湯川型相互作用の Klein-Gordon 方程式について

福　田　　勇*

On the Yukawa-coupled Klein-Gordon Equations

Isamu Fukuda

Synopsis: Various studies have been established which are concerned with the stability and "blow up" of solutions of the Cauchy problem or initial-boundary value problem for semilinear partial differential equations.

In this paper, we discuss the stability and "blow up" of the classical solution of the initial-boundary value problem for the Yukawa-coupled Klein-Gordon equations.

要旨： 半線形偏微分方程式の初期値問題あるいは初期値―境界値問題の解の安定性と Blow-Up（爆発）に関する研究は，現在まで数多く成されている。本稿では，湯川型相互作用をする Klein-Gordon 方程式系の初期値―境界値問題の解の安定性と Blow-Up について考察する。

1. 序

あるクラスの半線形偏微分方程式の初期値問題，あるいは初期値―境界値問題の解は，初期値の大きさに依存して，時間に関し大域的に存在したり，有限時間内に，Blow-Up（爆発）する。（〔5〕，〔6〕，〔7〕，〔11〕参照）

本稿では，湯川型相互作用と呼ばれる次のような二次の非線形結合項をもつ Klein-Gordon 方程式系についてその解の安定性及び Blow-Up について考察する。

(1.1)　$(\partial^2/\partial t^2-\Delta+M^2)\psi(t,x)=g\psi(t,x)\phi(t,x)$,

(1.2)　$(\partial^2/\partial t^2-\Delta+m^2)\phi(t,x)=g|\psi(t,x)|^2$

$(t\in R^1,\ x\in R^n)$.

ここで，$\psi(t,x)$ は複素数値関数，$\phi(t,x)$ は実数値関数とする。物理的には，$\psi(t,x)$ が核子場，$\phi(t,x)$ が中間子場を表わしており，(1.1)―(1.2)はこれらの相互作用をモデル化したものである。式中に現われる M, m は各々核子，中間子の質量を表わす正定数であり，g は結合定数 Δ は n 次元ラプラシアンである。

この種の方程式の研究は今迄に Chadam, Glassey によって Dirac-Klein-Gordon 方程式あるいは Maxwell-Dirac 方程式について成されている。（〔1〕，〔2〕）また筆者等による Klein-Gordon-Schrödinger 方程式の研究においてもその解の大域的な存在と一意性及び解の滑らかさ，Soliton 解の存在等の結果が得られている。（〔3〕，〔4〕）

以後，次のような初期値―境界値問題を考える。Ω を R^n 内の有界領域，その境界 $\partial\Omega$ は十分滑らかなものと仮定し，方程式系(1.1)―(1.2)の初期値と境界値を次のように与える。

$$(1.3)\quad \begin{cases} \psi(0,x)=\psi_0(x) & x\in\Omega, \\ \psi_t(0,x)=\psi_1(x) & x\in\Omega, \\ \phi(0,x)=\phi_0(x) & x\in\Omega, \\ \phi_t(0,x)=\phi_1(x) & x\in\Omega, \end{cases}$$

(1.4)　$\psi(t,x)=\phi(t,x)=0$　　$x\in\partial\Omega,\ t>0$.

$(\psi_t(0,x)=\partial\psi/\partial t(0,x),\ \ \phi_t(0,x)=\partial\phi/\partial t(0,x))$.

以下，第2節では使用する関数空間等の記号の説明，及びより基本的ないくつかの補題を掲げ，更に方程式系(1.1)―(1.4)の古典解の定義を与える。第3節で，方程式系(1.1)―(1.4)の解の安定性を Potential Well の方法を用いて示し，第4節ではその解の Blow-Up について述べる。

全体を通じての参考文献として〔8〕をあげておく。

2. 記号と定義

Ω を n 次元ユークリッド空間 R^n の領域，$1\le p\le\infty$ とする。通常のように Ω で絶対値の p 乗がルベーグ可積分であるような関数の全体を $L^p(\Omega)$ と表わす。

本稿では，記号の繁雑さを避けるために特に混同の恐れのない時は複素数値関数全体の空間と実数値関数全体の空間は同じ記号を用いることにする。

上記の $L^p(\Omega)$ で $p=\infty$ のときは Ω で本質的に有界な可測関数の全体になる。$L^p(\Omega)$ の関数 u のノルムを $|u|_p$ で表わす。

* 数学教室　講師
Instructor, Department of Mathematics.

$$|u|_p=\left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{1/p}, \quad 1\le p<\infty,$$
$$|u|_\infty=\operatorname*{ess.sup.}_{x\in\Omega}|u(x)|.$$

特に $p=2$ の場合はヒルベルト空間になり，そこには次の内積が入る。

$$(u,v)=\int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx, \quad u,v\in L^2(\Omega).$$

ここで $\overline{v(x)}$ は $v(x)$ の複素共役である。また，ノルムは $|u|_2$ であるが以後 $|u|_2=\|u\|$ で表わすことにする。

m を自然数として，Ω で定義されその m 階までの超関数の意味での微分が $L^2(\Omega)$ に属する関数の全体を $H^m(\Omega)$ とすると $H^m(\Omega)$ はヒルベルト空間になりその内積とノルムは次で与えられる。

$$(u,v)_m=\sum_{|j|\le m}\int_\Omega D^j u(x)\overline{D^j v(x)}\,dx$$
$$\|u\|_m=(u,u)_m^{1/2}$$

ここに $j=(j_1,j_2,\ ,j_n)$ は n 個の非負整数の組，$|j|=j_1+\cdot\cdot+j_n$，$D^j=(\partial/\partial x_1)^{j_1}(\partial/\partial x_2)^{j_2}\cdot(\partial/\partial x_n)^{j_n}$ である。

Ω で m 回連続微分可能な関数全体を $C^m(\Omega)$，その中で台が Ω でコンパクトであるものの全体を $C_0^m(\Omega)$ で表わす。$m=\infty$ のときの $C^\infty(\Omega)$ は無限回連続微分可能な関数全体，台が Ω でコンパクトなもの全体を $C_0^\infty(\Omega)$ とする。$C_0^\infty(\Omega)$ の $H^m(\Omega)$ での閉包を $H_0^m(\Omega)$ で表わす。

第3節以下で考える方程式系(1.1)—(1.4)の解はすべて局所古典解とする。即ち，初期値によって定まるある正数 T_0 に対して，$\psi(t,x)$, $\phi(t,x)$ が次の条件を満たしているものである。

(i) $\psi(t,x)$, $\phi(t,x)$ は $[0,T_0)\times\Omega$ で定義された t と x に関する2回連続的微分可能な関数である。

(ii) $\psi(t,x),\phi(t,x)$ は方程式系(1.1)—(1.2)を満たし，$t=0$ で(1.3)を，$t>0$, $x\in\partial\Omega$ で(1.4)を満たす。

次にソボレフの補題とポアンカレの補題を述べる。これらはともに解析学では重要な役割りをなすもので，証明は例えば〔9〕,〔10〕,〔12〕を参照されたい。ここでは本稿に必要な部分だけを述べるにとどめる。

補題 1.1 (ソボレフ)

m を自然数，Ω を R^n 内の滑らかな境界をもった領域とする。このとき，

(1) $2m<n$ ならば，

$$H_0^m(\Omega)\subset L^q(\Omega), \quad q=2n/(n-2m).$$

で

$$|u|_q\le C_1\|u\|_m$$

が成り立つ。C_1 は m と n にのみ従属する定数である。

(2) $2m>n$ ならば，

$$H_0^m(\Omega)\subset C^k(\Omega),$$

(k は $k<m-n/2$ をみたす非負整数)

で

$$\sum_{|j|\le k}\sup_{x\in\Omega}|D^j u(x)| \quad \le C_2\|u\|_m$$

が成り立つ。C_2 は m,n,k にのみ依存する定数である。

補題 1.2 (ポアンカレ)

Ω を R^n 内の有界領域とし，$d=\text{diameter}(\Omega)$ 即ち，$d=\sup_{x,y\in\Omega}\text{dis}(x,y)$ とする。そのとき任意の $u\in H_0^1(\Omega)$ に対して，

$$\|u\|\le(d/\sqrt{2})\|\partial u/\partial x_i\| \qquad (i=1,2,.\ ,n)$$

が成り立つ。

3. 解の安定性

この章では，方程式系(1.1)—(1.4)の解の安定性，即ち初期値としてある stable set の中の関数をとると対応する解は時間 t がいくら大きくなってもその stable set に属するという事実を示す。

後述の如くこの方程式系は保存則を有するけれども，それは正定値ではない。このような系は一般に時間 t に関する大域的な解の存在を示すことは難しい。従って，初期値にある制限を加えることによってその解の安定性や次節で述べる解の Blow-Up 等の議論が生じてくるのである。

まず方程式系(1.1)—(1.4)の解が満たす保存則の存在を証明しよう。

補題 3.1

ψ,ϕ を方程式系(1.1)—(1.4) の古典解とすると，次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}(3.1)\quad &\|\psi_t(t)\|^2+\|\nabla\psi(t)\|^2+M^2\|\psi(t)\|^2\\&+\tfrac{1}{2}\|\phi_t(t)\|^2+\tfrac{1}{2}\|\nabla\phi(t)\|^2+m^2/2\|\phi(t)\|^2\\&-g\int_\Omega|\psi(t,x)|^2\phi(t,x)dx\\=&\|\psi_1\|^2+\|\nabla\psi_0\|^2+M^2\|\psi_0\|^2\\&+\tfrac{1}{2}\|\phi_1\|^2+\tfrac{1}{2}\|\nabla\phi_0\|^2+m^2/2\|\phi_0\|^2\\&-g\int_\Omega|\psi_0(x)|^2\phi_0(x)dx.\end{aligned}$$

ここに 記号 ∇ は

$$\|\nabla\psi\|^2=\int_\Omega\sum_{i=1}^n(\partial\psi/\partial x_i(x))^2dx$$

を表わす。

(証 明)

(1.1) に $\overline{\psi_t(t,x)}$ をかけて Ω 上で積分し，部分積分を行うと，

$$\begin{aligned}(3.2)\quad &(\psi_{tt}(t),\psi_t(t))+(\nabla\psi(t),\nabla\psi_t(t))\\&+M^2(\psi(t),\psi_t(t))\\=&g\int\psi(t,x)\phi(t,x)\overline{\psi_t(t,x)}dx\end{aligned}$$

となる。また(1.1)の共役な式に $\psi_t(t,x)$ をかけると同様にして

$$(3.3)\quad (\psi_t(t),\ \psi_{tt}(t))+(\nabla\psi_t(t),\ \nabla\psi(t))+M^2(\psi_t(t),\ \psi(t))=g\int_\Omega\psi_t(t,\ x)\phi(t,\ x)\overline{\psi(t,\ x)}dx$$

が求まる。(1.2) 式に $\phi_t(t,x)$ をかけ，同様の手続きで

$$(3.4)\quad (\phi_{tt}(t),\ \phi_t(t))+(\nabla\phi(t),\ \nabla\phi_t(t))+m^2(\phi(t),\ \phi_t(t))=g\int_\Omega|\psi(t,\ x)|^2\phi_t(t,\ x)dx$$

となる。ここで,

$$(d/dt)\left\{\int_\Omega|\psi(t,x)|^2\phi(t,x)dx\right\}=\int_\Omega|\psi(t,x)|^2\phi_t(t,x)dx+\int_\Omega\psi(t,\ x)\overline{\psi_t(t,\ x)}\phi(t,\ x)dx+\int_\Omega\psi_t(t,\ x)\overline{\psi(t,\ x)}\phi(t,\ x)dx$$

なる関係を用いると，(3.2) (3.3) (3.4) の三式を加えることによって

$$(d/dt)\{\|\psi_t(t)\|^2+\|\nabla\psi(t)\|^2+M^2\|\psi(t)\|^2+\tfrac{1}{2}\|\phi_t(t)\|^2+\tfrac{1}{2}\|\nabla\phi(t)\|^2+m^2/2\|\phi(t)\|^2-g\int_\Omega|\psi(t,\ x)|^2\phi(t,\ x)dx\}=0$$

なる式を得る。この式から補題の (3.1) 式はただちに証明される。

q. e. d.

以下 (3.1) 式の左辺を $I(t)$ と書くことにする。

次に stable set $\mathscr{W}$ を定義しよう。まず最初に $J(\psi,\phi)$ なる $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ から R^1 への写像を次のように定義する。

$$J(\psi,\ \phi)=\|\nabla\psi(t)\|^2+\tfrac{1}{2}\|\nabla\phi(t)\|^2-g\int_\Omega|\psi(t,\ x)|^2\phi(t,\ x)dx$$

(任意の $t\in[0,\mathrm{T}]$ に対して $\psi(t),\phi(t)\in\mathrm{H}_0^1(\Omega)$)。

更に正の実数 λ に対して $J(\lambda\psi,\ \lambda\phi)$ を考え,

$$d=\inf_{\substack{\psi\in H_0^1(\Omega),\\ \phi\in H_0^1(\Omega),\\ \psi,\phi\neq 0}}\ \sup_{\lambda>0}J(\lambda\psi,\ \lambda\phi)$$

として d を定めると，次の補題が成立する。

補題 3.2

R^n の次元 n を $2<n\leqslant 6$ とすると，$d>0$ である。

(証　明)

まず $J(\lambda\psi,\ \lambda\phi)=\lambda^2a(\psi,\ \phi)-\lambda^3b(\psi,\ \phi)$ とおく。

但し,

$$a(\psi,\ \phi)=\|\nabla\psi(t)\|^2+\tfrac{1}{2}\|\nabla\phi(t)\|^2,$$

$$b(\psi,\ \phi)=g\int|\psi(t,\ x)|^2\phi(t,\ x)dx\ .$$

である。

$J(\lambda\psi,\ \lambda\phi)$ は λ に関する三次式になる。

ここで $b(\psi,\ \phi)<0$ の場合には明らかに,

$$\sup_{\lambda>0}J(\lambda\psi,\ \lambda\phi)=+\infty$$

となり，また $b(\psi,\ \phi)>0$ の場合には

$$\begin{aligned}&\sup_{\lambda>0}J(\lambda\psi,\ \lambda\phi)\\&=J([2a(\psi,\phi)/3b(\psi,\phi)]\psi,\ [2a(\psi,\ \phi)/3b(\psi,\ \phi)]\phi)\\&=2^2(a(\psi,\ \phi))^3/3^3(b(\psi,\ \phi))^2\end{aligned}$$

となる。そこで，補題 (1.1), (1.2) 及びヘルダーの不等式を用いて，次の評価を得る。

$$\begin{aligned}(b(\psi,\ \phi))^2&=g^2\left(\int_\Omega|\psi(t,\ x)|^2\phi(t,\ x)dx\right)^2\\&\leqslant g^2\left\{\left(\int_\Omega|\psi(t,\ x)|^{2p}dx\right)^{2/p}\left(\int_\Omega\phi(t,\ x)^q dx\right)^{2/q}\right\}\\&\leqslant g^2\{|\psi(t)|_{2p}^{4/3}|\phi(t)|_q^{2/3}\}^3\\&\leqslant g^2\{\tfrac{2}{3}|\psi(t)|_{2p}^2+\tfrac{1}{3}|\phi(t)|_q^2\}^3\\&\leqslant(\tfrac{2}{3})^3g^2\{\|\psi(t)\|_1^2+\tfrac{1}{2}\|\phi(t)\|_1^2\}^3\\&\leqslant(\tfrac{2}{3})^3g^2\{C\|\nabla\psi(t)\|^2+\tfrac{1}{2}C'\|\nabla\phi(t)\|^2\}^3\\&\leqslant C_1(a(\psi,\ \phi))^3\end{aligned}$$

但し，評価の中で使用した p,q は $p\leqslant n/(n-2)$, $q\leqslant 2n/(n-2)$ として選び C_1 は領域 Ω にのみ依存する定数となる。

従って

$$2^2(a(\psi,\ \phi))^3/3^3(b(\psi,\ \phi))^2\geq 2^2/(3^3C_1)>0\ .$$

以上のことより，$d>0$ がわかる。

q. e. d.

そこで stable set $\mathscr{W}$ をこの d を使って次のように定義する。

$$\mathscr{W}=\{\psi,\ \phi\in H_0^1(\Omega):0\leqslant J(\lambda\psi,\ \lambda\phi)<d,\ \forall\lambda\in[0,1]\}$$

ここで $\mathscr{W}\neq\phi$ なることは補題(3.2)より保証される。

stable set $\mathscr{W}$ に関する次の補題を掲げる。

補題 3.3

$$\mathscr{W}^*=\{\psi,\ \phi\in H_0^1(\Omega):0<J(\psi,\ \phi)<d,\ 2\|\nabla\psi(t)\|^2+\|\nabla\phi(t)\|^2-3g\int_\Omega|\psi(t,\ x)|^2\phi(t,\ x)dx>0\}$$

として $\mathscr{W}^*$ を定義すると

$$\mathscr{W}=\mathscr{W}^*\cup\{0\}$$

が成り立つ。

(証　明)

まず $\mathscr{W}\subset\mathscr{W}^*\cup\{0\}$ を示す。$\psi,\phi\in\mathscr{W},\phi,\psi\neq 0$ とすると，$b(\psi,\phi)<0$, 即ち $-g\int_\Omega|\psi(t,x)|^2\phi(t,x)\ dx>0$ ならば $\psi,\phi\in\mathscr{W}^*$ となることは容易にわかる。また，$b(\psi,\phi)>0$ ならば

$$\sup_{\lambda>0}J(\lambda\psi,\ \lambda\phi)=J(\lambda_1\psi,\ \lambda_1\phi)$$

とすると，$J(\lambda\psi, \lambda\phi)<d$ ということは $\lambda_1>1$ と同値である。ここで

$$\lambda_1=2a(\psi, \phi)/3b(\psi, \phi)$$

だから $2a(\psi, \phi)>3b(\psi, \phi)$ 即ち $\psi, \phi\in\mathscr{W}^*$ であることがわかる。

次に $\mathscr{W}^*\cup\{0\}\subset\mathscr{W}$ を示す。$\psi, \phi\in\mathscr{W}^*$ とすると，$b(\psi, \phi)<0$ の場合には $\sup_{\lambda\in[0,1]} J(\lambda\psi, \lambda\phi)=J(\psi, \phi)<d$ となり，$\psi, \phi\in\mathscr{W}$ が示される。一方 $b(\psi, \phi)>0$ ならば $\lambda_1>1$ より $J(\lambda\psi, \lambda\phi)$ は $\lambda\in[0,1]$ で単調増加になり，$\sup_{\lambda\in[0,1]} J(\lambda\psi, \lambda\phi)=J(\psi, \phi)<d$，従って $\psi, \phi\in\mathscr{W}$ となる。

q.e.d.

以上の準備のもとで，次の定理を得る。

定理 3.4

R^n の次元 n を $2<n\leqslant6$ とし，方程式系(1.1)―(1.4)が，古典解 ψ, ϕ をもつものとする。

初期値 $\psi_0, \phi_0, \psi_1, \phi_1$ が下式を満たしていて，ψ_0, ϕ_0 が先に定義した $\mathscr{W}$ に属していれば，対応する解 ψ, ϕ も任意の時刻 $t\in[0, \infty]$ で $\mathscr{W}$ に属する。

$$\|\psi_1\|^2+M^2\|\psi_0\|^2+\tfrac{1}{2}\|\phi_1\|^2+\tfrac{1}{2}m^2\|\phi_0\|^2+J(\psi_0, \phi_0)<d. \tag{3.5}$$

(証　明)

局所古典解 $\psi(t,x)$，$\phi(t,x)$ の存在する区間 $[0, T)$ の上限を $[0, T_1)$ とする。以下 $T_1<\infty$ と仮定して矛盾を導く。

まず最初に，$t\in[0, T_1-\varepsilon]$ で $\psi(t)$，$\phi(t)\in\mathscr{W}$ となることを示そう。但し ε は任意の正定数である。

もし，$\psi(t), \phi(t)$ の一方が最初に $\mathscr{W}$ でなくなる時刻を t^* と仮定する。$\psi(t), \phi(t)$ の連続性から $\psi(t^*)\in\partial\mathscr{W}$，もしくは $\phi(t^*)\in\partial\mathscr{W}$ である。補題3.3より $\mathscr{W}=\mathscr{W}^*\cup\{0\}$ だから，

$$J(\psi(t^*)), \phi(t^*))=d \tag{3.6}$$

あるいは

$$2\|\nabla\psi(t^*)\|^2+\|\nabla\phi(t^*)\|^2-3g\int_\Omega|\psi(t^*, x)|^2\phi(t^*, x)dx=0 \tag{3.7}$$

が時刻 t^* で成り立つ。

一方，補題3.1より

$$J(\psi(t^*), \phi(t^*))\leqslant J(\psi_0, \phi_0)+\|\psi_1\|^2+\tfrac{1}{2}\|\phi_1\|^2+m^2/2\|\phi_0\|^2+M^2\|\psi_0\|^2 \tag{3.8}$$

が成立する。ここで仮定より(3.8)の右辺は d より小さい。従って(3.6)に反する。また(3.7)が成立していれば，$\lambda_1=3b(\psi, \phi)/2a(\psi, \phi)=1$ より

$$J(\psi(t^*), \phi(t^*))=J(\lambda_1\psi(t^*), \lambda_1\phi(t^*))\geq d$$

よって矛盾が導かれたことになる。

以上のことより，任意の時刻 $t\in[0, T_1-\varepsilon]$ で $\psi(t)$，$\phi(t)$ はともに $\mathscr{W}$ に属することがわかる。

ここで，補題3.1より

$g\int_\Omega|\psi(t, x)|^2\phi(t, x)dx<0$ ならば

$$\|\psi_t(t)\|^2+\|\nabla\psi(t)\|^2+M^2\|\psi(t)\|^2+\tfrac{1}{2}\|\phi_t(t)\|^2+\tfrac{1}{2}\|\nabla\phi(t)\|^2+\tfrac{1}{2}m\|\phi(t)\|^2\leq I(0).$$

また $g\int_\Omega|\psi(t, x)|^2\phi(t, x)dx>0$ ならば　補題(3.3)より

$$g\int_\Omega|\psi(t, x)|^2\phi(t, x)dx<\tfrac{2}{3}\|\nabla\psi(t)\|^2+\tfrac{1}{3}\|\nabla\phi(t)\|^2.$$

従って

$$I(0)=I(t)>\|\psi_t(t)\|^2+\tfrac{1}{3}\|\nabla\psi(t)\|^2+M^2\|\psi(t)\|^2+\tfrac{1}{2}\|\phi_t(t)\|^2+\tfrac{1}{6}\|\nabla\phi(t)\|^2+\tfrac{1}{2}m^2\|\phi(t)\|^2$$

が成り立つ。

従って，このとき $\psi(T_1-\varepsilon)$，$\phi(T_1-\varepsilon)$ を初期値として解を $t\in[T_1-\varepsilon, T_2]$ に延長することができる。これは，T_1 を解の存在する範囲の上限と定めたことに矛盾する。故に $T_1=\infty$ となり，$\psi(t), \phi(t)$ は $t\in[0, \infty)$ で $\mathscr{W}$ に属することがわかる。

q.e.d.

4.　解の Blow-Up

解の Blow-Up (爆発) とは，方程式系(1.1)―(1.4)の解が有限時刻 T_0 においてある意味で無限大になることをいう。

まず，ψ, ϕ を方程式系(1.1)―(1.4)の古典解とする。前節の補題(3.1)より $I(t)=I(0)$，従って次の補題が成立する。

補題 4.1

ψ, ϕ を方程式系(1.1)―(1.4)の古典解とすると次式が成立する。

$$(d^2/dt^2)(\|\psi(t)\|^2+\tfrac{1}{2}\|\phi(t)\|^2)\geq5\|\psi_t(t)\|^2+\tfrac{5}{3}\|\phi_t(t)\|^2-3I(0). \tag{4.1}$$

(証　明)

$$\begin{aligned}K(t)&=(d^2/dt^2)(\|\psi(t)\|^2+\tfrac{1}{2}\|\phi(t)\|^2)\\&=(d/dt)\{(\psi_t(t), \psi(t))+(\psi(t), \psi_t(t))+(\phi(t), \phi_t(t))\}\\&=2\|\psi_t(t)\|^2+(\psi_{tt}(t), \psi(t))+(\psi(t), \psi_{tt}(t))+\|\phi_t(t)\|^2+(\phi_{tt}(t), \phi(t)).\end{aligned}$$

ここで，ψ, ϕ は方程式系(1.1)，(1.2)を満たしていることから，

$$\psi_{tt}(t)=\Delta\psi(t)-M^2\psi(t)+g\psi(t)\phi(t),$$
$$\phi_{tt}(t)=\Delta\phi(t)-m^2\phi(t)+g|\psi(t)|^2$$

である。これらを上式に代入すると，

$$K(t)=2\|\psi_t(t)\|^2+(\Delta\psi(t),\psi(t))-M^2(\psi(t),\psi(t))$$
$$+g(\psi(t)\phi(t),\psi(t))+(\psi(t),\Delta\psi(t))$$
$$-M^2(\psi(t),\psi(t))$$
$$+g(\psi(t),\phi(t)\psi(t))+(\phi(t),\Delta\phi(t))$$
$$-m^2(\phi(t),\phi(t))$$
$$+g(\phi(t),|\psi(t)|^2)+\|\phi_t(t)\|^2$$

となる。$\phi(t)$ が実数値関数であることに注意して部分積分すると,

$$K(t)=2\|\psi_t(t)\|^2-2\|\nabla\psi(t)\|^2-2M^2\|\psi(t)\|^2$$
$$+\|\phi_t(t)\|^2-\|\nabla\phi(t)\|^2-m^2\|\phi(t)\|^2$$
$$+3g\int_\Omega|\psi(t,x)|^2\phi(t,x)dx$$

が求まり，前節の補題3.1より

$$3g\int|\psi(t,x)|^2\phi(t,x)dx=3\|\psi_t(t)\|^2+3\|\nabla\psi(t)\|^2$$
$$+3M^2\|\psi(t)\|^2+\tfrac{3}{2}\|\phi_t(t)\|^2+\tfrac{3}{2}\|\nabla\phi(t)\|^2$$
$$+\tfrac{3}{2}m^2\|\phi(t)\|^2-3I(0)$$

であるから，代入すると,

$$K(t)=5\|\psi_t(t)\|^2+\|\nabla\psi(t)\|^2+M^2\|\psi(t)\|^2$$
$$+\tfrac{5}{2}\|\phi_t(t)\|^2+\tfrac{1}{2}\|\nabla\phi(t)\|^2+\tfrac{1}{2}m^2\|\phi(t)\|^2-3I(0)$$

となる。故に $\|\nabla\psi(t)\|^2\geq 0$, $M^2\|\psi(t)\|^2\geq 0$, $\frac{1}{2}\|\nabla\phi(t)\|^2\geq 0$, $\frac{1}{2}m^2\|\phi(t)\|^2\geq 0$ より,

$$K(t)\geq 5\|\psi_t(t)\|^2+\tfrac{5}{2}\|\phi_t(t)\|^2-3I(0).$$

q.e.d.

さてここで，$I(0)\leqq 0$ となるような初期値を考えると，前補題より,

$$(4.2)\quad (d^2/dt^2)(\|\psi(t)\|^2+\tfrac{1}{2}\|\phi(t)\|^2)\geq 5\|\psi_t(t)\|^2+\tfrac{5}{2}\|\phi_t(t)\|^2$$

が成り立つ。

$$J(t)=\|\psi(t)\|^2+\tfrac{1}{2}\|\phi(t)\|^2$$

とおくと,

$$(d/dt)J(t)=(\psi_t(t),\psi(t))+(\psi(t),\psi_t(t))+(\phi(t),\phi_t(t))$$

となり，シュワルツの不等式を使うと,

$$(d/dt)J(t)\leqq 2\|\psi_t(t)\|\|\psi(t)\|+\|\phi(t)\|\|\phi_t(t)\|$$

を得る。この式と，$2ab\leqq a^2+b^2$ なる関係を用いると,

$$\{(d/dt)J(t)\}^2\leqq 4\|\psi_t(t)\|^2\|\psi(t)\|^2$$
$$+4\|\psi_t(t)\|\|\psi(t)\|\|\phi_t(t)\|\|\phi(t)\|+\|\phi_t(t)\|^2\|\phi(t)\|^2$$
$$\leqq 4\|\psi_t(t)\|^2\|\psi(t)\|^2+2\|\psi_t(t)\|^2\|\phi(t)\|^2$$
$$+2\|\psi(t)\|^2\|\phi_t(t)\|^2+\|\phi_t(t)\|^2\|\phi(t)\|^2,$$

更に

$$(4.3)\quad \tfrac{5}{4}\{(d/dt)J(t)\}^2\leqq 5\|\psi_t(t)\|^2\|\psi(t)\|^2$$
$$+\tfrac{5}{2}\|\psi_t(t)\|^2\|\phi(t)\|^2+\tfrac{5}{2}\|\psi(t)\|^2\|\phi_t(t)\|^2$$
$$+\tfrac{5}{4}\|\phi_t(t)\|^2\|\phi(t)\|^2)$$

が成り立つ。一方 (4.2) 式より

$$(4.4)\quad \{(d^2/dt^2)J(t)\}J(t)\geq(5\|\psi_t(t)\|^2+\tfrac{5}{2}\|\phi_t(t)\|^2)(\|\psi(t)\|^2+\tfrac{1}{2}\|\phi(t)\|^2)$$

なる不等式が得られる。(4.3), (4.4) 両式を比較すると

$$\{(d^2/dt^2)J(t)\}\ (J(t))\geq\tfrac{5}{4}\{(d/dt)J(t)\}^2,$$

これは，次の不等式と同値であることが容易にわかる。

$$(4.5)\qquad (d^2/dt^2)(J(t)^{-1/4})\leqq 0$$

(4.5) 式をとくと,

$$(4.6)\quad J(t)\geq(J(0))^{5/4}\{J(0)-\tfrac{1}{4}(dJ/dt(0))t\}^{-4},$$

故に，$J'(0)=dJ/dt(0)>0$ ならば,

$$t\longrightarrow 4J(0)/J'(0)$$

のとき，(4.6) 式の右辺は無限大に発散し，それにつれて $J(t)$ もまた無限大に発散する。

以上のことから，Blow-Up に関する次の定理を得る。

定理 4.2

ψ,ϕ を方程式系 (1.1)—(1.4) の古典解とする。初期値 $\psi_0,\psi_1,\phi_0.\phi_1$ が次の２つの条件：

$$I(0)=\|\psi_1\|^2+\|\nabla\psi_0\|^2+M^2\|\psi_0\|^2$$
$$+\tfrac{1}{2}\|\phi_1\|^2+\tfrac{1}{2}\|\nabla\phi_0\|^2+m^2/2\|\phi_0\|^2$$
$$-g\int_\Omega|\psi_0(x)|^2\phi_0(x)dx\leqq 0,$$
$$J'(0)=(\psi_1,\psi_0)+(\psi_0,\psi_1)+(\phi_0,\phi_1)>0$$

を満たしているならば，解 ψ,ϕ は，有限時間内に，Blow-Up する。Blow-Up 時刻 t_1 は,

$$t_1=4J(0)/J'(0)$$

である。

謝　　辞

本研究を進めるにあたって，絶えず有益なる御助言を下さいました早稲田大学教授飯野理一博士，並びに同大学助教授堤　正義博士に対し，厚く御礼申し上げます。

（昭和51年12月10日　受理）

参 考 文 献

1) J.M. Chadam: Global solutions of the Cauchy problem for the (classical) coupled Maxwell-Dirac equations in one space dimension. J. Funct. Anal., 13, 173-184 (1973).
2) J. M. Chadam and R.T. Glassey: On certain global solutions of the Cauchy problem for the (classical) coupled Klein-Gordon-Dirac equations in one and three space dimensions. Arch. Rat. Mech. Anal., 54, 223-237 (1974).
3) I. Fukuda and M. Tsutsumi: On coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations, I. Bull. Sci. Eng. Research Lab. Waseda Univ. 69, 51-62, (1975).
4) I. Fukuda and M. Tsutsumi: On the Yukawa-coupled Klein-Gordon-Schrodinger Equations in Three Space Dimensions. Proceeding of the Japan Academy, 51, 6, 402-405 (1975)
5) R.T. Glassey: Blow-Up theorem for nonlinear wave equations. Math. Z., 132, 183-203 (1973).

6) J.B. Keller: On solutions of nonlinear wave equations. Comm. Pure Appl. Math., 10, 523-530 (1957).
7) H.A. Levine: Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt}=-Au+F(u)$. Trns. Am. Math. Soc., 190, 1-21 (1974).
8) J.L. Lions: Quelques methodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. (Dunod-Gauth. Vill.) Paris (1969).
9) S.L. Sobolev: On a Theorem of Functional Analysis. Mat. Sbornik., 4, 279-282 (1938).
10) W. A. Strauss: The Energy Method in Nonlinear Partial Differential Equations. Notas de Matematica, No. 47, Instituto de Matematica pura e aplicada. (1969).
11) M. Tsutsumi: On solutions of semilinear differential equations in a Hilbert space. Math. Japonicae, 17, 173-193, (1972).
12) 溝畑 茂：偏微分方程式論．岩波書店 (1965).