回路理論と静電気理論との対応
特に電力重畳の理論について

帆 足 竹 治*

Corresponding on the Circuit Theory and the Electro Static Theory especially on the Superposition of Static Energy and Electric Power

定常状態における回路理論と静電界理論との間には種々な面にわたって興味の多い対応が存在する。与えられた境界条件のもとにおける電界の分布は電界の energy 最小になるように分布することは $\varepsilon\dot{E}=\dot{D}$ の代りに $g\dot{E}=\dot{I}$ と置いて見ると回路理論では与えられた印加電圧，印加電流に対して消費電力が最小になるように電流が分布することに対応する。したがって二導体間の静電容量が最大になるように電界が分布することに対応して二導体間の抵抗が最小になるように電流が分布する。

このような対応を考えるに当って最も基礎的な事柄は電界のできる源である電荷に対する考え方である。われわれは静電界を考えるとき（＋）あるいは（－）の電荷が単独に存在し得ると考えている。然れども領域全体を考えると（＋)(－）の両電荷は必ず等量に存在すると考えなければならないのである。すなわちここに $+q$ なる電荷があるとすると無限大の所に $-q$ な電荷があると考えないことにはそのまわりに電界ができ得ないのである。換言すれば全領域を考えれば

$$\iiint \mathrm{div}\,\dot{D}\,dv=0$$

でなければならない。

回路理論では電荷に対応するものとして印加電流を考える。すなわち

$$\iiint \mathrm{div}\,\dot{I}\,dv=0$$

とするのである。静電界理論では電荷の存在する所を特異点として領域から除外する。そうすると領域全般にわたって

$$\mathrm{div}\,\dot{D}=0$$

が成り立つ。同様に回路網においては電流の印加点を除外すると

$$\mathrm{div}\,\dot{I}=0$$

が成り立つ。これが Kirchhoff の第一法則を意味する。

領域内に Doublet あるいは Double layer がある場合も特異点としてそれを囲む面をもって領域から除外する。この場合は $\dot{D}$ は連続であるが電位が急変する。回路理論ではこれに対応するものとして印加電圧を考える。この電圧を加算すれば全領域にわたって任意の閉回路について

$$\int(\dot{E}\,d\dot{l})=0$$

が成り立ちしたがって

$$\mathrm{rot}\,\dot{E}=0$$

が成り立つ。これは Kirchhoff の第二法則を意味する。

特異点を除外した全領域の電界の energy が最小になるということは全領域にわたって Laplace の式

$$\nabla^2V=0$$

が成り立つことであり電界の強さあるいは電位の分布について境界条件に対して重畳の理が成り立つことである。領域内にある single layer あるいは Double layer 個々に基く電界あるいは電位を総合したものが全境界の条件による分布である。

このことは Green の定理の式を見ればわかる。すなわち電界あるいは電位の分布は境界条件と linear の関係にある。

高木教授の話によると Ohm が電圧と電流との関係を求めるとき電池の内部抵抗を考えたのがきっかけで外部抵抗と一緒にしてついに Ohm の法則を見出したとのことである。すなわち抵抗の直列回路を考えたので回路の計算には常に抵抗を使用する習慣ができたということである。

* 電気工学教室　教授，工学博士
Professor, Electrical Engineering Division, Dr. o Engineering.

しかし静電界で $\varepsilon\dot{E}=\dot{D}$ に対応して $g\dot{E}=\dot{I}$ を採ると抵抗より Conductance, impedance より admittance を採ることにすれば静電界理論と回路理論との対応がより直接的となることは論を待たない。

single layer における電荷密度を電流電源の電流密度に dauble layer における moment を電圧電源の電圧に置き代えかつ電流電源においては内部 conductance 零，電圧電源に対しては内部 conductance 無限大とすれば回路網における電流，電位の分布がこれら電源と linear の関係にあることは当然である。

Thévenin の定理を考えると一つの回路網から一対の端子 T_1, T_2 を取り出しこの端子間に顕れる電圧を $\dot{E}$,端子から見た impedance を Z, したがって admittance を $\dot{Y}=\frac{1}{Z}$ とすれば図に示すごとく回路網がどんなもので

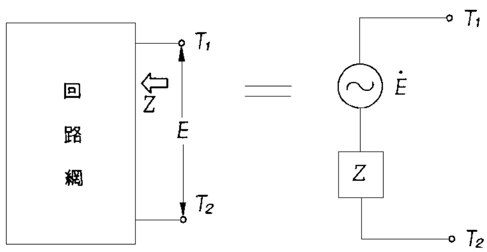

図 1

あろうとと単純 impedance が series に接続されたものに等価でありしたがって T_1, T_2 を短絡するときその点を流れる電流は $I=\frac{E}{Z}=YE$

である。

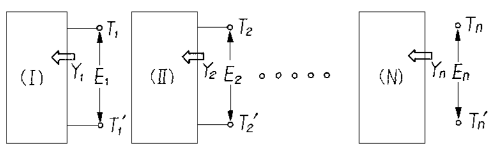

図 2

回路網が一つでなく図のごとく n 個あってそれぞれの端子間に顕れる電圧を $E_1, E_2 \cdots\cdots E_n$端子から見た admittance を $Y_1, Y_2 \cdots\cdots Y_n$ とするとそれらを短絡したとき流れる電流は $I_1=Y_1E_1$, $I_2=Y_2E_2 \cdots\cdots I_n=Y_nE_n$

よって $T_1, T_2 \cdots\cdots T_n$ を一点 T に，$T_1', T_2' \cdots\cdots T_n'$ を T' にそれぞれ接続してかつ T, T' を短絡したとするとそのとき流れる電流は

$$I=I_1+I_2+\cdots\cdots+I_n=Y_1E_1+Y_2E_2+\cdots\cdots+Y_nE_n$$
$$=\Sigma YE$$

しかし T, T' から見た総合 admittance は明かに

$$Y=Y_1+Y_2+\cdots\cdots+Y_n=\Sigma Y$$

よって T, T' を短絡して I なる電流を流すに必要な電圧は

$$V=\frac{I}{Y}=\frac{\Sigma YE}{\Sigma Y}$$

でありこれが T, T' を開いたときその間に顕れる電圧でなければならない。すなわちこのような結合回路網は図のごとく単純な等価回路で代表される。

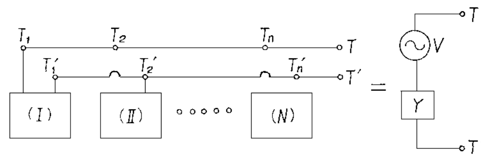

図 3

このような単純等価回路を一つの branch とする勝手な復雑な回路網を作ったとする。そしてその回路網と同じ形のいくつかの回路網を考え相対応する branch point を結合したとするとそれに対する各結合 branch point の電位を求める式はすべて重畳の理が適用される。これが私のいわゆる結合定理である。いうまでもなく結合定理は結合点における電位を求めることである。

逆回路は電圧を電流に，電流を電圧に，admittance を impedance に，branch point を mesh に置き変えることによって得られる。admittance を加えて行くことは並列に branch を増して行くことであるが impedance を加えて行くことは直列に接続して行くことである。よって

$$I=\frac{V}{Z}=\frac{\Sigma E}{\Sigma Z}=\frac{\Sigma ZI}{\Sigma Z}$$

と上の式と同じ形に書いて見ると次の図のようになり(図 1)の回路網についていえば

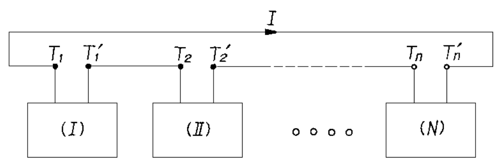

図 4

E_1 は T_1, T_1' を開いたとき表われる電圧であり I_1 はそれを短絡したとき流れる短絡電流，Z_1 は T_1, T_1' から見た impedance である。したがって分子の ΣZI は各端子に表われる電圧の和であり分母の ΣZ は端子間の等価 impedance の和である。

しかし一般結合定理は各回路網に共通な mesh current を求めることになる。

このように Thévenin の定理から発展した結合定理は重畳の理を拡大して考えた結果である。

次に power に関する重畳の理を考える。それにはまづ静電界における電界の energy を二つに別けて single layer に基くものと double lyer に基くものと区別して考えることにする。

single layer に基く電界を E' その potential を V', double layer に基く電界を E'' その potential を V'' とする。この場合は勿論

$$\dot{E}=\dot{E}'+\dot{E}''$$

$$V=V'+V''$$

である。電界の energy について考えて見ると

$$\iiint \Sigma E^2 dv=\iiint \Sigma(E'+E'')(E'+E'')dv$$
$$=\iiint \Sigma(E')^2 dv+\iiint \Sigma(E'')^2 dv+2\iiint \Sigma(E'E'')dv$$

第一項は single layer のみによる energy 第二項は double layer のみによる energy である。

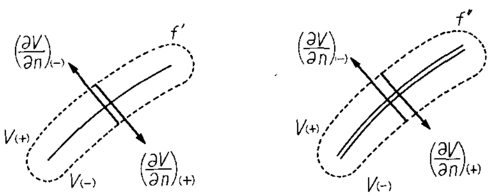

図 5

第三項について Green の定理を適用すると layer の部分は領域から除外しなければならないからそれ等を包む面について

$$\iiint E'E''dv=\iiint \nabla V'\nabla V''dv$$
$$=\Sigma\iint\left(V''\frac{\partial V'}{\partial n}+V'\frac{\partial V''}{\partial n}\right)df'$$
$$+\Sigma\iint\left(V''\frac{\partial V'}{\partial n}+V'\frac{\partial V''}{\partial n}\right)df''$$

第一項は single layer の間でまた第二項は Double layer の間で積分を取る。f' の面では V', V'', $\frac{\partial V''}{\partial n}$ はいずれも連続であり f'' の面では V', $\frac{\partial V'}{\partial n}$, $\frac{\partial V''}{\partial n}$ はいずれも連続である。したがって

$$\iint V'\frac{\partial V''}{\partial n}df' \text{ および } \iint V'\frac{\partial V''}{\partial n}df''$$

は零であり f' の面での積分は

$$\Sigma\iint V''\left(\frac{\partial V'}{\partial n}_{(+0}+\frac{\partial V'}{\partial n}_{(-)}\right)df'=\Sigma 2\iint V''\left(\frac{\partial V'}{\partial n}\right)df'$$
$$=\Sigma\iint V''\,4\pi\sigma\, df'$$

f'' 面での積分は

$$\Sigma\iint\frac{\partial V'}{\partial n}(V''_{(+)}-V''_{(-)}\,df''=\Sigma\iint\frac{\partial V'}{\partial n}4\pi\eta\, df''$$

となる。

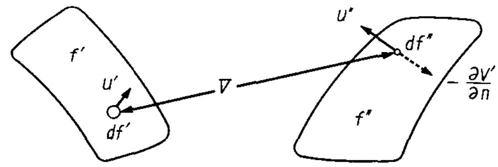

図 6

代表的に df' と df'' との間の関係を考えると df' 上の重荷は $\sigma df'$, df'' からの potential は $\eta\frac{(\dot{\gamma}n'')}{\gamma^3}df''$ であるからこの間の energy は df' の部分で $\sigma\eta\frac{(\dot{\gamma}\, n'')}{\gamma^3}df'\ df''$ となる。df'' の部分で E' の方向と η の方向とは反対向きであるから $-\sigma\eta\frac{(\dot{\gamma}\, n'')}{\gamma^3}df'df''$ はとなって丁度 (+), (−) 張消しとなる。重畳の関係から

$2\iint\Sigma(E'E'')dv$ の部分は零となる。すなわち single layer のみによって成り立つ energy と double layer のみによって成り立つ energy との間には重畳の理が成り立つ。

回路理論では single layer には電流電源が double layer には電圧電源が対応するので全電力を電流電源のみに基くものと電圧電源のみに基くものとに分けて考えればやはり重畳の理が成り立つ。

ここには最も簡単な場合について例を示して見よう。図のような回路において電流電源によって流れる電流は Z_1 を

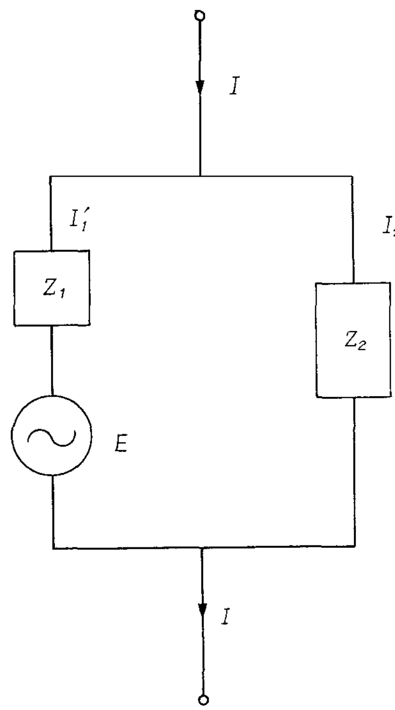

図 7

$$I_1'=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}I$$ が流れる

Z_2 を

$$I_2'=\frac{Z_1}{Z_1+Z_2}I$$ が流れる

また電圧電源によって

$$I''=\frac{E}{Z_1+Z_2}$$ が流れる。

よって電源 E が供給する power は

$$E\times\left(\frac{E}{Z_1+Z_2}-\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}I\right)=\frac{E^2}{Z_1+Z_2}-\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}EI$$

であり電源 I が供給する power は

$$I\times Z_2\left(\frac{E}{Z_1+Z_2}+\frac{Z_1}{Z_1+Z_2}I\right)=\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}I^2+\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}EI$$

すなわち全給電力は

$$P=\frac{E^2}{Z_1+Z_2}+\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}I^2$$

であり EI なる積を含むものは張消しになって零となる。

これを impedance による消費電力の方から考えると

Z_1 によって

$$Z_1\times\left(\frac{E}{Z_1+Z_2}-\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}I\right)^2$$
$$=\frac{Z_1E^2}{(Z_1+Z_2)^2}+\frac{Z_1Z_2^2I^2}{(Z_1+Z_2)^2}-2\frac{Z_1Z_2}{(Z_1+Z_2)^2}EI$$

Z_2 によって

$$Z_2\times\left(\frac{Z_1}{Z_1+Z_2}I+\frac{E}{Z_2+Z_2}\right)^2$$
$$=\frac{Z_2E^2}{(Z_1+Z_2)^2}+\frac{Z_1^2Z_2I^2}{(Z_1+Z_2)^2}+2\frac{Z_1Z_2}{(Z_1+Z_1)_2}EI$$

すなわち全消費電力は

$$P=\frac{E^2}{Z_1+Z_2}+\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}I^2$$

となりやはり EI を含む部分は張消しとなって零となる。

電圧電源のみの電力や電流電源のみの電力では重畳の理は成り立たないが電源の種類別に分けて考えると種類別に関して重畳の理が成り立つことになる。

（本文受付　昭和42年9月30日）