ある非線型偏微分方程式系の初期値問題に対する大域古典解の非存在

福田　勇*

Nonexistence of Global Solutions of the Cauchy Problem to Some Parial Differential System

By *Isamu Fukuda**

Synopsis: In this paper, we derive conditions on the equations and data which are sufficient to guarantee the nonexistence of global solutions of Cauchy problem for the higher order coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations.

The main results are as follows: When initial data and nonlinearity are restricted, the solution ψ governed by the Schrödinger equation cannot exist for all time in the sense that $\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|_{L^2}\to+\infty$ within a finite time nevertheless $\|\psi\|_{L^2}$ is conserved, and the global solution ϕ governed by the Klein-Gordon equation cannot exist in the sense that $\|\phi\|_{L^2}\to+\infty$ within a finite time.

要旨： 本稿では高次の非線型項をもつ Klein-Gordon-Schrödinger 方程式系の初期値問題に対して大域解が存在しないための，方程式系と初期値に関する十分条件を導く。

主なる結果は次のとおりである。初期値と非線型項にある制限を加えると，Schrödinger 方程式に支配される解 ψ はその L^2 ノルムが保存しているにもかかわらず $\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|_{L^2}\to\infty(t\to T^-<\infty)$ の意味で大域解が存在しない。また Klein-Gordon 方程式に支配される解 ϕ もその L^2 ノルムが有限時間内に Blow-up（爆発）することより大域解が存在しない。

1. 序

単独の非線形偏微分方程式のある形のものについては，その初期値のとり方によって解が時間に関して大域的に存在したり，あるいは有限時間内に Blow-up するという事実がある。例えば非線型 Schrödinger 方程式の初期値問題の大域的な解の存在定理に関する Strauss の結果〔1〕や非線型波動方程式の解の Blow-up に関する Levine の結果〔2〕等がその例として上げられる。一方最近になって方程式の解そのものはある意味で有界であってもその導関数が有限時間内に発散する現象にも注目されている。

特に非線型 Schrödinger 方程式はその解の L^2 ノルムが保存しているにもかかわらず空間変数に関する一階導関数の L^2 ノルムが有限時間内で Blow-up することやその L^p ノルム $(p>2)$ が発散することが示されている。

本稿では，核子場と中間子場の相互作用の1つの古典的モデル化である高次の非線型項をもつ Schrödinger-Klein-Gordon 方程式系について，その初期値問題の解の Blow-up（正確には Schrödinger 方程式に支配される解については時間変数に関する導関数についての Blow-up）に関する部分的結果を報告する。この枠組に入らない湯川型の相互作用をする方程式系については，任意の初期値に対する大域解の存在が空間3次元で求められている。〔4〕

次の様な初期値問題を考える。

$$(1.1)\quad \left(\frac{\partial}{\partial t}-i\Delta\right)\psi(t,x)=igp|\psi(t,x)|^{2p-2}\psi(t,x)\phi(t,x)^q,$$

$$(1.2)\quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta+\mu^2\right)\phi(t,x)=gq|\psi(t,x)|^{2p}\phi(t,x)^{q-1},$$

$$(1.3)\quad \begin{cases}\psi(0,x)=\psi_0(x)\\ \phi(0,x)=\phi_0(x)\\ \phi_t(0,x)=\dfrac{\partial\phi}{\partial t}(0,x)=\phi_1(x).\end{cases}$$

ここで $\psi(t,x)$ は $[0,T)\times\boldsymbol{R}^n$ 上で定義された複素数値関数，$\phi(t,x)$ は $[0,T)\times\boldsymbol{R}^n$ 上で定義された実数値関数であり，μ は相対質量を表わす正定数，g は real

* 数学教室　講師
Instructor, Department of Mathematics

coupling constant, p, q は正整数，Δ は n 次元ラプラシアン，$i=\sqrt{-1}$ である。

$L^r(\boldsymbol{R}^n)(1\leq r<\infty)$ を $\boldsymbol{R}^n$ で定義され絶対値の r 乗がルベーグ可積分である関数全体とする。もちろん値域が実数になるか複素数になるかで $L^r(\boldsymbol{R}^n)$ を区別しなければならないが記号の繁雑さを避けるために特に混同の恐れのない時は両者の空間を同じ記号で表わすことにする。

$L^r(\boldsymbol{R}^n)$ で $r=\infty$ のときは，$\boldsymbol{R}^n$ 上で本質的に有界な可測関数全体である。$L^r(\boldsymbol{R}^n)$ に属する関数 u のノルムを $|u|_r$ で表わす。

$$|u|_r=\left(\int_{\boldsymbol{R}^n}|u(x)|^r dx\right)^{1/r}\quad(1\leq r<\infty),$$

$$|u|_\infty=\operatorname*{ess.\,sup}_{x\in\boldsymbol{R}^n}|u(x)|\quad .$$

特に $r=2$ の場合は Hilbert 空間になり次の内積が入る。

$$(u, v)=\int_{\boldsymbol{R}^n}u(x)\overline{v(x)}dx\qquad u, v\in L^2(\boldsymbol{R}^n).$$

ここで $\overline{v(x)}$ は $v(x)$ の複素共役である。またノルムは $|u|_2=\sqrt{(u, u)}$ であるが以後 $|u|_2=\|u\|$ で表わすことにする。

m を自然数として $\boldsymbol{R}^n$ で定義されその m 階までの超関数の意味での微分が $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ に属する関数全体を $H^m(\boldsymbol{R}^n)$とすると，$H^m(\boldsymbol{R}^n)$ は Hilbert 空間になりその内積とノルムは次で与えられる。

$$(u, v)_m=\sum_{|j|\leq m}\int_{\boldsymbol{R}^n}D^j u(x)D^j v(x)dx\ ,$$

$$\|u\|_m=(u, u)_m^{1/2}\qquad ,$$

$j=(j_1, j_2,\cdots, j_n)$ は n 個の非負整数の組で $|j|=j_1+j_2+\cdots+j_n$ また $D^j=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{j_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{j_2}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{j_n}$である。

次に局所古典解の定義を与えよう。

定義：ψ, ϕ が方程式系 (1.1)—(1.3) の局所古典解であるとは，十分滑らかな初期値によって定まる正数 T_0 に対して ψ, ϕ が次の条件をみたしていることである。

（1） $\psi(t, x)$ は $[0, T_0)\times\boldsymbol{R}^n$ で定義され t に関して1回連続的微内可能，x に関して2回連続的微分可能な関数，$\phi(t, x)$ は $[0, T_0)\times\boldsymbol{R}^n$ で定義され t と x に関して2回連続的微分可能な関数である。

（2） $\psi(t, x), \phi(t, x)$ は方程式系 (1, 1)−(1, 2) を $t\in(0, T_0), x\in\boldsymbol{R}^n$ でみたし，$t=0$ で (1,3) をみたしている。

特に次節以下で扱う解は，t をとめるごとに $|x|\to\infty$ で $|\psi(t, x)|, \phi(t, x)\to 0$ という性質もあわせもつような局所古典解とする。

第2節では方程式系 (1.1)−(1.3) の解の Blow-up を示し，第3節では，前号で提起した coupled Klein-Gordon 方程式系〔3〕に関する改善された結果を示す。

2. Coupled Klein-Gordon-Schrödinger 方程式

まず最初にこの方程式系 (1.1)−(1.3) の解が満たす先存則の存在を示す。以下積分は常に $\boldsymbol{R}^n$ で行うものとして，$\int_{\boldsymbol{R}^n}\cdot dx=\int\cdot dx$ と書くことにする。

補題 2.1

ψ, ϕを方程式系 (1.1)−(1.3) の古典解とすると次式が成立する。

(2.1) $\quad\|\psi(t)\|=\|\psi_0\|$

$$\begin{aligned}(2.2)\quad I(t)&=2\|\nabla\psi(t)\|^2+\|\phi_t(t)\|^2\\&\quad+\|\nabla\phi(t)\|^2+\mu^2\|\phi(t)\|^2\\&\quad-2g\int|\psi(t, x)|^{2p}\phi(t, x)^q dx\\&=2\|\nabla\psi_0\|^2+\|\phi_1\|^2+\|\nabla\phi_0\|^2+\mu^2\|\phi_0\|^2\\&\quad-2g\int|\psi_0(x)|^{2p}\phi_0(x)^q dx\\&=I(0)\end{aligned}$$

ここで記号 ∇ は $\|\nabla\psi\|^2=\int\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x)\right)^2dx$ を表わす。

（証明） 方程式 (1. 1) に $\psi(t, x)$ をかけて $\boldsymbol{R}^n$ 上で積分し部分積分を行うと，

$$\begin{aligned}(2.3)\qquad &(\psi_t(t), \psi(t))+i\|\nabla\psi(t)\|^2\\&=igp\int|\psi(t, x)|^{2p}\phi(t, x)^q dx\end{aligned}$$

となり両辺の実数部をとることによって次式を得る。

$$\mathrm{Re}(\psi_t(t), \psi(t))=0\,.$$

ここで

$$\frac{d}{dt}\|\psi(t)\|^2=2\mathrm{Re}(\psi_t(t), \psi(t))$$

より

$$\frac{d}{dt}\|\psi(t)\|^2=0$$

となり (2.1) 式を得る。

また (2.2) 式は次の三つの式より求まる。

(1.1) 式に $\overline{\psi_t(t, x)}$ をかけて $\boldsymbol{R}^n$ 上で積分し部分積分を行うと，

$$\begin{aligned}&(\psi_t(t), \psi_t(t))+i(\nabla\psi(t), \nabla\psi_t(t))\\&=igp\int|\psi(t, x)|^{2p-2}\phi(t, x)^q\psi(t, x)\overline{\psi_t(t, x)}dx\end{aligned}$$

を得る。同様に (1.1) の共役な式より

$$\begin{aligned}&(\psi_t(t), \psi_t(t))-i(\nabla\psi_t(t), \nabla\psi(t))\\&=-igp\int|\psi(t, x)|^{2p-2}\phi(t, x)^q\psi_t(t, x)\,\overline{\psi(t, x)}dx\end{aligned}$$

が求まる。また (1.2) 式より

$$\begin{aligned}&(\phi_{tt}(t), \phi_t(t))+(\nabla\phi(t), \nabla\phi_t(t))+\mu^2(\phi(t), \phi_t(t))\\&=gq\int|\psi(t, x)|^{2p}\phi(t, x)^{q-1}\phi_t(t, x)dx\end{aligned}$$

を導き，これら三式より，

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\|\phi_t(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla\phi(t)\|^2+\frac{\mu^2}{2}\|\phi(t)\|^2+\|\nabla\psi(t)\|^2 -g\int|\psi(t,x)|^{2p}\phi(t,x)^q dx\right\}=0$$

を求めることは容易である。この式から，(2.2) 式はただちに証明される。

q.e.d.

この補題で示されるように，方程式系 (1.1)−(1.3) の Schrödinger 方程式の部分に支配される解 ψ はその L^2 ノルムを保存量としてもっている。しかしもう一方の保存量 (2.2) は正定値ではない。一般にこのような正定値でない保存則をもつ方程式は任意の初期値に対する大域的な解の存在を示すことが困難な場合が多い。従って，ある意味での初期値の大きさによって解が Blow-up するという議論が生じるわけだが，ψ はその L^2 ノルムが保存しているので ψ 自身が発散することよりむしろその導関数の Blow-up を示すことに関心がもたれる。もちろん ψ の L^r ノルム ($r\neq 2$) での decay や Blow-up について考えることは意義のあることである。

以下 ψ_t と ϕ の Blow-up について考察する。まず ϕ についての議論からはじめよう。

次のような関数を考える。

(2.4) $F(t)=(\phi(t),\phi(t))+\beta(t+\tau)^2$

ここで β と τ は非負値定数でその値は後で定める。(2.4) を t で微分して，

(2.5) $F'(t)=2(\phi_t(t),\phi(t))+2\beta(t+\tau)$,

(2.6) $F''(t)=2(\phi_t(t),\phi_t(t))+2(\phi_{tt}(t),\phi(t))+2\beta$

を得る。ここで $F'(t)=\dfrac{d}{dt}F(t)$, $F''(t)=\dfrac{d^2}{dt^2}F(t)$ である。

以後簡単のために $\phi(t)=\phi$, $\phi_t(t)=\phi_t$ と記すことにする。

さてそこで $G(t)=F''(t)F(t)-(1+\alpha)(F'(t))^2$ ($\alpha>0$) とおくと，$G(t)\geq 0$ が次のように示される。まず (2.4)−(2.6) 式より $G(t)$ を計算すると，

(2.7)
$$\begin{aligned}G(t)&=2(\|\phi_t\|^2+(\phi_{tt},\phi)+\beta)(\|\phi\|^2+\beta(t+\tau)^2)\\&\quad-4(1+\alpha)\{(\phi_t,\phi)+\beta(t+\tau)\}^2\\&=4(1+\alpha)[(\|\phi_t\|^2+\beta(t+\tau)^2)(\|\phi\|^2\\&\quad+\beta(t+\tau)^2)-\{(\phi_t,\phi)+\beta(t+\tau)\}^2]\\&\quad+2\{\|\phi\|^2+\beta(t+\tau)^2\}\\&\quad\times\{(\phi_{tt},\phi)-(1+2\alpha)(\|\phi_t\|^2+\beta)\}\end{aligned}$$

となる。Schwarz の不等式を使うと

$$\begin{aligned}\{(\phi_t,\phi)+\beta(t+\tau)\}^2&=(\phi_t,\phi)^2+2\beta(t+\tau)(\phi_t,\phi)\\&\quad+\beta^2(t+\tau)^2\\&\leq\|\phi_t\|^2\|\phi\|^2+\beta\|\phi_t\|^2(t+\tau)^2\\&\quad+\beta\|\phi\|^2+\beta^2(t+\tau)^2\\&=(\|\phi\|^2+\beta(t+\tau)^2)(\|\phi_t\|^2+\beta)\end{aligned}$$

となり (2.7) 式の (第一項) ≥ 0 となることがわかる。また第二項は $2(\|\phi\|^2+\beta(t+\tau)^2)\geq 0$ だから，

(2.8) $H(t)=(\phi_{tt},\phi)-(1+2\alpha)(\|\phi_t\|^2+\beta)$

とおいて $H(t)\geq 0$ を示せばよい。そこで方程式 (1.2) より

(2.9) $\phi_{tt}=\Delta\phi-\mu^2\phi+gq|\psi|^{2p}\phi^{q-1}$

だから (2.9) 式を (2.8) 式に代入して，部分積分を行うと，次式を得る。

$$H(t)=-\|\nabla\phi\|^2-\mu^2\|\phi\|^2+gq\int|\psi(t,x)|^{2p}\phi(t,x)^q dx -(1+2\alpha)(\|\phi_t\|^2+\beta).$$

また (2.2) 式より

$$\begin{aligned}H(t)&=-\|\nabla\phi\|^2-\mu^2\|\phi\|^2+q\left\{\frac{1}{2}\|\phi_t\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla\phi\|^2\right.\\&\quad\left.+\frac{\mu^2}{2}\|\phi\|^2+\|\nabla\psi\|^2-\frac{1}{2}I(0)\right\}-(1+2\alpha)(\|\phi_t\|^2+\beta)\\&=\left(\frac{q}{2}-2\alpha-1\right)\|\phi_t\|^2+\frac{\mu^2}{2}(q-2)\|\phi\|^2\\&\quad+\frac{1}{2}(q-2)\|\nabla\phi\|^2+q\|\nabla\psi\|^2-\frac{q}{2}I(0)-(1+2\alpha)\beta\end{aligned}$$

となる。ここで $q\geq 2+4\alpha$ かつ $I(0)<0$ とし $\beta=-\dfrac{qI(0)}{4\alpha+2}$ と選ぶと，$H(t)\geq 0$ が示される。

以上のことから $G(t)\geq 0$ が $q\geq 2+4\alpha$, $I(0)<0$ の条件のもとで証明される。さて $G(t)=F''(t)F(t)-(1+\alpha)(F'(t))^2\geq 0$ だからこの微分不等式をとくと，

$$\{F(t)\}^\alpha\geq\{F(0)\}^{1+\alpha}[F(0)-\alpha tF'(0)]^{-1}$$

を得る。ここで $\alpha>0$, $F'(0)=2(\phi_1,\phi_0)+2\beta\tau$ ((2.5) 式より) であるので，上記の証明の中で $\beta=-\dfrac{qI(0)}{4\alpha+2}>0$ と定めたことにより τ を十分大きくとると $F'(0)>0$ とすることができる。従って

$$t\longrightarrow T^-\leqslant\frac{F(0)}{\alpha F'(0)}<\infty$$

のとき

$$F(t)\longrightarrow+\infty$$

となる。

このことは $F(t)$ の形から t を有限な時刻 T^- に近づけたとき $\|\phi(t)\|$ が Blow-up することを表わしている。

さて次に ψ_t について考察しよう。

補題2.1の証明の (2.3) 式を考える。この式の虚数部をとることによって

(2.10)
$$\mathrm{I_m}(\psi_t(t),\psi(t))+\|\nabla\psi(t)\|^2=gp\int|\psi(t,x)|^{2p}\phi(t,x)^q dx$$

を得る。更に保存則 (2.2) 式より $g\int|\psi(t,x)|^{2p}\phi(t,x)^q dx$

を求め（2.10）式に代入して整理すると次式が求まる。

$$\mathrm{I_m}(\psi_t(t),\psi(t))=(p-1)\|\nabla\psi(t)\|^2+\frac{p}{2}\{\|\phi_t(t)\|^2+\|\nabla\phi(t)\|^2+\mu^2\|\phi(t)\|^2-I(0)\}.$$

ここで $p\geq 1, I(0)\leq 0$ ならば，

$$\mathrm{I_m}(\psi_t(t),\psi(t))\geq\frac{p}{2}\mu^2\|\phi(t)\|^2 \tag{2.11}$$

を得る。$\psi(t,x)=\psi^{(1)}(t,x)+i\psi^{(2)}(t,x)$（$\psi^{(1)},\psi^{(2)}$ はともに実数値関数）とおくと，

$$\mathrm{I_m}(\psi_t(t),\psi(t))=\int\{\psi^{(1)}(t,x)\psi_t^{(2)}(t,x)-\psi_t^{(1)}(t,x)\psi^{(2)}(t,x)\}dx$$

であり Schwarz の不等式を使うと次の評価は容易に求まる。

$$\begin{aligned}&\mathrm{I_m}(\psi_t(t),\psi(t))\\&\leqslant\left(\int\psi^{(1)}(t,x)^2dx\right)^{1/2}\left(\int\psi_t^{(2)}(t,x)^2dx\right)^{1/2}\\&\quad+\left(\int\psi_t^{(1)}(t,x)^2dx\right)^{1/2}\left(\int\psi^{(2)}(t,x)^2dx\right)^{1/2}\\&\leqslant\|\psi(t)\|^2+\|\psi_t(t)\|^2.\end{aligned}$$

この式と（2.11）式より（2.1）式を考慮すると，

$$\frac{p}{2}\mu^2\|\phi(t)\|^2-\|\psi_0\|^2\leqslant\|\psi_t(t)\|^2$$

が求まる。よって $t\to T^-\left(\leqslant\frac{F(0)}{\alpha F'(0)}\right)$ のとき $\|\phi(t)\|\to\infty$ だから $\|\psi_t(t)\|\to\infty$ も示される。

以上のことより次の定理を得る。

定理 2.2

$p\geq 1, q\geq 3$ とし ψ,ϕ を方程式系（1.1）―（1.3）の古典解とする。初期値 ψ_0,ϕ_0,ϕ_1 が，$I(0)<0$ を満たしていれば，解は時間に関して大域的に存在せず次の意味で有限時間内に Blow-up する。

$$\left.\begin{array}{l}\|\psi_t(t)\|\longrightarrow+\infty\\ \|\phi(t)\|\longrightarrow+\infty\end{array}\right.\quad(t\longrightarrow T^-<\infty)$$

上記の定理には $I(0)<0$ なる条件がつく。証明の途中でもわかるようにもし $I(0)=0$ ならば $\beta=0$ ととらねばならず，$I(0)=0$ の条件のもとで $F'(0)>0$ を示すことができない。従って $I(0)=0$ の場合には初期条件に余分の制限を加えて，より証明の簡単な次の系を得る。

系 2.3

$p\geq 1, q\geq 3$ とし ψ,ϕ を方程式系（1.1）―（1.3）の古典解とする。初期値に対する条件を，

(1) $\quad I(0)=0$

(2) $\quad \int\phi_1(x)\phi_0(x)dx>0$

とすれば解 ψ,ϕ は時間に関して大域的に存在せず次の意味で有限時間内に Blow-up する。

$$\left.\begin{array}{l}\|\psi_t(t)\|\longrightarrow+\infty\\ \|\phi(t)\|\longrightarrow+\infty\end{array}\right.\quad(t\longrightarrow T^-<+\infty).$$

（証明）

定理2.2の証明の中の式（2.4）で $\beta=0$ ととり F''を計算すると，

$$F''(t)=2\|\phi_t\|^2+2(\phi_{tt},\phi_t)$$

となる。方程式（1.2）と保存量（2.2）を考慮して

$$F''(t)=(q+2)\|\phi_t\|^2+(q-2)\|\nabla\phi\|^2+(q-2)\mu^2\|\phi\|^2+q\|\nabla\psi\|^2$$

を得る。仮定の $q\geq 3$ より

$$F''(t)\geq(q+2)\|\phi_t\|^2$$

が導かれ，$F'(t)=2(\phi_t,\phi)$ と $F(t)>0$ に注意すると次式を得る。

$$(F'(t))^2\leqslant 4\|\phi_t\|^2\|\phi\|^2\leqslant\frac{4}{q+2}F''(t)F(t).$$

$q\geq 3$ より $q=2+4\alpha$ $(\alpha\geq 1/4)$ とおくと，この式より

$$F''(t)F(t)\geq(1+\alpha)(F'(t))^2$$

となりこの不等式をとくと，

$$\{F(t)\}^\alpha\geq\{F(0)\}^{1+\alpha}[F(0)-\alpha tF'(0)]^{-1}$$

となる。仮定の $F'(0)=2\int\phi_1(x)\phi_0(x)dx>0$ に注意すると，定理2.1と同様の結果が示される。

q.e.d.

Remark 1：非線型 Schrödinger 方程式 $\psi_t-i\Delta\psi=i|\psi|^2\psi$ において $\int x^2|\psi(t,x)|^2dx$ の挙動を調べることによって，ψ の x に関する導関数が Blow-up することが示される。しかしながら，ここで扱った system の場合は，もう一方の Klein-Gordon 方程式の影響があり $\nabla\psi$ に関する Blow-up の問題は未解決である。

Remark 2：上記の結果は ϕ を正解とすると，p,q が正の実数でも意味がつく。その際には q の条件として，$q\geq 2+\varepsilon$（ε は任意の正数）ととることができるのはもちろんである。

3. Coupled Klein-Gordon 方程式に対する結果

下記のような湯川型の非線型項をもつ coupled Klein-Gordon 方程式については〔3〕で著者がその解の大域的存在と Blow-up に関して述べたが，その中の Blow-up についての結果が少し改善されるのでそれを報告する。

次のような初期値問題を考え，解は第2節と同様の古典解とする。

$$
(3.1)\quad \begin{cases} \psi_{tt}-\Delta\psi+M^2\psi=g\psi\phi, \\ \phi_{tt}-\Delta\phi+m^2\phi=g|\psi|^2, \\ \psi(0,\ x)=\psi_0(x),\ \psi_t(0,\ x)=\psi_1(x), \\ \phi(0,\ x)=\phi_0(x),\ \phi_t(0,\ x)=\phi_1(x). \end{cases}
$$

定理 3.1

方程式系（3.1）の局所古典解を ψ, ϕ とし初期条件として次の式をみたすものとする。

$$
E(0)=\|\psi_1\|^2+\|\nabla\psi_0\|^2+M^2\|\psi_0\|^2+\frac{1}{2}\|\phi_1\|^2
$$
$$
+\frac{1}{2}\|\nabla\phi_0\|^2+\frac{m^2}{2}\|\phi_0\|^2-g\int|\psi_0(x)|^2\phi_0(x)dx<0.
$$

そのとき ψ, ϕ の L^2 ノルムが有限時間内に Blow-up する。

（証明）

今 $K(t)$ として次のような関数を考える。

$$
K(t)=\|\psi(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\phi(t)\|^2+\beta(t+\tau)^2.
$$

β と τ は後で決定する非負値定数である。定理2.1とほとんど同様の手続きで

$$
K''(t)=2\|\psi_t\|^2+(\psi_{tt}, \psi)+(\psi, \psi_{tt})
$$
$$
+\|\phi_t\|^2+(\phi_{tt}, \phi)+2\beta
$$

と次の評価式を得る。

$$
2K''(t)K(t)-(1+\varepsilon)(K'(t))^2
$$
$$
=(1+\varepsilon)S^2-K(t)[2(\psi_{tt}, \psi)+2(\psi, \psi_{tt})
$$
$$
+2(\phi_{tt}, \phi)-2\varepsilon\|\psi_t\|^2-\varepsilon\|\phi_t\|^2-2\varepsilon\beta].
$$

但し

$$
S^2=\Big[(4\|\psi_t\|^2+2\|\phi_t\|^2+4\beta)\Big(\|\psi\|^2+\frac{1}{2}\|\phi\|^2+\beta(t+\tau)^2\Big)
$$
$$
-\{(\psi_t, \psi)+(\psi, \psi_t)+(\phi_t, \phi)+2\beta(t+\tau)\}^2\Big]\geq 0
$$

更に

$$
J(t)=2(\psi_{tt}, \psi)+2(\psi, \psi_{tt})+2(\phi_{tt}, \phi)
$$
$$
-2\varepsilon\|\psi_t\|^2-\varepsilon\|\phi_t\|^2-2\varepsilon\beta
$$

とおき方程式と保存則の関係を用いると次式を得る。

$$
J(t)=6\Big\{\|\psi_t\|^2+\|\nabla\psi\|^2+M^2\|\psi\|^2+\frac{1}{2}\|\phi_t\|^2
$$
$$
+\frac{1}{2}\|\nabla\phi\|^2+\frac{m^2}{2}\|\phi\|^2-E(0)\Big\}-4\|\nabla\psi\|^2
$$
$$
-4M^2\|\psi\|^2-2\|\nabla\phi\|^2-2m^2\|\phi\|^2-2\varepsilon\|\psi_t\|^2
$$
$$
-\varepsilon\|\phi_t\|^2-2\varepsilon\beta
$$
$$
=(6-2\varepsilon)\|\psi_t\|^2+2\|\nabla\psi\|^2+2M^2\|\psi\|^2+m^2\|\phi\|^2
$$
$$
+\|\nabla\phi\|^2+(3-\varepsilon)\|\phi_t\|^2-6E(0)-2\varepsilon\beta.
$$

ここで $E(0)<0$ という仮定より $\beta=-\frac{3E(0)}{\varepsilon}>0$ とし，ε として $\varepsilon\leq 3$ を選ぶ。そうすると，

$$
J(t)\geq 0
$$

となり

$$
K''(t)K(t)\geq\frac{1+\varepsilon}{2}(K'(t))^2
$$

を得る。そこで $\varepsilon=1+2\alpha$ とおくと $\varepsilon\leq 3$ より $\alpha>0$ なる α が存在して，

$$
K''(t)K(t)\geq(1+\alpha)(K'(t))^2
$$

なる式が成立し，定理2.1と同様の議論ができる。また $K'(0)=2\mathrm{Re}(\psi_1, \psi_0)+(\phi_1, \phi_0)+2\beta\tau$ だから，$\beta>0$ ならば十分 τ を大きくとれば $K'(0)>0$ とすることができるのも定理2.1と同様である。従って前号〔3〕の結果の $K'(0)>0$ なる仮定はとりはずすことができる。

q.e.d.

しかしながら，$E(0)=0$ のときは依然として初期値に $K'(0)>0$ という条件がつくことは系2.3と同様である。

今まで述べてきた問題はこのような coupled system に対する解の挙動の問題の一部に解答を与えたにすぎない。このような system が時間に関して大域的な解をもち，更に $t\to\infty$ でどのように decay しているか，そのための条件は何か，あるいはより物理学の現象に密着した結果（例えば Scattering 理論等）を導くことがこれからの課題として残されている。そこには単独方程式にない難しさがあり目下検討中である。

（昭和52年9月30日　受理）

参考文献

1) W. A. Strauss: Dispersion of low-energy waves for two conservative equations. Arch. Rat. Mech. Anal., **55**, 86–92, (1974).

2) H. A. Levine: Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_t=-Au+\mathscr{F}(u)$. Trans. Amer. Math. Soc., **190**, 1–21, (1974).

3) I. Fukuda: On the Yukawa-coupled Klein-Gordon equations. 国士舘大学工学部紀要, 第10号, 1–6, (1977).

4) I. Fukuda and M. Tsutsumi: On coupled Klein-Gordon-Schrodinger equations, II. J. Math. Anal. Appl. (to appear).