

# 任意平面形をもつ構造物の捩れ地震応答解析 (その1. 解析理論と基本検討)

小 高 昭 夫\* 堀 江 文 雄\*\* 公 塚 正 行\*\*\*

## Torsional Response Analysis for Multi-Story Structure with Arbitrary Shape in Plan Subjected to Earthquake Ground Motions Part 1 (Theory of Analysis and Fundamental Considerations)

*by. Teruo Odaka, Fumio Horie and Masayuki Kimizuka*

**Synopsis:-** To confirm the sufficiency and earthquake-proof of structures, it is necessary to analyse the torsional response for the high-storied buildings, subjected to the earthquake ground motions, in the process of designing skyscraper structures.

For this purpose, the torsional response analysis es of multi-story structures subjected to earthquake ground motions are developed, and the following basic consideration of torsional response analysis is discussed in this paper.

(1) The first subject is a fundamental investigation on the interaction between the input direction of earthquake ground motion and response of structures, by theoretical consideration and by numerical analysis of some model.

(2) The procedures to be reduced the multi-degree-of-freedom systems equivalently by the less multi degree-of-freedom system are developed, and this method is discussed by numerical analysis for the some example.

Also, the vibrational system is multi-degree of freedom systems and the spring constant of each frames in structures are calculated as the bending and shearing displacement type.

要旨：高層構造物が数多く計画される様になった現在，高層構造物の真の動的挙動を追求し，それに伴う耐震安全性を確認するためには，捩れ応答解析を行なう必要がある。本研究においては，捩れ応答解析における理論的展開を述べると共に，下記に示す基本的事項の検討を行なった。

(1)地震動の入力方向を考慮した解析法：捩れを伴う構造物の地震応答性状は，地震動の入力方向に大きく支配され，しかも地震応答量は地震動のあらゆる入力方向のうち，いずれかの入力方向において最大値を示すことになる。本研究では構造物の捩れ地震応答解析で用いる全体剛性マトリックスは，構造物の各層における重心を通る二つの直交軸について算出する必要があるが，もしも地震動の入力方向がこの直交軸に一致しない場合には，地震動の入力を直交軸の成分に変換すれば，同一の直交軸に関する全体剛性マトリックスをそのまま用いることができるはずである。そこで以上の理論的考察と解析例について検討した。

(2)多質点振動系の等価置換に関する検討：構造物の地震応答解析において，極めて自由度の多い多質点系を，これよりも自由度の少い多質点系に等価置換することがある。とくに構造物の捩れ地震応答解析では，構造物の自由度が極めて多くなるので，これを自由度の少い多質点系に等価置換することが，電子計算機の容量や計算速度に関連して必要となる。そこでここでは，曲げせん断型の剛性マトリックスを有する平面架構から構成される多質点系構造物を，これより自由度の少い等価な多質点系に置換する手法について説明し，この応用としていくつかの構造物の等価置換とそれによる地震応答解析を行なって，本法の妥当性について検討した。

---

\* 建築学科教授，工学博士，Professor, Architectural Division, Dr. of Engineering \*\* 建築学科兼任講師，Lecturer, Architectural Division, \*\*\* 東急建設株式会社，技術研究所 Tokyu Construction Co. Ltd.,

## 1. 緒言

近年わが国においては、都市における土地利用と再開発の立場から、建築物の高層化の問題がおこり、また耐震工学および施工方法の急速な発展により、全国各地に超高層ビルが建設されるようになってきた。

ところで耐震設計において、電子計算機を使用した地震応答解析は、従来一方向の地震動が作用したときの平面解析が主として行なわれてきた。しかし実際には、構造物の性状が整平面でも重心と剛心が一致しない場合、平面形が不整形な場合、立面の形状が不整形な場合、整形な平面でも、地震動の作用方向が構造物の主軸とずれている場合等は、捩れ振動を生ずる場合が多いので、一方向のみの平面解析だけでは、構造物の振動性状を的確に把握することはできない。そこでわれわれは、任意平面形を有する構造物の捩れ地震応答解析（以下TRASと略称する）のプログラムを1970年8月に完成した。

本研究においては、TRAS理論、TRAS完成以後のプログラムにおける理論の拡張、TRASを用いて解析した構造物の捩れ振動性状および高層の構造物の捩れ振動の検討について考察した。

## 2. 解析法

2.1. 解析上の仮定 解析においては次の仮定をおく。

- (1) 構造物を構成する材料は弾性体とし、線型応答のみを対象とする。
- (2) 床版は剛体とし、床変形は考慮しない。
- (3) 構造物の柱脚は固定とし、建物と地盤の相互作用は考慮しない。
- (4) 地震動における上下動の影響は無視する。
- (5) 各架構は剛な床版で連結されているものとし、直交する架構相互の影響は考慮しない。

2.2. 平面架構の剛性マトリックス 図1に示す任意の平面形を有する構造物の*i*-フレームにおける外力と変形の関係は、図2より次式で表わされる。

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ Q_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{uu,i} & K_{uv,i} \\ K_{vu,i} & K_{vv,i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここに  $\{P_i\}$  ; フレーム方向の外力項

$\{Q_i\}$  ; フレームに直交する方向の外力項

$\{\bar{u}_i\}$  ; フレーム方向の変位項

$\{\bar{v}_i\}$  ; フレームに直交する方向の変位項

しかう、ここでは直交方向のフレームの影響は考慮し

ないので(1)式は(2)式で表わされる。

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_i \\ \bar{Q}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{uu,i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \end{Bmatrix}$$

従って

$$\{\bar{P}_i\} = [K_i] \{\bar{u}_i\} \quad (2)$$

ここに  $[K_i]$  ; *i*-フレームのフレーム方向の剛性マトリックス

次に各フレームのフレーム方向 ( $\bar{x}$ ~ $\bar{y}$ 座標系) の剛性マトリックスを任意に定めた  $x$ ~ $y$ 座標系に変換する。図2において  $\bar{x}$ ~ $\bar{y}$ 座標は  $x$ ~ $y$ 座標に対して  $\alpha_i$  だけ傾いているので  $x$ ~ $y$ 座標に対して座標変換を行なうと次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ Q_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{P}_i \\ \bar{Q}_i \end{Bmatrix}$$

上式と(2)式の関係より、次の(3)式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ Q_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_i \cos^2 \alpha_i & \bar{K}_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i \\ \bar{K}_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i & \bar{K}_i \sin^2 \alpha_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (3)$$

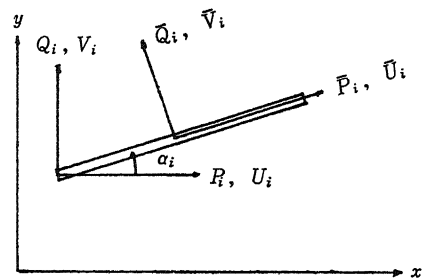
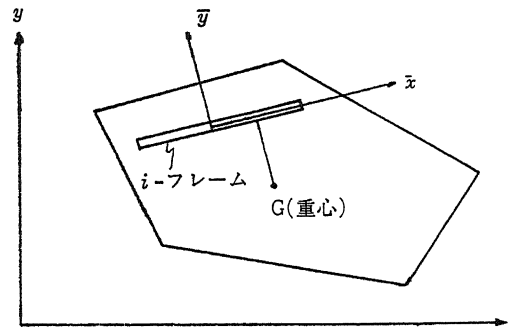


図1  $x$ ~ $y$ 座標系における任意建物平面

図2  $x$ ~ $y$ 座標系におけるユニット・フレーム

## 2.3. 任意平面形を有する架構全体の剛性マトリックス

構造物の  $k$  層の重心位置における  $x, y$  方向の変位  $u_k, v_k$ , 重心まわりの回転角  $\theta_k$  (床版の面内変形は考慮しないが, 面外変形は柱の伸縮や柱, 梁の回転により無視できない) と, 構造物の  $i$  番目のユニットフレームの  $k$  層における  $\bar{x}, \bar{y}$  方向の変位  $\bar{u}_{k,i}, \bar{v}_{k,i}$  との関係は, 図 3 より

$$\begin{aligned}\bar{u}_{k,i} &= \cos \alpha_{k,i} \cdot u_k + \sin \alpha_{k,i} \cdot v_k + \gamma_{k,i} \cdot \theta_k \\ \bar{v}_{k,i} &= -\sin \alpha_{k,i} \cdot u_k + \cos \alpha_{k,i} \cdot v_k\end{aligned}\quad (4)$$

となる。(4)式をマトリックス表示すると, (5)式となる。

$$\begin{aligned}\{\bar{u}_{k,i}\} &= [\cos \alpha_{k,i}] \{u_k\} + [\sin \alpha_{k,i}] \{v_k\} + [\gamma_{k,i}] \{\theta_k\} \\ \{\bar{v}_{k,i}\} &= -[\sin \alpha_{k,i}] \{u_k\} + [\cos \alpha_{k,i}] \{v_k\}\end{aligned}\quad (5)$$

ところでフレームの  $x, y$  方向の変位  $u_{k,i}, v_{k,i}$  は

$$\begin{aligned}\{u_{k,i}\} &= [\cos \alpha_{k,i}] \{\bar{u}_{k,i}\} - [\sin \alpha_{k,i}] \{\bar{v}_{k,i}\} \\ \{v_{k,i}\} &= [\sin \alpha_{k,i}] \{\bar{u}_{k,i}\} + [\cos \alpha_{k,i}] \{\bar{v}_{k,i}\}\end{aligned}\quad (6)$$

となる。よって(5), (6)式より,  $x, y$  方向の  $k$  層,  $i$  番目のユニットフレームの変位  $u_{k,i}, v_{k,i}$  は, 重心位置の変位および回転角を用いて次のように表わされる。

$$\begin{aligned}\{u_{k,i}\} &= \{u_k\} + [\cos \alpha_{k,i}] [\gamma_{k,i}] \{\theta_k\} \\ \{v_{k,i}\} &= \{v_k\} + [\sin \alpha_{k,i}] [\gamma_{k,i}] \{\theta_k\}\end{aligned}\quad (7)$$

また  $x, y$  方向に作用する外力  $P_i, Q_i$  は各フレームの  $x$  および  $y$  方向の変位を用いて表わすと, (3)式と(7)式より,

$$\begin{aligned}\{P_i\} &= [\cos^2 \alpha_{k,i}] [\bar{K}_i] \{u_{k,i}\} + [\sin \alpha_{k,i}] [\cos \alpha_{k,i}] \\ &\quad [\bar{K}_i] \{v_{k,i}\} + [\cos \alpha_{k,i}] [\bar{K}_i] [\gamma_{k,i}] \{\theta_k\} \\ \{Q_i\} &= [\sin \alpha_{k,i}] [\cos \alpha_{k,i}] [\bar{K}_i] \{u_{k,i}\} + [\sin^2 \alpha_{k,i}] \\ &\quad [\bar{K}_i] \{v_{k,i}\} + [\sin \alpha_{k,i}] [\bar{K}_i] [\gamma_{k,i}] \{\theta_k\}\end{aligned}$$

ところで振れモーメントは,

$$\begin{aligned}\{M\} &= [\gamma_{k,i}]^T \{\bar{P}_i\} = [\gamma_{k,i}]^T [\bar{K}_i] \{\bar{u}_{k,i}\} \\ &= [\gamma_{k,i}]^T [\bar{K}_i] [\cos \alpha_{k,i}] \{u_{k,i}\} + [\gamma_{k,i}]^T [\bar{K}_i] \\ &\quad [\sin \alpha_{k,i}] \{v_{k,i}\} + [\gamma_{k,i}]^T [\bar{K}_i] [\gamma_{k,i}] \{\theta_k\}\end{aligned}$$

で表わされる。

ゆえにフレーム数  $l$  の構造物が剛な床版で連結されているとき, 構造物の重心に作用する  $x$  方向,  $y$  方向の外力および回転方向の振れモーメントと, それらによって生ずる  $x$  方向,  $y$  方向の変位および回転角の関係は次式のようになる。

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} \{P_i\} \\ \{Q_i\} \\ \{M_i\} \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^l \begin{bmatrix} [\cos^2 \alpha_{k,i}] [\bar{K}_i] & [\sin \alpha_{k,i}] [\cos \alpha_{k,i}] \\ [\cos \alpha_{k,i}] [\sin \alpha_{k,i}] [\bar{K}_i] & [\sin^2 \alpha_{k,i}] \\ [\gamma_{k,i}] [\bar{K}_i] [\cos \alpha_{k,i}] & [\gamma_{k,i}] [\bar{K}_i] \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{Bmatrix} [\bar{K}_i] [\cos \alpha_{k,i}] [\bar{K}_i] [\gamma_{k,i}] \\ [\bar{K}_i] [\sin^2 \alpha_{k,i}] [\bar{K}_i] [\gamma_{k,i}] \\ [\sin \alpha_{k,i}] [\gamma_{k,i}] [\bar{K}_i] [\gamma_{k,i}] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_{k,i}\} \\ \{v_{k,i}\} \\ \{\theta_k\} \end{Bmatrix} \quad \cdots (8)\end{aligned}$$

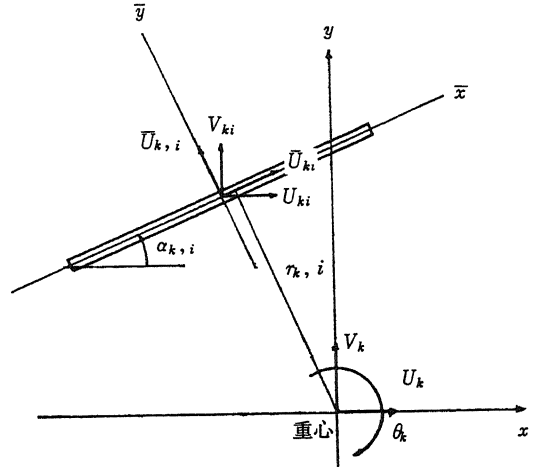


図 3  $k$  層の重心位置の変形とフレームとの関係

よって, フレーム全体の剛性マトリックスは, 各フレームの剛性マトリックス  $[\bar{K}_i]$  を用いて(8)式に示されたようになる。

## 2.4. 運動方程式

一般に地震動による構造物の運動方程式は次式で与えられる。

$$[M] \{\ddot{u}\} + [C] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = -[M] \{\ddot{z}\}$$

ところで振れを伴う構造物の各層における重心に関する運動方程式は,  $x$  方向,  $y$  方向の並進および回転項を有するので, (9)式のようになる。

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} [M]_{uu} & 0 \\ [M]_{uv} & [M]_{u\theta} \\ 0 & [M]_{v\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}\} \\ \{\ddot{v}\} \\ \{\ddot{\theta}\} \end{Bmatrix} &+ \begin{bmatrix} [C]_{uv} [C]_{uv} [C]_{u\theta} \\ [C]_{vu} [C]_{vv} [C]_{v\theta} \\ [C]_{\theta u} [C]_{\theta v} [C]_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{u}\} \\ \{\dot{v}\} \\ \{\dot{\theta}\} \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} [K]_{uu} [K]_{uv} [K]_{u\theta} \\ [K]_{vu} [K]_{vv} [K]_{v\theta} \\ [K]_{\theta u} [K]_{\theta v} [K]_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \\ \{\theta\} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} [M]_{uu} & 0 \\ [M]_{uv} & [M]_{v\theta} \\ 0 & [M]_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{z}_u\} \\ \{\ddot{z}_v\} \\ \{\ddot{z}_\theta\} \end{Bmatrix} \quad \cdots (9)\end{aligned}$$

ここで

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{x1} & & & 0 \\ & m_{xn} & & \\ & & m_{y1} & \\ & & & m_{yn} \\ 0 & & & & J_1 \\ & & & & & J_n \end{bmatrix}$$

$m_{xi}$ ;  $i$  層の  $x$  方向の質量  
 $m_{yi}$ ;  $i$  層の  $y$  方向の質量  
 $J_i$ ;  $i$  層の重心まわりの慣性モーメント

$[C]$ ; 減衰マトリックス (後述)

$[K]$ ; 剛性マトリックス,

$$\begin{aligned}
[K]_{uu} &= \sum_{i=1}^l [\cos \alpha_{k,i}] [\bar{K}]_i, \\
[K]_{v\theta} &= \sum_{i=1}^l [\sin \alpha_{k,i}] [\bar{K}]_i [\gamma_{k,i}] \\
[K]_{uv} &= \sum_{i=1}^l [\sin \alpha_{k,i}] [\cos \alpha_{k,i}] [\bar{K}]_i, \quad [K]_{\theta v} = [K]_{uv}^T \\
[K]_{u\theta} &= \sum_{i=1}^l [\cos \alpha_{k,i}] [\bar{K}]_i [\gamma_{k,i}], \quad [K]_{\theta\theta} = [K]_{v\theta}^T \\
[K]_{vu} &= [K]_{uv}^T, \quad [K]_{\theta\theta} = \sum_{i=1}^l [\gamma_{k,i}]^T [\bar{K}]_i [\gamma_{k,i}] \\
[K]_{vv} &= \sum_{i=1}^l [\sin^2 \alpha_{k,i}] [\bar{K}]_i,
\end{aligned}$$

## 2.5 減衰マトリックスの考え方

減衰マトリックスの考え方の主なるものとして, Rayleigh の質量マトリックスと剛性マトリックスの一次結合式と, E. L. Wilson & R. W. Clough の, 固有ベクトルの減衰マトリックスに関する直交性成立の仮定から導かれる提案式がある。ここでは両者について述べて参考とする。尚, 本研究においては, 減衰マトリックスとして後者の方法を採用した。

Rayleigh の一次結合式<sup>(1),(2)</sup>; 減衰マトリックス  $[C]$  に関して固有ベクトル  $\{\phi\}$  の直交性が満足されるとき, 減衰マトリックスは, 次式のように質量マトリックス  $[M]$  と剛性マトリックス  $[K]$  の一次結合式で表わされる。

$$[C] = \alpha[M] + \gamma[K] \quad (10)$$

減衰マトリックスを固有関数マトリックス (モーダルマトリックス)  $[\Phi]$  を用いて変換すると,

$$[\Phi]^T [C] [\Phi] = \alpha [\Phi]^T [M] [\Phi] + \gamma [\Phi]^T [K] [\Phi]$$

さらに質量マトリックスと剛性マトリックスに関する固有ベクトルの直交性より

$$\begin{aligned}
[\Phi]^T [C] [\Phi] &= \alpha \begin{bmatrix} 1M^* & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & nM^* \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1\omega^2 1M^* & & \\ & \ddots & \\ & & n\omega^2 nM^* \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1C^* & & \\ & \ddots & \\ sC^* & & nC^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha_1 M^* + \gamma_1 \omega_1^2 M^* & & \\ & \ddots & \\ \alpha_s M^* + \gamma_s \omega_s^2 M^* & & \\ & & \ddots & \\ \alpha_n M^* + \gamma_n \omega_n^2 M^* \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ここに

$sM^*$ ; 一般化された  $S$  次の質量  $\{\phi\}^T [M] \{\phi\}$

$s\omega^2$ ;  $S$  次の固有値

$sC^*$ ; 一般化された減衰係数

すなわち

$$sC^* = 2s h_s \omega_s M^* = \alpha_s M^* + \gamma_s \omega_s^2 M^*$$

となる。そこでたとえば一次と二次の減衰定数および固有振動数を与えることにより, 下式から  $\alpha, \gamma$  の値が決り, (10)式より減衰マトリックスが計算できる。

$$2s h_s \omega = \alpha + \gamma_s \omega^2$$

R. W. Cloughの提案式<sup>(3)</sup>; 減衰マトリックス  $[C]$  が固

有関数マトリックス  $[\Phi]$  に関して直交性を有すると仮定すると,

$$[C]^* = [\Phi]^T [C] [\Phi] \quad (11)$$

ここで

$$[C]^* = \begin{bmatrix} 2_1 h_1 \omega_1 M^* & & \\ & \ddots & \\ & & 2_n h_n \omega_n M^* \end{bmatrix} \quad (12)$$

ところで質量マトリックスの直交性より

$$[M]^* = [\Phi]^T [M] [\Phi]$$

となる。また一般化された質量マトリックスは, 対角マトリックスであるから  $[M]^*$  の逆行列は存在するから

$$[I] = [M]^*{}^{-1} [M]^* = [M]^*{}^{-1} [\Phi]^T [M] [\Phi] = [\Phi]^{-1} [\Phi]$$

よって

$$[\Phi]^{-1} = [M]^*{}^{-1} [\Phi]^T [M] \quad (13)$$

ところで(11)式より

$$\begin{aligned}
([\Phi]^{-1})^T [C]^* [\Phi]^{-1} &= ([\Phi]^{-1})^T [\Phi]^T [C] [\Phi] [\Phi]^{-1} \\
&= [C] \quad (14)
\end{aligned}$$

(13)式を(14)に代入して

$$\begin{aligned}
[C] &= [M]^T ([\Phi]^T)^T ([M]^*{}^{-1})^T [C]^* [M]^*{}^{-1} [\Phi]^T [M] \\
&= [M] [\Phi] [M]^*{}^{-1} [C]^* [M]^*{}^{-1} [\Phi]^T [M] \quad (15)
\end{aligned}$$

(15)式において  $[M]^*{}^{-1} [C]^* [M]^*{}^{-1}$  は対角行列となるので

$$[\zeta] = [M]^*{}^{-1} [C]^* [M]^*{}^{-1} \quad (16)$$

とおけば, (16)式と(12)式から  $[\zeta]$  の要素  $s\zeta$  は,

$$s\zeta = \frac{sC^*}{sM^*{}^2} = \frac{2s h_s \omega}{sM^*} \quad (17)$$

となる。ゆえに(15)式は

$$\begin{aligned}
[C] &= [M] [\Phi] [\zeta] [\Phi]^T [M] = \\
&= [M] \left[ \sum_{s=1}^n s\zeta \{\phi\} \{\phi\}^T \right] [M]
\end{aligned}$$

となり, 減衰マトリックスが求められる。

## 2.6 運動方程式の解法

構造物の地震動による応答は, (9)式の運動方程式を解く問題に帰着する。ところで最も一般的な微分方程式の数値計算法としては, ルンゲ・クッタ法と線型加速度法<sup>(4)</sup>があげられるが, ここでは後者の方法を用いる。次にこの方法を述べる。

先づ(9)式の運動方程式を(18)式に示すように変位, 速度, および加速度の増分の形であらわすと,

$$[M] \{\Delta \ddot{x}\} + [C] \{\Delta \dot{x}\} + [K] \{\Delta x\} = -[M] \{\Delta \ddot{z}\} \quad (18)$$

となる。いま時間  $t$  における応答諸量がわかっているとき, 微小時間  $\Delta t$  を経たときの応答諸量は, テーラー展開式から次のようになる。

$$\{X\}_{t+\Delta t} = \{X\}_t + \Delta t \{\dot{X}\}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{X}\}_t + \frac{\Delta t^3}{6}$$

$$\{\ddot{X}\}_t + \dots \quad (19)$$

$$\{\dot{X}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{X}\}_t + \Delta t \{\ddot{X}\}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{X}\}_t + \dots$$

$$(20)$$

$$\{\ddot{X}\}_{t+\Delta t} = \{\ddot{X}\}_t + \Delta t \{\ddot{X}\}_t + \dots \quad (21)$$

ここで  $\{\ddot{X}\}$  は、微小時間  $\Delta t$  内では直線的に変ると仮定すれば4階以上の微係数は0となり、 $\{\ddot{X}\}$  に関しては次式が成立する。

$$\{\ddot{X}\}_t = \frac{\{\ddot{X}\}_{t+\Delta t} - \{\ddot{X}\}_t}{\Delta t} \quad (22)$$

ところで時間  $t + \Delta t$  における加速度の増分は、(18)(19)式より変位増分を用いて次のようになる\*。

$$\{\Delta \ddot{X}\}_{t+\Delta t} = -3\{\ddot{X}\}_t - \frac{6}{\Delta t} \{\dot{X}\}_t + \frac{6}{\Delta t^2} \{\Delta X\}_{t+\Delta t} \quad (23)$$

また時間  $t + \Delta t$  における速度の増分は(22)、(20)式より変位増分を用いて次のように表わされる\*\*。

$$\{\Delta \dot{X}\}_{t+\Delta t} = -\frac{\Delta t}{2} \{\ddot{X}\}_t - 3\{\dot{X}\}_t + \frac{3}{\Delta t} \{\Delta X\}_{t+\Delta t} \quad (24)$$

よって(18)式は(23)、(24)式から変位増分を用いれば、
$$[\bar{K}] \{\Delta X\} = \{\Delta \bar{P}\} \quad (25)$$

ここに 
$$[\bar{K}] = [K] + \frac{3}{\Delta t} [C] + \frac{6}{\Delta t^2} [M]$$

$$\begin{aligned} \{\Delta \bar{P}\} = & -[M] \{\Delta z\} + 3[M] \left[ \{\ddot{X}\}_t + \frac{2}{\Delta t} \{\dot{X}\}_t \right] \\ & + [C] \left[ 3\{\dot{X}\}_t + \frac{\Delta t}{2} \{\ddot{X}\}_t \right] \end{aligned}$$

ゆえに(25)式より、変位増分  $\{\Delta X\}$  を求めることにより、時刻  $t + \Delta t$  における変位、速度および加速度は次式より求めることができる。

\* (22)式を(19)式に代入して、変形すれば、

$$\{X\}_{t+\Delta t} - \{X\}_t = \Delta t \{\dot{X}\}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{X}\}_t + \frac{\Delta t^3}{6}$$

$$\left[ \{\ddot{X}\}_{t+\Delta t} - \{\ddot{X}\}_t \right]$$

$$\{\Delta X\}_{t+\Delta t} = \Delta t \{\dot{X}\}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{X}\}_t + \frac{\Delta t^3}{6} \{\ddot{X}\}_{t+\Delta t}$$

ゆえに次式が成立する。

$$\{\Delta \ddot{X}\}_{t+\Delta t} = -3\{\ddot{X}\}_t - \frac{6}{\Delta t} \{\dot{X}\}_t + \frac{6}{\Delta t^2} \{\Delta X\}_{t+\Delta t}$$

$$\{X\}_{t+\Delta t} = \{X\}_t + \{\Delta X\}_{t+\Delta t}$$

$$\{\dot{X}\}_{t+\Delta t} = \frac{3}{\Delta t} \{X\}_t - 2\{\dot{X}\}_t - \frac{\Delta t}{2} \{\ddot{X}\}_t$$

$$\{\ddot{X}\}_{t+\Delta t} = -\{z\} - [M]^{-1} [C] \{\dot{X}\}_t + [K] \{X\}_t \quad (26)$$

## 2.7 応答値の算出

重心の変位：(9)式に示した運動方程式は、重心に関するものであるから、時刻  $t$  における重心の変位  $\{X\}_t$  が求まっていれば、微小時間  $\Delta t$  を経たときの変位  $\{X\}_{t+\Delta t}$  は、線形加速度法により(9)式を解いて変位増分  $\{\Delta X\}_{t+\Delta t}$  を求めることにより次式となる。

$$\{X\}_{t+\Delta t} = \{X\}_t + \{\Delta X\}_{t+\Delta t} \quad (27)$$

重心のせん断力（架構の全せん断力）：静的な力と変位の関係から、重心に作用する外力は、重心の  $x, y$  方向の変位  $u, v$ 、および回転角  $\theta$  を用いて次のように表わされる。

$$\begin{Bmatrix} \{P_u\} \\ \{P_v\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{uv}] & [K_{u\theta}] \\ [K_{vu}] & [K_{vv}] & [K_{v\theta}] \\ [K_{\theta u}] & [K_{\theta v}] & [K_{\theta\theta}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{V\} \\ \{\theta\} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

ゆえに、各層の  $x, y$  方向のせん断力  $Q_{x,i}$ 、 $Q_{y,i}$  および回転のモーメント  $M_i$  は(29)式となる。

$$\begin{aligned} Q_{x,i} &= \sum_{k=i}^n P_{u,k}, \quad Q_{y,i} = \sum_{k=i}^n P_{v,k} \\ M_i &= \sum_{k=i}^n M_k \quad (29) \\ (i &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

各平面架構の変位：いま  $k$  層の重心における  $x, y$  方向の変位  $u_k, v_k$  および回転  $\theta_k$  がわかっているとき、構造物を構成する各架構の変位  $u_k, v_k$  は次のようになる。

重心からの距離  $r_{k,i}$  だけ離れていて、 $x$  軸に対して、 $\alpha_{k,i}$  だけ傾いている  $i$  架構の  $k$  層における変位は、図4より、

\*\* (22)式を(20)式に代入して

$$\begin{aligned} \{\dot{X}\}_{t+\Delta t} &= \{\dot{X}\}_t + \Delta t \{\ddot{X}\}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \left[ \{\ddot{X}\}_{t+\Delta t} - \{\ddot{X}\}_t \right] \\ \{\dot{X}\}_{t+\Delta t} &= \Delta t \{\ddot{X}\}_t + \frac{\Delta t}{2} \{\Delta \ddot{X}\}_{t+\Delta t} = \Delta t \{\ddot{X}\}_t - \\ & \quad \frac{3\Delta t}{2} \{\ddot{X}\}_t - 3\{\dot{X}\}_t + \frac{3}{\Delta t} \{\Delta X\}_{t+\Delta t} \end{aligned}$$

故に次式が成立する。

$$\{\Delta \ddot{X}\}_{t+\Delta t} = -\frac{\Delta t}{2} \{\ddot{X}\}_t - 3\{\dot{X}\}_t + \frac{3}{\Delta t} \{\Delta X\}_{t+\Delta t}$$

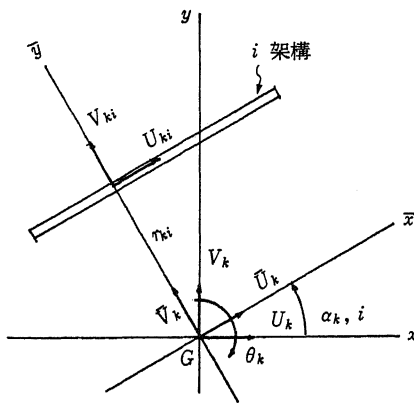


図4 重心の変位と架構の変位との関係

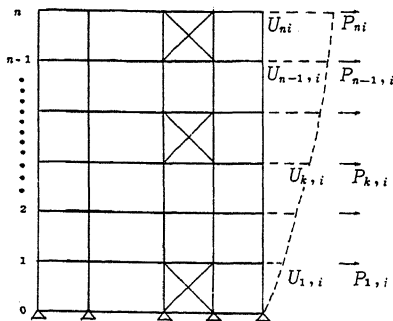


図5 架構の外力と変位の関係

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_k \\ \bar{V}_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{k,i} & \sin \alpha_{k,i} \\ -\sin \alpha_{k,i} & \cos \alpha_{k,i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_k \\ V_k \end{Bmatrix} \quad (30)$$

$$U_{k,i} = \bar{U}_k + \gamma_{k,i} \theta_k \quad (31)$$

従って上記の(30), (31)式より各架構の変位は、次式で表わされる。

$$\{U_{k,i}\} = [\cos \alpha_{k,i}] \{U_i\} + [\sin \alpha_{k,i}] \{V_i\} + [\gamma_{k,i}] \{\theta_i\} \quad (32)$$

また各架構の層間変位は、(33)式となる。

$$\delta_{k,i} = U_{k,i} - U_{k,i-1} \quad (33)$$

各平面架構のせん断力：各架構の外力  $\{P_{k,i}\}$  と変位  $\{U_{k,i}\}$  との関係は、架構の剛性マトリックスを  $[K_i]$  とすれば、

$$\{P_{k,i}\} = [K_i] \{U_{k,i}\} \quad (34)$$

となり、変位がわかれば各層の外力が求まる。

また外力とせん断力との関係より、せん断力は次のようになる。

$$\{Q_{k,i}\} = \sum_{j=k}^n \{P_{j,i}\} \quad (35)$$

### 3. 地震動の入力方向性を考慮した応答解析の

#### 検討

#### 3.1 地震動入力方向性の意義

任意の平面形を有する架構によって構成される構造物に地震動が作用するときの振れ応答は、地震動が構造物に入る方向によって異なる。そこで応答解析を行なうにあたっては、地震動の入力方向を図6に示すように重心を通る2つの軸を変化させ、夫々の場合における応答解析を行なう。それらの応答解析結果のうち構造物が最も不利な場合の応答結果を採用することになる。ところで振れ応答解析のインプット・データーとしては、重心を通る任意に定めた軸（実際には地震動の入力方向となっている）に対する各架構の傾斜角度  $(\alpha_{k,i})$  または  $(\alpha'_{k,i})$  を与えるようになっているが、その都度変更された軸に関して式(8)に示す任意架構の全体剛性マトリックスを算出するのでは、インプット・データーが非常に繁雑となる。そこで変更された軸に関する任意架構の全体剛性マトリックスを算出する代りに、地震動の方向を変えることによって、前者と同じ効果をうることが可能となる。以下にその概要を示す。

#### 3.2 地震動の入力方向変換の手法

いま図7に示す任意平面形を有する構造物の振れ応答解析を考える。ここで解析する方向は、 $\bar{x} \sim \bar{y}$  座標であるが、プログラムにインプットした各架構のデーターが  $x \sim y$  座標であるときは地震動を  $\bar{x} \sim \bar{y}$  座標系から  $x \sim y$  座標系に変換しなければならない。

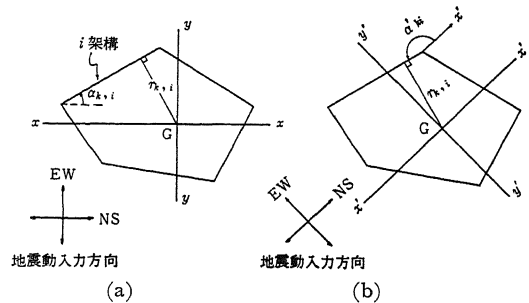


図6 地震動の入力方向

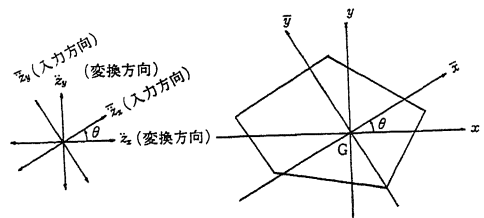


図7 地震動の入力方向の変換

いま解析する方向が原座標に関して  $\theta$  だけ傾いているとき、入力地震動と変換された地震動の間には次の関係が成立する。

$$\begin{Bmatrix} \ddot{z}_x \\ \ddot{z}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_x \\ \ddot{z}_y \end{Bmatrix} \quad (36)$$

それゆえ変換後の地震動は次式となる。

$$\begin{Bmatrix} \ddot{z}_x \\ \ddot{z}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_x \\ \ddot{z}_y \end{Bmatrix} \quad (37)$$

### 3.3. 解析モデルの設定

地震動の入力方向が相違する場合に固有値、応答結果がどのように違うかを検討するため図8に示す2層構造物をモデルとて考察する。この構造物の剛性、質量、慣性モーメント等は図8に附記した。

このモデル構造物に対して、図9に示すように地震動の方向性を考慮して振れ応答解析を行なう。地震動の方向は二種類とし、重心から各フレームまでの距離と入力方向に対する傾斜は表1に示す。

3.4. 固有値、固有ベクトルの検討：固有値の解析は Power Method によった。解析結果は表2に示され、固有値、固有振動数および固有周期は、case 1およびcase 2とも等しい。また固有ベクトルを夫々  $x, y$  および  $\theta$  方向の影響が卓越したモードに分け、case 1, case 2の比較を表3に示した。そして、 $x, y$  方向の固有ベクトルを case 1, case 2 の各次に対して合成した結果を図10に示す。図10によれば、合成したベクトルは、同じ方向を示し、1, 2層の比は等しいことがわかる。それゆえ立体振動のモードを考察する場合、 $x, y$  および  $\theta$  方向を個々に与えるよりも、これを主軸方向 ( $x, y$  方向のモードを合成) の振動モードと回転のモード ( $\theta$  方向のモード) として考察する方がよい。尚、図11に振動型を示した。

### 3.5 応答解析に関する検討

応答解析は、地震動として EL-CENTRO May 18, 1940 を case 1, case 2 に 5.0 sec. 間作用させた。減衰定数は、 $h_1 = h_2 = 0.05$  とし R. W. Clough の提案式によって減衰マトリックスを計算した。尚地震動の入力方向の成分は、図9に示し、最大加速度は、NS 方向 320.907ガル、EW 方向 218.232ガルである。

解析結果は図12および図13に示される。

図12は重心の変位、せん断力および振れモーメントで夫々 case 1, case 2 の比較ができるように示した。また図13-(a)は各架構の変位を、図13-(b)はせん断力を示す。ここで重心の変位およびせん断力が case 1 と case 2 で異なる値となるのは、座標が異なるためである。

以上 case 1, case 2 の場合における応答結果を示した

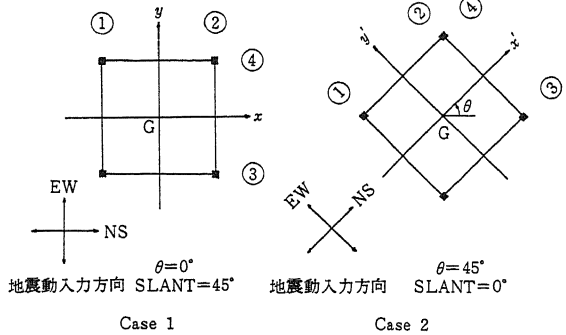
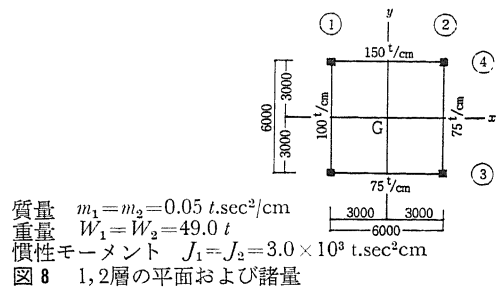


図9 地震動の方向

$\theta$  : 建物と軸  $x \sim y$  の傾斜角

Slant : 建物と地震動入力方向との傾斜角

表1 重心からフレームまでの距離と傾斜

フレーム	case 1		case 2	
	距離	傾斜	距離	傾斜
1	300cm	90°	300cm	315°
2	300	270	300	135
3	300	180	300	225
4	300	0	300	45

表2. 固有値、固有振動数および固有周期  
(case 1, case 2 とも)

	固有値 (1/sec²)	固有振動数 (1/sec)	固有周期 (sec)
1次	1310.42	86.20	0.07357
2次	1567.49	39.59	0.15870
3次	4761.41	69.00	0.09106
4次	8981.75	94.77	0.06630
5次	10743.76	103.65	0.03478
6次	32635.17	180.65	0.03478

が、各架構の変位およびせん断力は図13に示されるようによく一致している。さらに減衰が存在する場合は、構造物の性状によって一義的に定まる主軸方向の振動型により減衰性状を決定すれば、上記と同じ結果が得られる筈である。それゆえ本法により各種の方向から地震動が作用した場合の応答結果が容易に求められる。

## 4. 多質点振動系を等価置換した場合の検討；

### 4.1. 等価置換について

構造物を振動解析がしやすいように、これと等価な振動

表3. 固有ベクトル

x方向の影響が卓越したモード

		x 方 向		y 方 向		$\theta$ 方 向	
		1 層	2 層	1 層	2 層	1 層	2 層
case 1	1 次	1.0000	1.6181	-0.2188	-0.3540	-0.0009	-0.0014
	2 次	1.0000	-0.6180	-0.2188	-0.0009	-0.0009	0.5442
case 2	1 次	1.0000	1.6181	0.6745	1.0917	-0.0009	-0.0009
	2 次	1.0000	-0.6180	0.6745	-0.4169	-0.0005	0.0003

y方向の影響が卓越したモード

		y 方 向		$\theta$ 方 向		x 方 向	
		1 層	2 層	1 層	2 層	1 層	2 層
case 1	1 次	5.1449	8.3246	-0.0024	-0.0038	1.0000	1.6180
	2 次	5.1449	-3.1797	-0.0024	0.0015	1.0000	-0.6180
case 2	1 次	-1.5601	-2.5242	-0.0024	-0.0026	1.0000	1.6180
	2 次	-1.5601	0.9642	-0.0016	0.0010	1.0000	-0.6180

 $\theta$ 方向の影響が卓越したモード

		$\theta$ 方 向		x 方 向		y 方 向	
		1 層	2 層	1 層	2 層	1 層	2 層
case 1	1 次	0.0177	0.0286	1.0000	1.6180	0.2962	0.4792
	2 次	0.0177	-0.0109	1.0000	-0.6180	0.2962	-0.1830
case 2	1 次	0.0193	0.0312	1.0000	1.6180	-0.5430	-0.8786
	2 次	0.0193	-0.0119	1.0000	-0.6180	-0.5430	0.3356

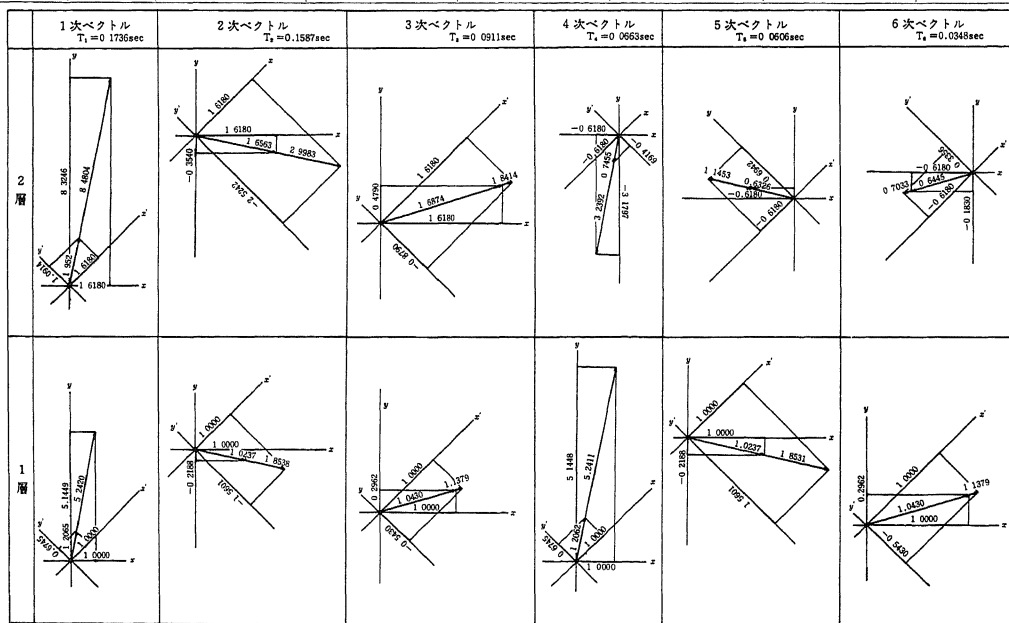


図10. x, y 方向の固有ベクトル合成

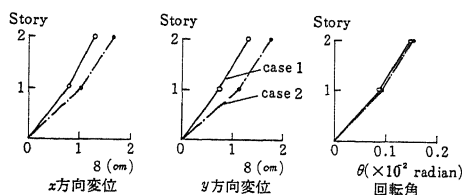


図12 (a) 重心の変位および回転角

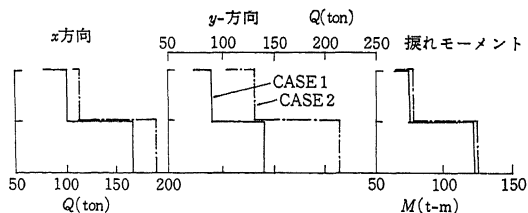


図12 (b) 重心のせん断力および揺れモーメント



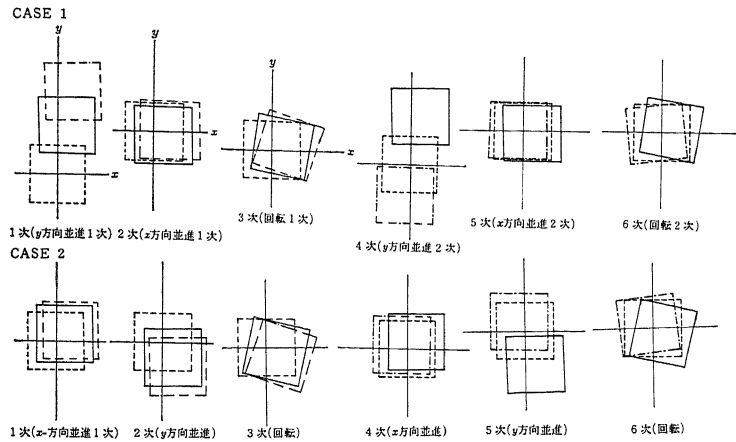


図11 振 動 型

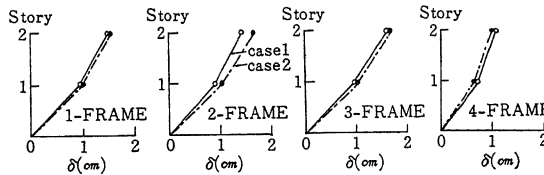


図13 (a) 各フレームの変位

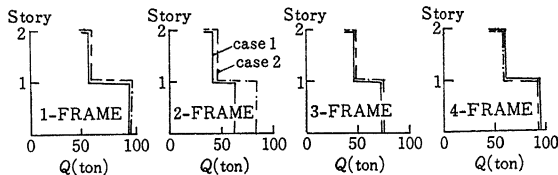


図13 (b) 各フレームのせん断力

性状を有する系に置換して解析することがある。例えば20層の構造物を、電子計算機の容量および複雑さから、これを10乃至5質点系に置換して解析する。とくに高層になるにつれて計算時間の短縮をはかるため、それより質点数の少ない質点系に置換することが多い。この場合の条件は、通常質量は2層以上数層の和によって減少させ、剛性は置換系と原系の固有値が等しくなるようにしている。ここでは、等価置換の方法について考察し、8質点系振動モデルを4質点系および2質点系振動モデルに等価置換した場合について固有値および応答解析に関する比較検討を行なう。

表5. 重心よりフレームまでの距離

フレーム	距 離	傾斜	フレーム	距 離	傾斜
1	750 cm	0°	5	750 cm	90°
2	250	0	6	250	90
3	250	180	7	250	270
4	750	180	8	750	270

#### 4.2. 剛性マトリックスおよび質量のReduction

剛性マトリックスの Reductionは、次のようにする。

図14(a)において外力と変形の関係は、

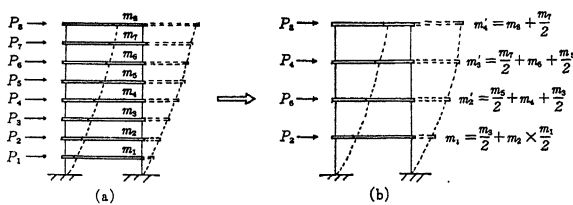
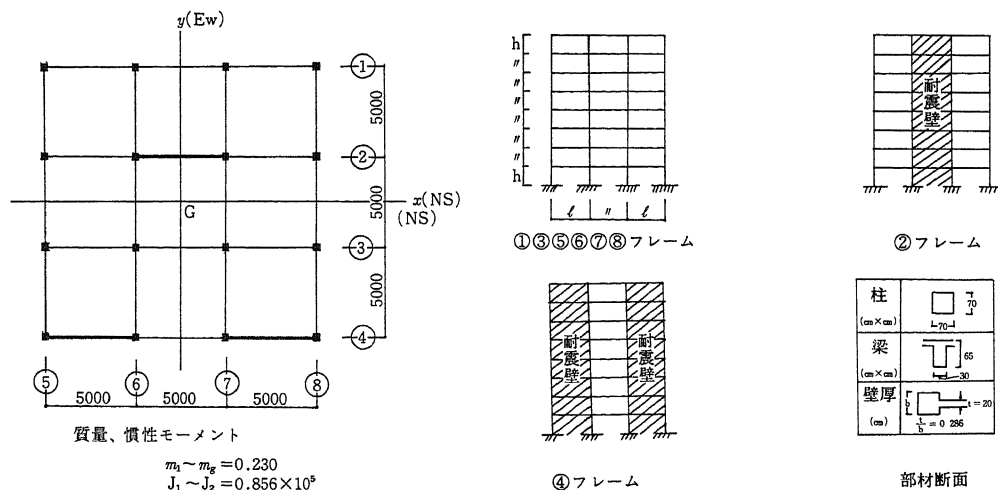


図14 等価置換系

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{Bmatrix} \quad (36)$$



(a) 平面，質量および重心に関する慣性モーメント

(b) 各フレームおよび部材断面

図15 解析モデル

表4. 剛性マトリックス (case 1 の場合)

① ③ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ フレーム

759.326	-467.938	170.725	-41.497	10.095	2.448	0.553	-0.054
-467.938	607.665	-431.084	161.758	-39.308	9.541	-2.230	0.412
170.725	-431.084	598.698	-428.893	161.197	-39.063	9.041	1.445
-41.497	161.758	-428.893	598.139	-438.655	160.724	-37.244	6.139
10.095	-39.308	161.197	-428.655	597.657	-426.813	153.201	-25.053
2.448	9.541	-39.063	160.724	-426.813	590.168	-396.074	103.399
0.553	-2.230	9.041	-37.244	153.201	-396.074	463.826	-190.929
-0.054	0.402	1.445	6.139	-25.053	103.399	-190.929	107.499

② フレーム

4344.103	-2355.26	299.039	17.721	37.237	9.654	5.152	7.329
-2355.26	4109.205	-2356.948	272.136	11.327	32.085	6.357	14.130
299.039	-2356.948	4082.302	-2363.341	266.978	8.075	26.998	27.192
17.721	272.136	-2363.341	4077.145	-2366.599	261.916	1.348	67.603
37.237	11.327	266.978	-2366.599	4072.086	-2373.3	236.590	107.667
9.654	32.085	8.075	261.916	-2373.3	4046.711	-2380.899	390.596
5.152	6.357	26.998	1.3481	236.590	-2380.899	3837.883	-1735.039
7.329	14.130	27.192	67.603	107.667	390.596	-1735.039	1117.666

③ フレーム

7942.351	-4243.784	412.222	73.072	64.408	22.438	10.233	17.131
-4243.784	7638.439	-4279.236	368.323	57.929	54.186	15.090	31.035
412.222	-4279.236	7594.539	-4294.424	358.076	50.670	43.938	59.979
73.072	368.323	-4294.424	7584.307	-4301.715	348.021	35.070	133.190
64.408	57.929	358.076	-4301.715	7574.126	-4317.070	305.213	240.250
22.438	54.186	50.670	348.021	-4317.070	7532.34	-4358.746	657.902
10.233	15.090	43.938	35.070	305.213	-4358.746	7250.951	-3305.379
17.131	31.035	59.979	133.190	240.250	657.902	-3305.379	2159.145

となる。次に図14-(b)に示される振動系に置換する為、2, 4, 6, 8層の剛性をシフトすると(37)式となる。

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_3 \\ P_5 \\ P_7 \\ P_2 \\ P_4 \\ P_6 \\ P_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{11} & k_{13} & k_{15} & k_{17} & k_{12} & k_{14} & k_{16} & k_{18} \\ k_{31} & k_{33} & k_{35} & k_{37} & k_{32} & k_{34} & k_{36} & k_{38} \\ k_{51} & k_{53} & k_{55} & k_{57} & k_{52} & k_{54} & k_{56} & k_{58} \\ k_{71} & k_{73} & k_{75} & k_{77} & k_{72} & k_{74} & k_{76} & k_{78} \\ k_{21} & k_{23} & k_{25} & k_{27} & k_{22} & k_{24} & k_{26} & k_{28} \\ k_{41} & k_{43} & k_{45} & k_{47} & k_{42} & k_{44} & k_{46} & k_{48} \\ k_{61} & k_{63} & k_{65} & k_{67} & k_{62} & k_{64} & k_{66} & k_{68} \\ k_{81} & k_{83} & k_{85} & k_{87} & k_{82} & k_{84} & k_{86} & k_{88} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_7 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_8 \end{Bmatrix} \\ = \begin{Bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X_1\} \\ \{X_2\} \end{Bmatrix} \quad (37)$$

外力はこの場合(38)式で表わされるから、(37)式は(39)式で表わされる。

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_3 \\ P_5 \\ P_7 \end{Bmatrix} = \{O\}, \quad \begin{Bmatrix} P_2 \\ P_4 \\ P_6 \\ P_8 \end{Bmatrix} = \{P\} \quad (38)$$

$$\begin{Bmatrix} \{O\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X_1\} \\ \{X_2\} \end{Bmatrix} \quad (39)$$

(39)式を展開すれば、次式となる。

$$\begin{aligned} [K_{11}] \{X_1\} + [K_{12}] \{X_2\} &= \{O\} \\ [K_{21}] \{X_1\} + [K_{22}] \{X_2\} &= \{P\} \end{aligned} \quad (40)$$

(40)式において、 $\{X_1\}$ を消去することによって、図14(b)に示す場合の外力と変位の関係式は、

$$\{P\} = [ [K_{22}] - [K_{21}][K_{11}]^{-1}[K_{12}] ] \{X_2\} \quad (41)$$

となる。よって、多質点系をそれより次数の低い多質点系に等価置換する場合における剛性マトリックスは、(42)式で与えられる。

$$[K] = [K_{22}] - [K_{21}][K_{11}]^{-1}[K_{12}] \quad (42)$$

尚 Appendix 2 に剛性マトリックスを Reduction する場合のブロック・チャートを示す。

質量の Reduction は、図14に示されるようにシフトした層の質量を上、下各層にふりわけける方法によって質点数を減少させる<sup>(5)</sup>。

### 4.3. 解析モデルの設定

多質点系をそれより次数の低い多質点系3 case に等価置換して、固有値および応答解析を行ない、結果の比較検討を行なうために、図15に示す8層建物をモデルとして、これを8, 4および2質点系に等価置換して比較検討する。この解析モデルを構成する各架構は、著者の研究<sup>(6)</sup>に用いられた図15(b)に示す8層3スパンの純ラーメン、中央連層耐震壁および両端スパン連層耐震壁架構である。これら各種架構の剛性マトリックスは、著者の耐震壁をプレーシングに置換して応力解析を行なう方法<sup>(7)</sup>によって、各架構の曲げ、せん断型の剛性マトリックスを計算した。

このようにして計算した各架構の剛性マトリックスは表4のようになり、重心から架構までの距離と傾斜角度を表5に示す。また各層質量および重心に関する慣性モーメントは図15に示される。

表6. 等価置換された場合の剛性マトリックス (case 2, 3 の場合)

架構番号	case 2	case 3
① ③ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧	$\begin{pmatrix} 123.000 & -72.99 & 24.05 & -1.66 \\ -72.99 & 101.92 & -65.46 & 16.39 \\ 24.05 & -65.46 & 86.36 & -38.49 \\ -1.66 & 16.30 & -38.49 & 26.20 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 26.54 & -8.51 \\ -8.51 & 8.35 \end{pmatrix}$
②	$\begin{pmatrix} 1638.69 & -901.32 & 151.31 & 34.09 \\ -901.32 & 1487.36 & -944.31 & 206.91 \\ 151.31 & -944.31 & 1340.64 & -569.08 \\ 34.09 & 206.91 & -569.03 & 321.77 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 432.71 & -145.75 \\ -145.75 & 74.24 \end{pmatrix}$
④	$\begin{pmatrix} 3184.69 & -1744.06 & 272.96 & 77.87 \\ -1744.06 & 2911.71 & -1838.62 & 398.01 \\ 272.96 & -1838.62 & 2642.37 & -1123.97 \\ 77.87 & 398.01 & -1123.97 & 632.80 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 867.17 & -288.57 \\ -288.57 & 142.78 \end{pmatrix}$

#### 4.4. 剛性マトリックスのReduction

解析モデルにおける8質点系を case 1 とし、剛性マトリックスおよび質量を4質点系および2質点系にReductionしたものを夫々 case 2, case 3 とする。Reductionの結果、各架構の剛性マトリックスは、表6に示される。

#### 4.5 固有値および固有ベクトルの検討

固有値は Jacobi's Method (Appendix 3 にブロック・チャートを示す) によって解析した。解析結果として固有円振動数及び固有周期を表 7 に、固有ベクトルを表 8 に示す。表 7 より case 1 の原系に対して case 2 の場合は低次において固有振動数、固有周期とも殆んど等しい。しかし case 3 の場合は、低次においても case 1 の場合と比較して差が大きく、8 質点系を 2 質点系に置換することすなわち  $1/4$  の質点数に等価置換することは誤差が大きく望ましくないことがわかる。

#### 4.6. 応答解析に関する検討

応答解析に際し，作用させた地震動は EL-CENTRO

MAY 18 1940 で、作用時間は 10 sec である。尚最大加速度は N S 方向 320.907 g, EW 方向 218.232g である。減衰マトリックスは、減衰定数が 1 次 2 次固有振動に対して夫々  $h_1 = h_2 = 0.05$  として、R. W. Clough の提案式によって計算した。応答解析結果は図 16～図 23 に示される。これらの結果より次のことがわかる。すなわち、

(1)重心の変位および回転に関して 図16 より case 2 と case 3 の変位は, case 1 の変位に比して x 方向で夫々 1.13~1.61倍, 1.42~1.45倍となっており, y 方向で夫々 1.28~1.31倍, 2.23~2.43倍, また回転角において 1.5~1.7倍, 1.7~1.86倍となっている。次に

(2) 重心のせん断力および回転モーメントに関しては図 17 より case 2 と case 3 におけるせん断力は、case 1 のそれに比べ x 方向で 2.2~3.15 倍、1.62~2.47 倍となっており y 方向で 1.30~1.94 倍、2.50~5.65 倍、また回転モーメントにおいて 1.28~2.03 倍、1.62~2.50 倍となっている。

表7. 固有円振動数及び固有周期

<div> <div>ケース</div> <div>次数</div> </div>		固有円振動数 (1/sec)			固有周期 (sec)		
		Case 1	Case 2	Case 3	Case 1	Case 2	Case 3
1	次	5.8412	5.8085	5.6411	1.0757	1.0817	1.1138
2	次	9.0639	8.9381	7.7839	0.6932	0.7030	0.8072
3	次	14.9885	14.4913	11.9001	0.4192	0.4336	0.5280
4	次	15.2170	14.9874	14.3340	0.4129	0.4192	0.4383
5	次	31.5820	28.8551	26.8527	0.1989	0.2177	0.2340
6	次	33.9757	32.4302	54.6541	0.1849	0.1937	0.1150

注：ここでは6次までを掲げる。

表8. 固有ベクトル

[illegible]

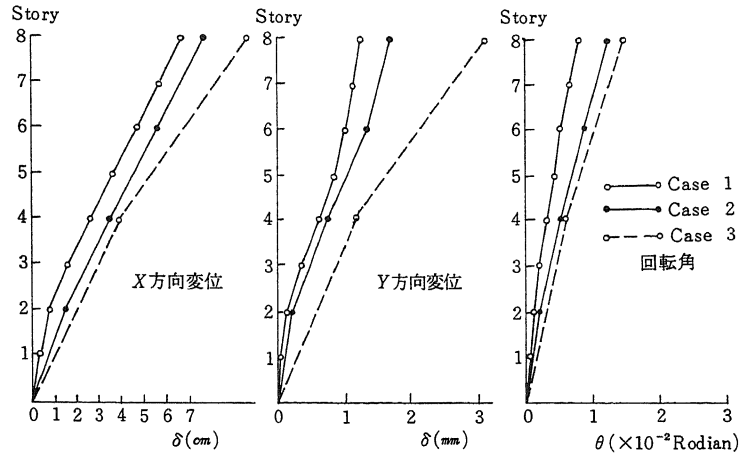


図16. 重心の変位および回転角

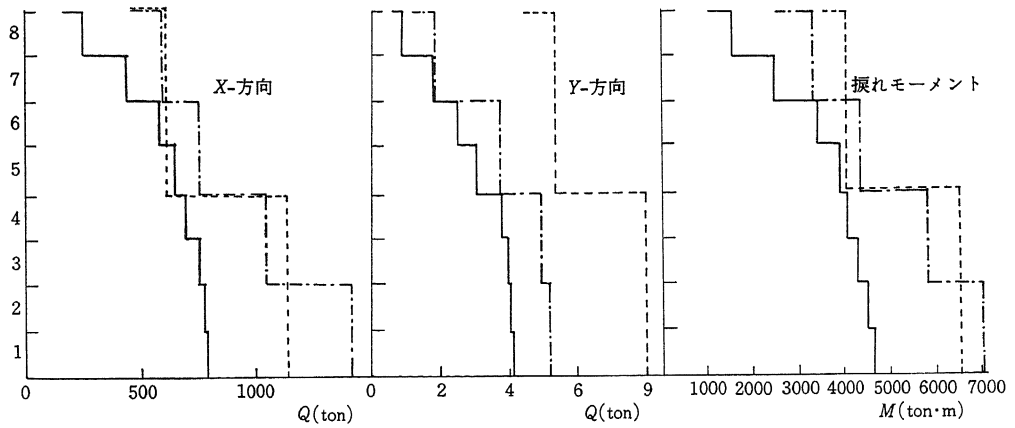


図17. 重心の最大せん断力および最大モーメント

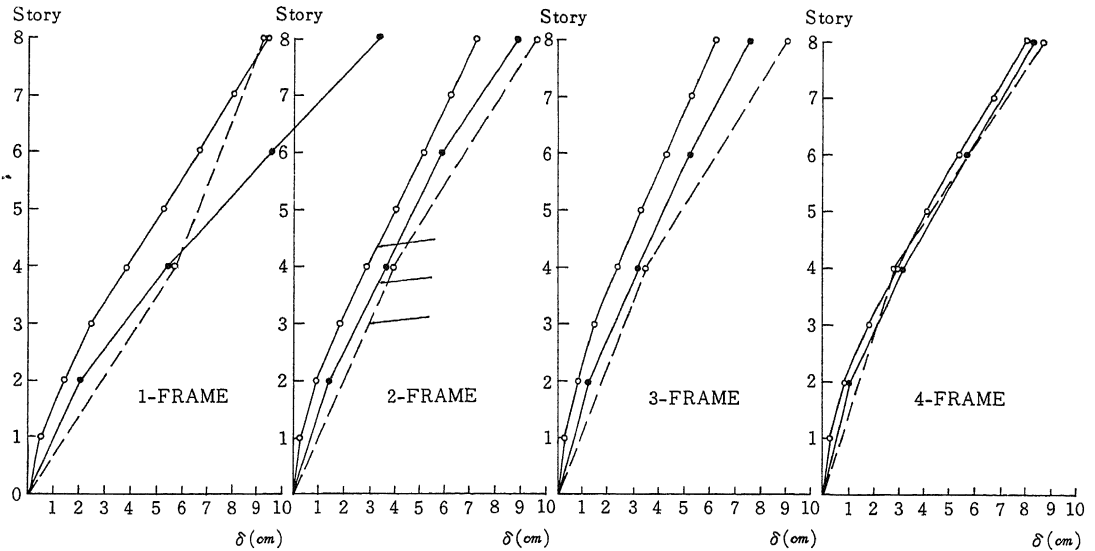


図18. x方向フレームの最大変位

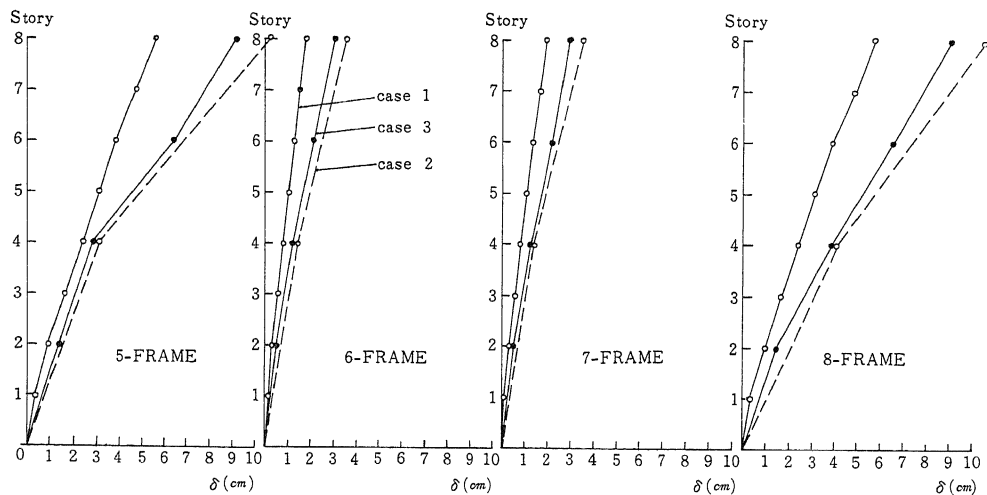


図19. Y方向フレームの最大変位

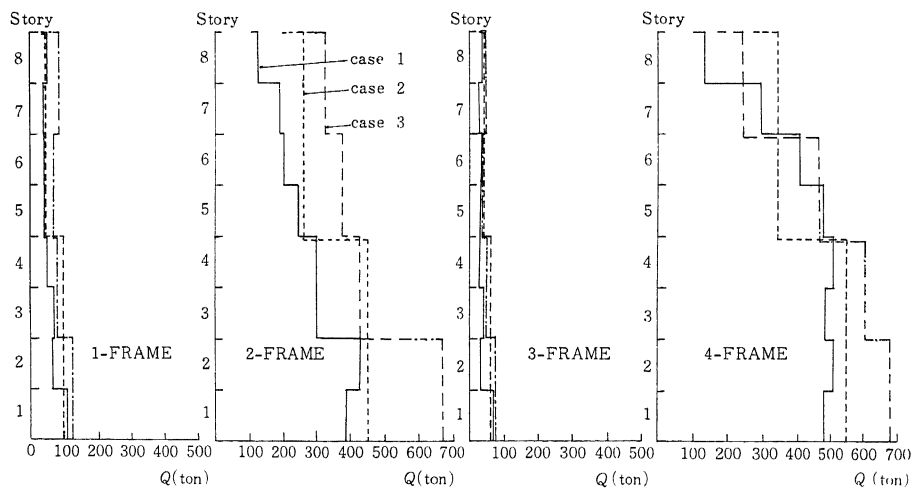


図20. X方向フレームの最大せん断力

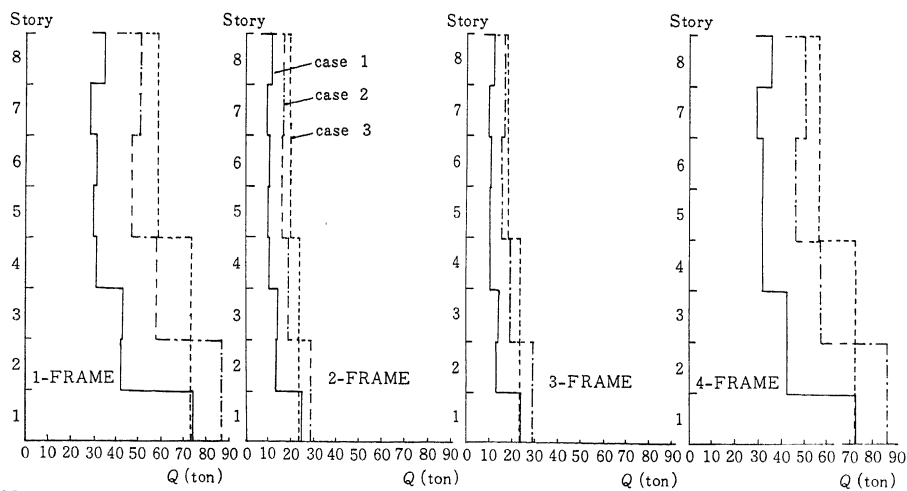


図21. Y方向フレームの最大せん断力

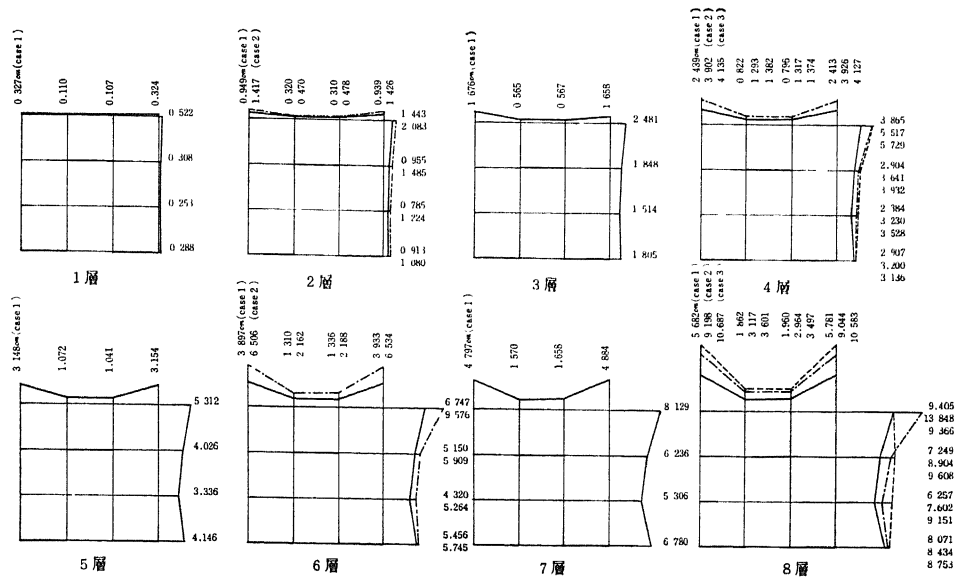


図22 各架構の変位

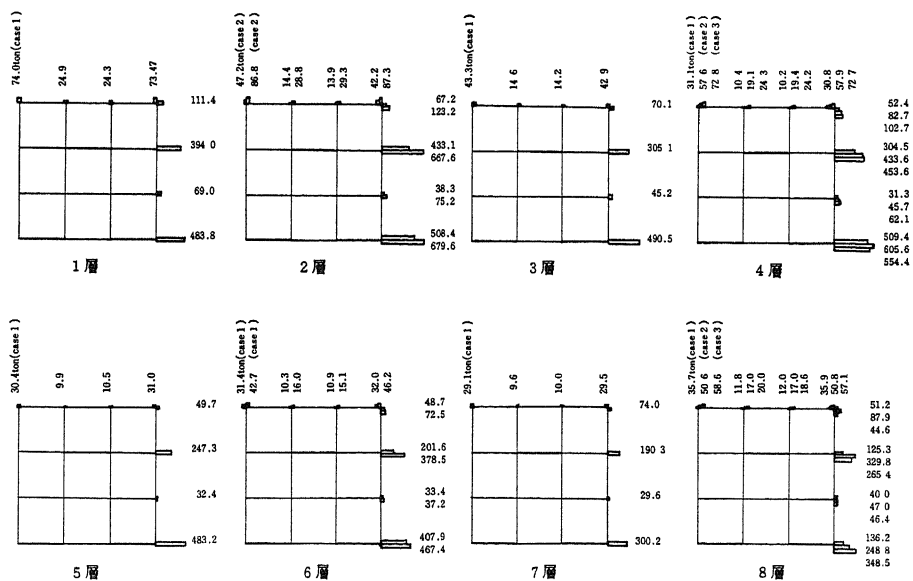


図23 各架構のせん断力

以上に示したように、高層の原振動モデルをより低層の振動モデルに等価置換して行なった振れ応答解析の結果 (case 2, case 3) は、原振動モデルの振れ応答解析の結果に比べ、いずれの場合も応答量が大きく (安全側) でている。また上記のように誤差を生ずるのは、原振動モデルを低層に置換した場合、高次振動形の影響が無視されてしまうということと、剛性マトリックス Reductionの方法に問題があるという2つの原因が考えられる。ところで、今回行なった解析例は、8層の振動モデルを4層、2層の振動モデルに置換したのであるから、4層の場合は5次以上の振動形が、2層の場合は3次以上の振動形が無視されていることになる。しかし例えば、32層の振動モデルを今回と同じ割合で、すなわち原振動モデルの2層分を1層に置換および4層分を1層に置換すれば置換された振動モデルは16層および8層となるため、夫々16次、8次までの振動形が考慮されることになる。そこで原振動モデルの何層分かをまとめて、置換された振動モデルの1層とする割合が同じ場合、原振動モデルの層数が多ければ多い程、前者の問題による誤差は減少すると考えられる。また本研究における剛性マトリックスのReductionの方法は、各架構の剛性マトリックスをReductionするという、いわば平面解析における等価置換の方法にもとづくものであり、高層の振り剛性を低層に正しくReductionすることに問題があるようである。そこで振れ応答解析において剛性マトリックスをReductionするには、(8)式で示される全体剛性マトリックスを直接Reductionすることを今後の研究課題としたい。

尚、各フレームの最大変位、最大せん断力は図18～図23に示した。図より各フレームの変形状況およびせん断力の負担割合が明らかであろう。

## 5. 結論

以上の諸検討事項から次のような結果が明らかとなった。すなわち、

(1) 本研究において開発された TRAS プログラムによれば、任意平面形状を有する高層構造物の振れ応答挙動を完全に追求することが可能である。

(2) 地震動が全く任意の方向から作用する場合でも、構造物の振れ応答解析が可能であると同時に、地震動の入

力方向の相違にもとづく最大応答値を算出するためには、最初に設定した構造物における任意の直交軸に関する全体剛性マトリックスを用いれば、地震動の入力を座標変換するだけで充分である。

(3) 多層構造物をこれと等価な低層構造物に置換して応答解析した場合、本研究で提案した等価置換法では両者の応答結果が必ず一致するとはいえず、なお改良の余地がある。

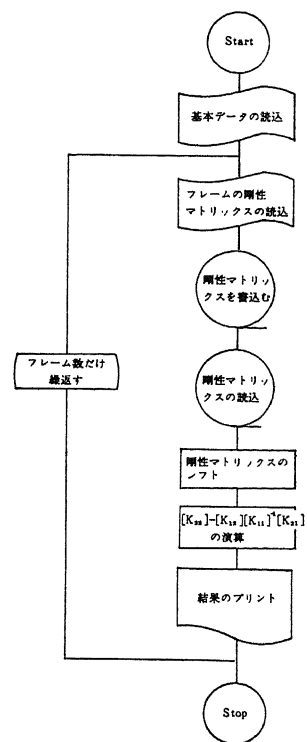
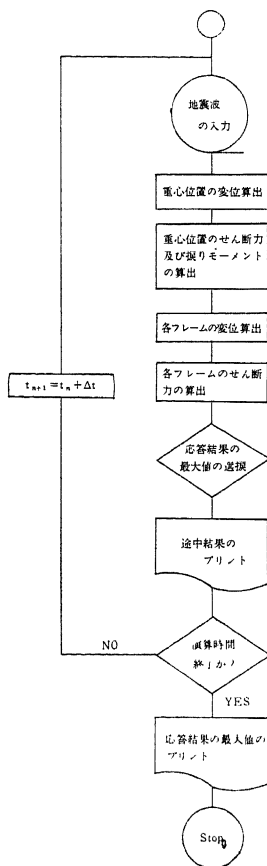
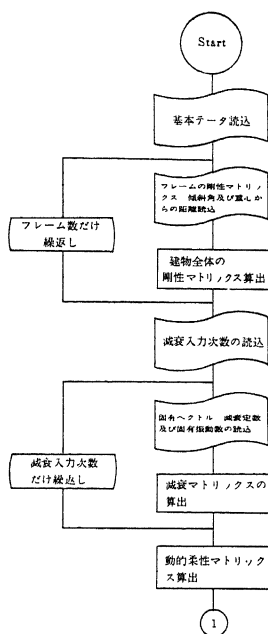
(4) 多層構造物をこれと等価な低層構造物に置換するには、振れ応答解析用の全体剛性マトリックスを直接Reductionする方が、応答解析上より効果的と考えられる。これは今後の研究により確認したい。

(昭和46年11月30日 受付)

## 参考文献

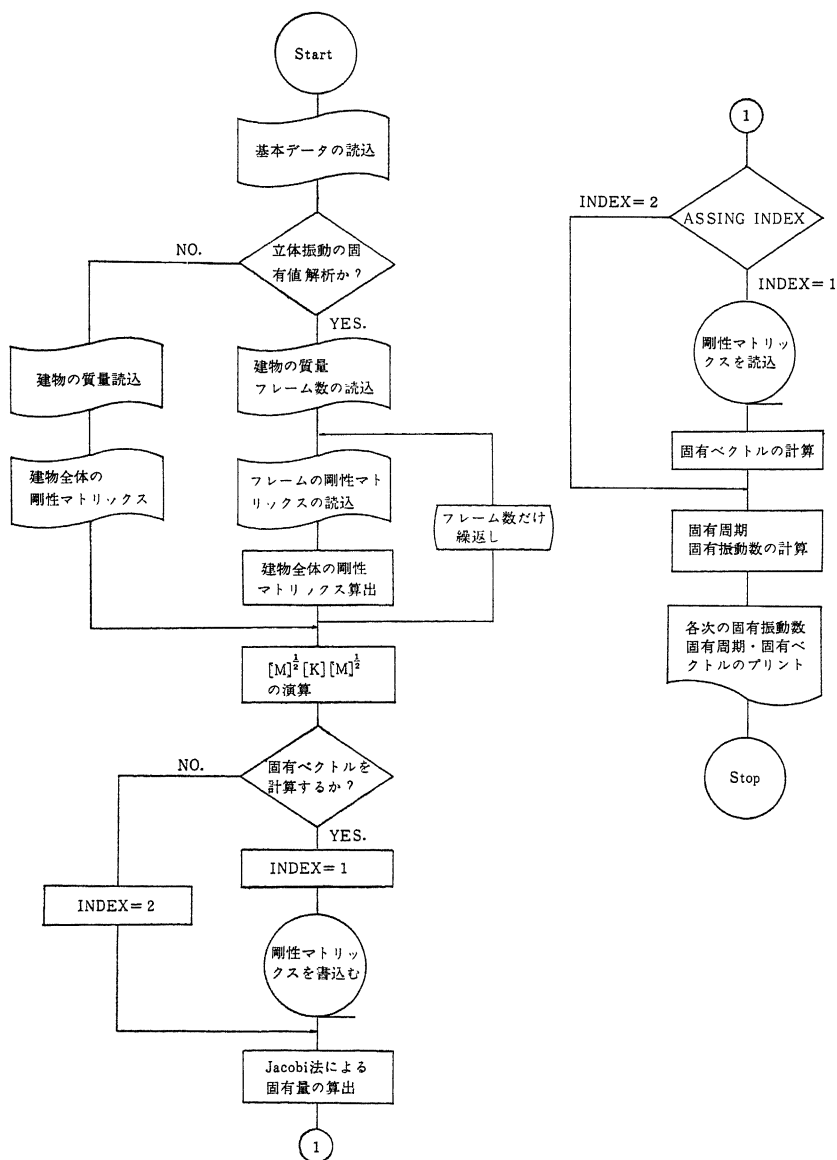
- 1) G. V. Berg.: The Analysis of Structural Response to Earthquake Forces; *The University of Michigan, Industry Program of the College of Engineering*, May, 1958.
- 2) T. K. Caughy: Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic System; *Journal of Applied Mechanics*, June, 1960.
- 3) R. W. Clough: Analysis of Structural Vibrations and Dynamic Response; *Japan U.S. Seminar on Matrix Method of Structural Analysis and Design*, August, 1969, Tokyo.
- 4) 小高昭夫; 耐震構造の総合研究〔I〕; 宇野書店刊, 6, 1964.
- 5) 武藤清; 耐震設計シリーズ4., 構造物の動的解析, 丸善, 5, 1966.
- 6) 小高昭夫, 堀江文雄; 耐震壁を有する多層架構の地震応答解析, (8層建物における曲げせん断系とせん断系の比較); 日本建築学会関東支部第39回学術研究発表会, 6, 1968.
- 7) 小高昭夫, 堀江文雄; 耐震壁を含む多層構造物の地震応答 (その1 せん断振動型の多質点と多層フレーム系との比較); 日本建築学会関東支部第37回研究発表会, 6, 1966.





## Appendix 1. 任意平面形を有する架構の振れ地震応答解析のブロックチャート

## Appendix 2. 剛性マトリックスのReductionのプログラムブロックチャート



Appendix 3. 振れを有する架構の固有値解析 (Jacobi法) のブロックチャート