \cdot r \quad (4)$$

式(4)の分数部分は C と n と θ の関数であるからこれを $\lambda(C, n, \theta)$ とおくと

$$q_c(\theta) = \lambda(C, n, \theta) \cdot r \quad (5)$$

曲線と始線の交点における曲線の曲率半径 $q_c(0)$ は式(4)の $\theta=0$ において

$$q_c(0) = \frac{C}{C - n^2} \cdot r \quad (6)$$

曲線と半径 $r+K$ なるピッチ円との交点における曲率半径は式(4) $\theta=\pi/2n$ において,

$$q_c\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{\{(C+1)^2 + n^2\}^{\frac{3}{2}}}{C\{(C+1)^2 + 2n^2\}} \cdot r \quad (7)$$

曲線と最大動径の交点における曲率半径は $\theta=\pi/n$ において,

$$q_c\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{(C+2)^2}{C(C+n^2+2)} \cdot r \quad (8)$$

以上の計算から回転角 θ の値が $0, \pi/2n, \pi/n$ の動径の先端での曲率半径の λ は式(5)から n と C を指定すると定数となる。図 9 は 1 サイクルサインカム曲線である。 $r:K=2.5$ とすると $C=2.5, n=1$, であるから A, B, D , の各点の曲率半径をそれぞれ, $q_c(0), q_c(\pi/2), q_c(\pi)$ とすると,

$$\text{式 (6) から } q_c(0) = \frac{2.5}{2.5-1} \cdot r \doteq 1.67r \quad (10)$$

$$\text{式 (7) から } q_c\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(3.5^2+1)^{\frac{3}{2}}}{2.5\{(2.5+1)^2+2\}} \cdot r \doteq 1.34r \quad (10)$$

$$\text{式 (8) から } q_c(\pi) = \frac{(2.5+2)^2}{2.5(2.5+1+2)} \cdot r \doteq 1.47r \quad (11)$$

となる。つぎに曲率中心の位置を決定する。動径と切線とのなす角, すなわちラジアルアングルは動径の回転角 θ の関数として $\varphi(\theta)$ であらわすと, n サイクルサインカム曲線 $q(\theta)=r+K(1-\cos n\theta)$ において (図 9 参照)

$$\tan \varphi(\theta) = \frac{q(\theta)}{q'(\theta)} = \frac{r+K(1-\cos n\theta)}{nK \sin n\theta} \quad (12)$$

$$\therefore \varphi(\theta) = \tan^{-1} \frac{C+1-\cos n\theta}{n \sin n\theta} \quad (13)$$

式 (13) は r と K の比である C と n と θ の関数であるから r と K の値には関係なく, n と C を共通とし極を共有する曲線群と任意動径 $q(\theta)$ との各交点におけるラジアルアングル $\varphi(\theta)$ は等しい。したがってこの各交点における切線群はばべて平行である。すなわち n と C を共有するサインカム曲線群のプロファイルは r と K の個々の値に関係なく相似となる。

また曲率中心は $q(\theta)$ の先端で動径と $90^\circ - \varphi(\theta)$ をなす直線すなわち法線上にある。式(5)の $\lambda(Cn\theta)$ についても同様に考えると, n と θ が共通で C が一定値になるときは曲率半径 $q_c(\theta)$ は r に比例する。 C が一定である曲線群は r と K とが相似であって曲率半径もまた相似である。したがって曲線プロファイルは相似である。以上の式 (5) と (12) とから C と n を共有するサインカム曲線群はすべて相似であるから C を相似定数とよぶことにする。式 (9), (10), (11) の計算につづいて $n=1, C=2.5$ なる 1 サイクルサインカム曲線の点 A, B, C とそれぞれの曲率中心 C_1, C_2, C_3 とを結ぶ直線と動径のなす角をもとめる。すなわち各動径のラジアルアングルの余角をもとめる。

式(13)で $\theta=0$ とおくと,

$$\varphi(0) = \tan^{-1} \frac{C+1-1}{0} = \tan^{-1} \infty = \tan^{-1} 90^\circ = 90^\circ \quad (14)$$

点 A のラジアルアングルの余角は $90^\circ - 90^\circ = 0$ すなわち始線を横切る曲線の曲率中心 C_1 は n と C に関係な

く始線上にある。つぎに B 点すなわち $\theta = \pi/2$ のとき

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \tan^{-1} \frac{C+1-0}{1} = \tan^{-1} 3.5 = 74^\circ \quad (15)$$

点 B のラジアルアングルの余角は $90^\circ - 74^\circ = 16^\circ$

OY と 16° をなす法線 BC_2 上に曲率中心 C_2 がある。同様に $\varphi(\pi)$ をもとめる。

$$\varphi(\pi) = \tan^{-1} \frac{C+1+1}{0} = \tan^{-1} \infty = 90^\circ \quad (16)$$

式(14)と同様に D 点をとる曲率半径の中心 C_4 は C の値に関係なく始線上にある。ここでもう一度式(15)を検討することにする。式(15)は半径 $r+K$ なるピッチ円と動径 $q(\pi/2)$ の交点のラジアルアングル $\varphi(\pi/2)$ の式である。

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \tan^{-1} \frac{C+1}{1} = \tan^{-1} \frac{r+K}{K} = \tan^{-1} \frac{BO}{ON} \quad (17)$$

とにおいて BC_2 の延長線と始線との交点を NN とすると、 $\angle NBO$ を余角とする $\angle BNO = \angle OBT = \varphi(\pi/2)$ 、したがって式(17)から $ON = K$ となる。

すなわち一般に $q_c(\pi/2n)$ の曲率中心は、極を中心として半径を K とする円と極 O で $q(\pi/2n)$ に垂直な直線との交点 N とピッチ点 B とを結ぶ直線上にある。

サインカム曲線はすべて始線 OX に対して対称であるから θ が、 $0, \pi/2n, \pi/n$ の特定の回転角に対する $q(\theta)$ 、 $q_c(\theta)$ をそれぞれ計算するとプロフィール曲線をコンパスで画くことができる。図12はその1例である。 $n=1, r=30, K=15$ [m・m] とする。まづ、 $C=r:K=30:15=2$ である。 $C > n^2$ となるから式(6)により反曲点をもたない

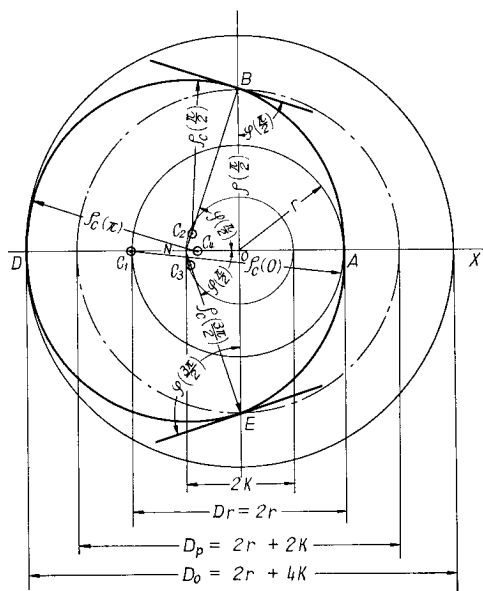


図 12

ことが分る。直径がそれぞれ $D_0, D_p, D_r, 2K$ の同心円をかき $ABNDE$ の各点をとって、 $\overline{BN}, \overline{EN}$ をむすぶ。つぎに $q_c(0), q_c(\pi/2), q_c(\pi)$ をそれぞれ式(6), (7), (8) から算出して始線上に C_1, C_4 をとり $\overline{BN}, \overline{EN}$ 上にそれぞれ C_2, C_3 をとる。 $C_1 C_2 C_3 C_4$ を中心として、 $q_c(0), q_c(\pi/2), q_c(\pi), q_c(\pi/2)$ を半径とする円弧でむすぶと図のようなプロフィール曲線が画かれる。図10, 11, はこの画法で作図したもので、図10は1サイクルサインカム曲線、図11は上からそれぞれ2, 3, 4, 6, の各サイクルの曲線である。

各図の中央図の C の値は n^2 に等しいから、式(6)により

$$q_c(0) = \frac{C}{C-n^2} \cdot r = \frac{C \cdot r}{0} = \infty$$

すなわち始線を横切る曲線は直線となる。 $C < n^2$ なるときは $q_c(0) < 0$ となるから右図のように曲率中心は閉曲線の外側で OX の延長上にあるから曲線はすべて反曲点をもつようになる。 $C > n^2$ のときは曲線はすべて左図のように中心に対して凹となる。1サイクルサインカム曲線のプロフィールの性質は図9, 10によりあきらかとなった。

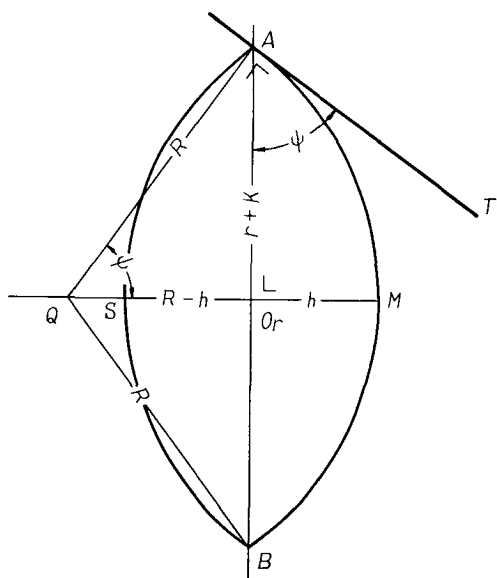
2.2.3 ラジアルアングルとロータプロフィール

図6, 7, 8でロータの両尖端 A と B とが1サイクルサインカム曲線上を回動し、直線 AB はまた極 O をとおることは既述のとおりである。動径 OA 、または OB を一边とするラジアルアングルはロータの回転につれて変化する。 A, B 部分には図8のようにラジアル方向に溝を設けてアベックスシール12を挿入して作動室の気密を保持するようになっている。シールの先端は曲面になっていてケーシング内側の曲面と接触する。この接触線(図面に垂直である。)はロータの回転につれてラジアルアングルが変化するから、シールの曲面上を移動する。気密の保持とシール曲面の耐久性を向上するためにいろいろな方法が考案されつつある。本文ではこの問題を除外してロータプロフィールの決定に対する一考察についてのべる。

ロータプロフィールを理論的にもとめるにはつぎのようにする。図7で円 C とケーシングプロフィールを一体とし、逆に円 O_R を固定して導円とし、円 C を内転すると、円 C と一体に回動するケーシングプロフィール群の包絡線としてロータプロフィールが得られる。しかしこの包絡線は工作が面倒であるから近似の円弧が使用される。

ロータプロフィールはつぎの2条件を満足する必要がある。図13で、円弧 AMB と BSA は同一半径 R をもち、 A 点における切線 AT と AB とのなす角 ψ はケーシングプロフィールの最小ラジアルアングルより小なること。

もう一つの条件は、 $O, M=h$ とすると $h < r$ であるこ



と、ただし r はケーシングプロフィールである 1 サイクルサインカム曲線の基円半径である。最初にラジアルアングルについて、式(3)を微分して極小値をもとめる。

上式の分子 $n^2\{\sin^2 n\theta - (C+1-\cos n\theta)\cos n\theta\}=0$ とおく

$$\text{また } \theta = \frac{1}{n} \cos^{-1} \frac{1}{C+1} \quad (20)$$

この θ はラジアルアングル $\varphi(\theta)$ を極小ならしめる動径 $\varrho(\theta)$ の回転角であるから、この θ をとくに θ_0 とかくことにする。式(9)の値を式(3)に代入してラジアルアングルの極小値 $\varphi(\theta_0)$ をもとめると

$$\begin{aligned}\varphi(\theta_0) &= \tan^{-1} \frac{C+1 - \frac{1}{C+1}}{n \sin n \cdot \frac{1}{n} \cos^{-1} \frac{1}{C+1}} \\ &= \tan^{-1} \frac{\sqrt{C^2+2C}}{n}\end{aligned}\quad (21)$$

$$\theta_0 = \cos^{-1} \frac{1}{C+1}, \quad \cos \theta_0 = \frac{1}{C+1}, \quad \sin \theta_0 = \frac{\sqrt{C^2+2C}}{C+1}$$

式(21)で $n=1$ とおくと

(22), (23) から $\theta_0 = \varphi(\theta_0)$

1 サイクルサインカム曲線では、図9の $\varrho(\theta_0)$ を底辺とする三角形で $\angle GOX = \angle OGT$ となるから、始線 OX

図8で、ロータの尖点における角 ψ はロータ固有の角であって、一定であるから $\psi \leq \varphi(\theta_0)$ または $\psi \leq \theta_0$ でないとロータの尖点はケーシングプロフィールからはなれることになって回転できない。これが条件の一つである。よって、図13で Q を弧 AMB の中心とすると、

$$R-h=(r+K) \cot \psi \quad (25)$$

ψ に与えられる最大の角を $\psi = \varphi(\theta_0)$ として h をもとめることにする。

$$\psi = \varphi(\theta_0) = \theta_0 = \cos^{-1} \frac{1}{C+1}$$

$$\frac{h}{r+K} = \tan \frac{\psi}{2} = \frac{\sin \psi}{1 + \cos \psi} = \frac{\sqrt{C^2 + 2C}}{C + 2}$$

変形して, $\frac{h}{r} = \left(\frac{C+1}{C}\right) \cdot \frac{\sqrt{C^2+2C}}{C+2} = \frac{C+1}{\sqrt{(C+1)^2-1}}$

$$C > 0 \quad \therefore \frac{C+1}{\sqrt{(C+1)^2-1}} > 1 \quad \text{すなわち } h > r$$

$\psi = \theta_0$ とすればロータの尖端はケーシングの内面と干渉しないから第1の条件を満足するが、第2の条件に背反する。すなわち第2の条件とは、図8のロータの位置で、 $h > r$ のときは図13の M 点がケーシングの外にでて不工合となるから $h \leq r$ でなければならない。 $h \leq r$ となるときは $\psi < \theta_0$ もまた成立する。そこで $h = r$ のとき式(26)から

$$r = (r + K) \tan \frac{\psi}{2} \quad \therefore \quad \psi = 2 \tan^{-1} \frac{C}{C + 1} \quad (28)$$

図13, と式 (28) の ψ はロータの軸直角断面積が最大となるときのロータ円弧の中心角の半分となる。したがって弧 AMB , BSA , の半径 R の限界はつぎの式でもとめられる。

$$R \geq (r+K) \operatorname{cosec} 2 \tan^{-1} \frac{C}{C+1} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{C+1}{C} \right)^2 \right\} \cdot r \quad (29)$$

式 (29) はロータの円弧半径 R の最小限界を計算する式である。つぎにロータの軸直角断面積を S_r とすると、

$$\frac{S_r}{2} = \text{扇形 } QAB - \triangle QAB$$

$$\therefore \frac{S_r}{2} = R^2 \left(\psi - \frac{1}{2} \sin 2\psi \right) \quad (30)$$

C と r の定められたケーシング内で使用できるロータの中で面積の最大のものを $S_{r.m}$ とすると、式 (28), (29), (30) から、

$$\begin{aligned} \frac{S_{r.m}}{2} &= \frac{1}{4} \left\{ 1 + \left(\frac{C+1}{C} \right)^2 \right\} \cdot r^2 \\ &\quad \times \left(2 \tan^{-1} \frac{C}{C+1} - \frac{1}{2} \sin 4 \tan^{-1} \frac{C}{C+1} \right) \end{aligned}$$

これを計算して

$$\begin{aligned} \frac{S_{r.m}}{2} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{(2C^2 + 2C + 1)^2}{C^2} \left(2 \tan^{-1} \frac{C}{C+1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sin 4 \tan^{-1} \frac{C}{C+1} \right) K^2 \quad (31) \end{aligned}$$

2.2.4 作動室容積と圧縮比

図14で極0をとおり始線と θ をなす直径 $A'B'$ と曲線 $A'MB'$ のかこむ面積 (斜線部分) を $S(\theta)$ とすると、

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \int_{\theta-\pi}^{\theta} \rho^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta-\pi}^{\theta} (r+K-K\cos\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \left\{ (r+K)^2 + \frac{K^2}{2} \right\} - 2K(r+K) \sin\theta \quad (32) \end{aligned}$$

$$S'(\theta) = -2r(r+K) \cos\theta, \quad S''(\theta) = 2r(r+K) \sin\theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \text{ のとき } S'(\theta) = 0$$

$$S''(\theta) > 0 \quad \therefore S\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ は最小値}$$

また

$$\theta = \frac{3\pi}{2}, \text{ のとき } S'(\theta) = 0$$

$$S''(\theta) < 0 \quad \therefore S\left(\frac{3\pi}{2}\right) \text{ は最大値}$$

式 (32) からロータの回転角に対応する行程面積は、回転角の正弦関数をふくみ、 $\theta = (\pi/2)$ 、すなわち OA' が回転して OA とかさなるとき面積 AMB は最小値となる

$$\begin{aligned} S\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi K^2}{2} \left\{ (C+1)^2 + \frac{1}{2} \right\} - 2K^2(C+1) \\ &= \text{面積 } AMB \quad (33) \end{aligned}$$

動径が OA の位置からさらに π だけ回転して OB とかさなるとき面積 $A'M'B'$ は最大値となる。

$$\begin{aligned} S\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= \frac{\pi K^2}{2} \left\{ (C+1)^2 + \frac{1}{2} \right\} + 2K^2(C+1) \\ &= \text{面積 } A'M'B' \quad (34) \end{aligned}$$

式 (30) からロータの面積の半分は $S_r/2$ であるから圧縮比を ε とすると、式 (30), (33), (34) から

$$\varepsilon = \frac{S\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{S_r}{2}}{S\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{S_r}{2}} \quad (35)$$

圧縮機として使用する場合には式 (31) を使用して、最大圧縮比 ε_{\max} をもとめることができる。一例として、

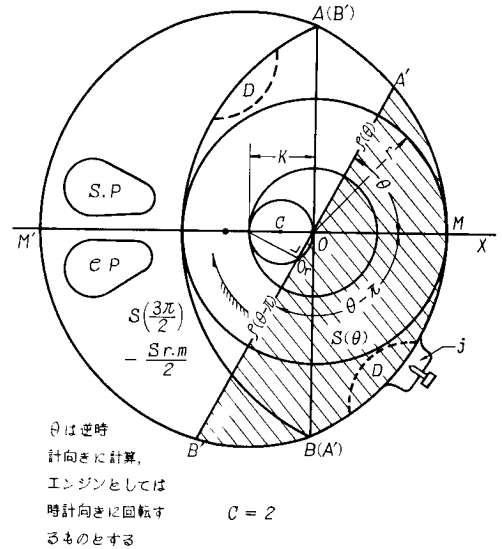


図 14

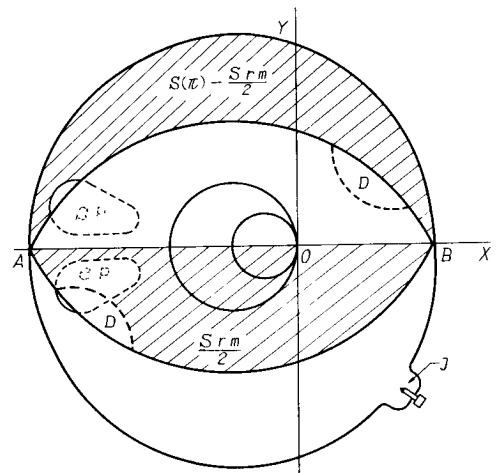


図 15

$C=2$, なる 1 サイクルサインカム曲線を採用した圧縮機の ε_{\max} をもとめてみると、

式 (33) から

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left[\frac{\pi}{2} \{ (2+1)^2 + 0.5 \} - 2(2+1) \right] \cdot K^2 \approx 8.92 K^2$$

式 (34) から

$$S\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \left[\frac{\pi}{2} \{ (2+1)^2 + 0.5 \} + 2(2+1) \right] \cdot K^2 \approx 20.92 K^2$$

式 (31) から

$$\begin{aligned} \frac{S_{r.m}}{2} &= \frac{1}{4} \times \frac{13^2}{4} \times \left(2 \tan^{-1} \frac{2}{2+1} - \frac{1}{2} \sin 4 \tan^{-1} \frac{2}{2+1} \right) \cdot K^2 \\ &\approx 8.67 K^2 \end{aligned}$$

$$\epsilon_{\max} = \frac{S\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{S_{r,m}}{2}}{S\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{S_{r,m}}{2}} = \frac{(20.92 - 8.67)K^2}{(8.92 - 8.67)K^2} \doteq 49$$

以上の計算から1サイクルサインカム曲線では、プロフィールの大小にかかわらず相似定数 C が2であるときは圧縮比は49より大きくとることはできない。

つぎに式 (32) で $\theta = \pi$ とおくとロータは図14の位置をとる。 $S(\pi)$ は始線と弧 AYB の包む面積となる。

$$S(\pi) = \frac{\pi}{2} \left\{ (r+K)^2 + \frac{K^2}{2} \right\} \quad (36)$$

図15の位置から図14の位置にロータが回転するときの圧縮比を ϵ_π とし、 $C=2$ とすると、 $S(\pi) = 14.92 K^2$

$$\therefore \epsilon_\pi = \frac{S(\pi) - \frac{S_{r,m}}{2}}{S\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{S_{r,m}}{2}} = \frac{(14.92 - 8.67)K^2}{(8.92 - 8.67)K^2} \doteq 25 \quad (37)$$

かりに、図のようにケーシングのラジアル方向に j なる室を設けてスパークプラグまたは噴射ノズルをとりつけ、ケーシング側面には排気口 $e.p$ と吸入口 $s.p$ とをそれぞれ始線に対称に設けると2サイクルの内燃機関となり、駆動軸の一回転に対し一回爆発する。圧縮比の最大値は式 (37) で計算できる。実際には圧縮比が過大であるから式 (29) の R を等号の R より大とする。すなわち式 (26), で $h < r$, となるように ψ を決定してロータ面積を減少するか、もしくはロータ曲面に凹部 D を設けて適当な圧縮比とする。このようなエンジンが作動可能としてつぎの計算にうつることとする。

2.2.5 トルクと軸出力

図14で $OO_R = K \cos \theta$ であるからトルクを T [kg-m] とすると

$$T = 2(r+K) \cdot w \cdot p \cdot K \cos \theta \quad [\text{kg-m}] \quad (38)$$

ただし、 $(r+K)$ はピッチ半径 [cm], w はロータの軸方向の幅 [cm], P はロータ面に働くガス圧力 [kg/cm²],

つぎに軸平均有効圧力を P_e [kg/cm²], 総行程体積を V [l] とすると式 (30), (36) から

$$V = \{S(\pi) - 1/2 \cdot S_r\} w \quad [\text{l}]$$

また回転速度を N [r.p.m] とし、軸出力を L_e とすると

$$L_e = \frac{P_e \{S(\pi) - 0.5 S_r\} w \cdot N}{450} \quad [\text{PS}] \quad (39)$$

このようにして1サイクルサインカム曲線をケーシング内面プロフィールとして使用する場合の回転機構の基本計算式が成立する。

3. 1サイクルサインカム曲線と1節トロコイド

2章で取扱った1サイクルサインカム曲線は1節トロコイドであることを証明する。ただし2サイクル以上の

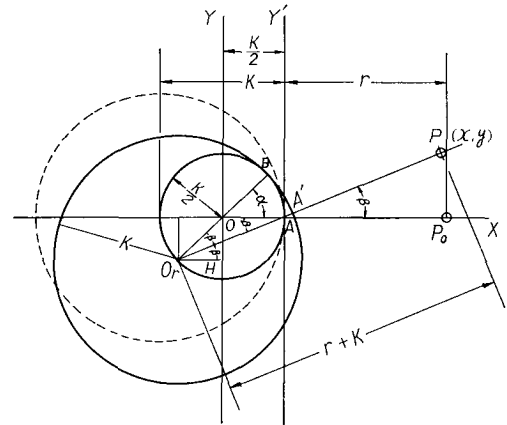


図 16

サインカム曲線は二節以上のトロコイドとは常には同一でないから、サインカム曲線とトロコイド曲線は区別すべきものであることはもちろんである。

図16で導円 O の半径を $K/2$, 転円 O_r の半径を K とし、転円が最初の接触位置 A から O 円のまわりを B まできわめて接触をしたとき転円 O_r とともに動く点 P_0 が P の位置に移動したとすると、転円の中心 O_r はつねに導円 O の円周上を回動するから、 $\angle BOA = \alpha$, $\angle BO_rA' = \beta$, $\widehat{AB} = \widehat{BA'}$ とすると、 $(K/2) \times \alpha = K\beta$ $\therefore \alpha = 2\beta$

また、 $\angle BO_rA = \angle OAO_r = \alpha/2 = \beta = \angle BO_rA'$,

したがって OA と OA' は重なるから O_rP は定点 A をとる。図17は画法によってトロコイドをもとめたものである。最初の接点 A から放射線を引いて導円との交点をそれぞれ 1, 2, 3, ..., 7 とし、各直線 $1A$, $2A$, ...

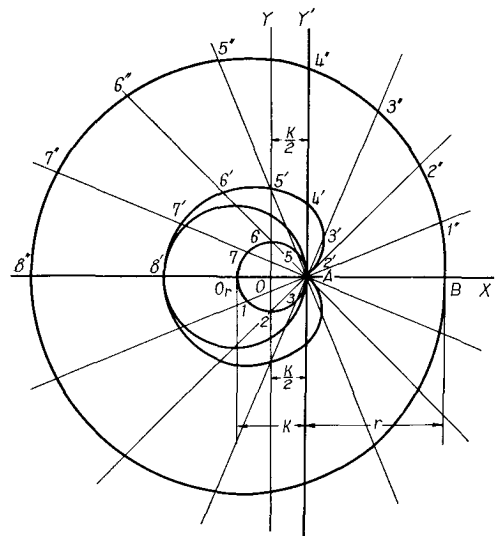


図 17

7A, 上に K に等しく点 $2', 3', 4', \dots, 7'$ をとり各点を結ぶと曲線はカージオイドとなる。また $r+K$ に等しく点 $2'', 3'', 4'', \dots, 7''$ 等をもとめて各点をむすぶ曲線は1節トロコイドとなる。図18について P 点の座標をもとめると

$$x = (r+K) \cos \beta - \frac{K}{2} \cos \alpha \quad (40)$$

$$y = (r+K) \sin \beta - \frac{K}{2} \sin \alpha = \sin \beta \{r+K(1-\cos \beta)\} \quad (41)$$

座標原点 O を A に移動する x と座標のみ変るから、新座標を x' とすると、式 (40) から、

$$x' = (r+K) \cos \beta - \frac{K}{2} \cos \alpha - \frac{K}{2} \\ = \cos \beta \{r+K(1-\cos \beta)\} \quad (42)$$

式 (41), (42) をもちい、

$$\varrho = \pm \sqrt{x'^2 + y'^2} = \pm \{r+K(1-\cos \beta)\}, \quad \tan \frac{y}{x'} = \tan \beta$$

複号の+をとり $\varrho = r+K(1-\cos \beta)$

すなわち1節ハイポトロコイドは1サイクルサインカム曲線と同一である。

4. む す び

回転機構に1節トロコイドを採用するとき、直角座標より極座標を使用の方が便利であることは以上の計算例によりあきらかである。 n サイクルサインカム曲線は筆者の試作した工作機械図18を使用すると、その割出し精度は ± 0.01 [mm] 程度でケーシング内面のトロコイド曲面の研削仕上げは可能である。またシール先端の形

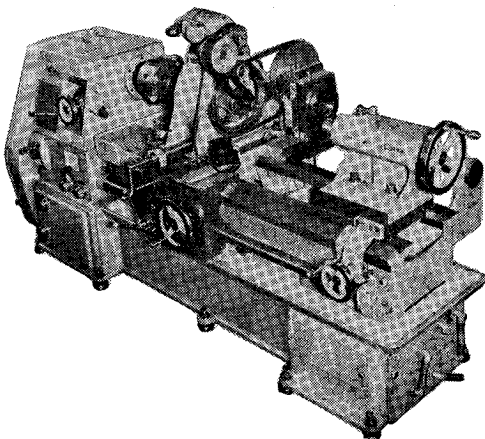


図 18

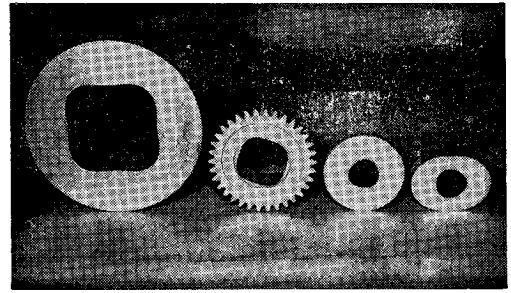


図 19

状によっては、その形状群の包絡線をプロフィールとする曲面の研削仕上げ加工も容易であると考えられる。シールの問題は実用上の難問であるが解決不能とは断言できないと思考する。本文では回転機構に一節トロコイドを使用するときの基本式の誘導のみをのべて終ることとする。紙数の都合で関連事項の説明が十分でなかったことをおわびし、別の機会に発表したい所存であります。

図19, は図18の工作機械のワークである。工作については文献に詳述してあります。最後に第3章の証明については早稲田大学理工学部森田鈞教授の御協力によるものであることを記載して紙上を借り謝意を表する次第であります。

本文受付昭和42年9月25日

文 献

- 1) VDI Z Bd102 Nr8 Seite 293 bis 322; 11 Marz 1960.
- 2) Richard Mossdorf U.S.A. Patent No. 2267250, 214471.
- 3) Josef Posiwal ÖSTERREICHISCHES Patentschrift Nr. 167747.
- 4) 森田鈞, 大八木光治 機械学会42期総会 '65-4, No. 131-434.
- 5) 上月正 機械学会42期総会 '65-4, No. 135-608.
- 6) 大八木光治 森田鈞 機械学会43期総会 '66-4, No. 151-531.
- 7) 大八木光治 機械と工具 Vol. 8, No. 6, 5, 6, 7 1964年 5月, 6月, 7月号
- 8) 大八木光治 米国特許 1件
日本国特許 10件
- 9) 大八木光治, 森田 鈞
マシナリー, 1992年6月1日, 7月1日, 9月1日
10月1日, 11月1日各号
新しい曲線の旋削法