

薄肉架構柱梁接合部の応力解析の研究

— 弾性論による一解法 —

田中輝明* 横店秀利**

The Studies on Beam-Column Connections in The Theory of Elasticity

By Teruaki Tanaka* and Hidetoshi Yokomise**

Synopsis: In this paper, authors analyzed a +Type Beam-Column Connection which is a finitely long plate applied by normal stress and shearing stress of external forces along the longitudinal sides of the plate as a Two-Dimensional Problem in Elasticity, and compared with three analyses The Form of a Fourier Series, The Photoelastic Experiments, and The Finite Element Method, respectively.

要旨: 本論文は架構の柱梁接合部を無限に長い帯板の問題に置換し、その自由境界上に外力として曲げ応力、及びせん断応力を与え、弾性論を用いて級数解析を行い、柱梁接合部の応力を求めるものである。又、光弾性実験による解析と有限要素法による解析を行って理論解を検討し、併せて現行の柱梁接合部パネルの設計式の妥当性を検討する。

1. 序

水平力が主体構造を支配する我国に於て、架構接合部の研究は重要な課題の一つである。特に剛節の接合部が地震力のような繰返しの逆対称荷重を受ける場合、その柱梁接合部のうち、柱と梁で囲まれる部分——接合部パネル——は大きなせん断力を受ける事が、既に多くの研究によって指摘されている。特に本論文で取扱う薄肉の架構では、接合部パネル部分の範囲がせまいので、大きな応力状態となり、剛性の低下等を伴うので問題点が多い。

本論文では柱成、梁成の等しい薄肉架構の接合部パネルが水平力を受ける時の応力を、弾性論により理論解析を行う。又、光弾性実験解析と有限要素法による解析とを行って、比較検討を加える。又、接合部パネルの設計式の妥当性、安全性にも検討を加えて論ずる。

2. 理 論

柱梁接合部を無限に長い帯板の問題に置換し、その自由境界に曲げ応力、せん断応力を荷重として与え、弾性

論を用いて解く。外力が厚さの薄い長方形梁の長辺に沿って連続的に分布する場合、この外力はフーリエ級数で表わす事が出来るので、偏微分方程式

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (1)$$

の応力関数として

$$\phi = \sin \frac{m\pi x}{l} \cdot f(x) \quad (2)$$

を用いる。この一般解は

$$f(x) = C_1 \cosh \alpha y + C_2 \sinh \alpha y + C_3 y \cosh \alpha y + C_4 y \sinh \alpha y \quad (3)$$
$$\left(\alpha = \frac{m\pi}{l} \right)$$

であり、このとき応力関数は

$$\phi = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \alpha x (C_1 \cosh \alpha y + C_2 \sinh \alpha y + C_3 y \cosh \alpha y + C_4 y \sinh \alpha y) \quad (4)$$

となる。応力成分は

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \alpha x [C_1 \alpha^2 \cosh \alpha y + C_2 \sinh \alpha y + C_3 \alpha (2 \sinh \alpha y + \alpha y \cosh \alpha y) + C_4 \alpha (2 \cosh \alpha y + \alpha y \sinh \alpha y)] \quad (5)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = - \sum_{m=1}^{\infty} \alpha^2 \sin \alpha x (C_1 \cosh \alpha y + C_2 \sinh \alpha y + C_3 y \cosh \alpha y + C_4 y \sinh \alpha y) \quad (6)$$

* 建築学科助教授
Asistant Professor, Architectural Division

** 建築学科技手補
Technical Asistant, Architectural Division

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -\sum_{m=1}^{\infty} \alpha \cos \alpha x [C_1 \sinh \alpha y + C_2 \cosh \alpha y + C_3 (\cosh \alpha y + \alpha y \sinh \alpha y) + C_4 (\sinh \alpha y + \alpha y \cosh \alpha y)] \quad (7)$$

となる。

積分定数は、無限に長い矩形梁の上下縁 $y = \pm a$ における条件から決められている。(Fig. 1)

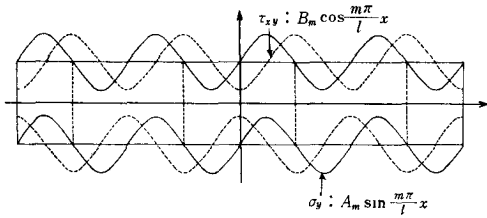


Fig. 1

$$y = a \quad \tau_{xy} = -\sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos \frac{m\pi}{l} x$$

$$\sigma_y = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi}{l} x$$

$$y = -a \quad \tau_{xy} = -\sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos \frac{m\pi}{l} x$$

$$\sigma_y = -\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi}{l} x$$

これらの値を (6), (7) 式に代入して積分定数が求まる。

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = \frac{2A_m (\cosh aa + aa \sinh aa) + 2B_m aa \cosh aa}{\alpha^2 (2aa - \sinh 2aa)}$$

$$C_3 = \frac{2(A_m \cosh aa + B_m \sinh aa)}{\alpha (\sinh 2aa - 2aa)}$$

$$C_4 = 0$$

従って応力成分は

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \alpha x \left[\left\{ \frac{2A_m (\cosh aa + aa \sinh aa) + 2B_m aa \cosh aa}{(2aa - \sinh 2aa)} \right\} \cdot \sinh \alpha y + \left\{ \frac{2(A_m \cosh aa + B_m \sinh aa)}{\alpha (\sinh 2aa - 2aa)} \right\} \cdot 2\alpha \sinh \alpha y + \alpha^2 y \cosh \alpha y \right] \quad (8)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\sum_{m=1}^{\infty} \alpha^2 \sin \alpha x \left[\left\{ \frac{2A_m (\cosh aa + aa \sinh aa) + 2B_m aa \cosh aa}{\alpha^2 (2aa - \sinh 2aa)} \right\} \cdot \sinh \alpha y + \left\{ \frac{2(A_m \cosh aa + B_m \sinh aa)}{\alpha (\sinh 2aa - 2aa)} \right\} \cdot y \cosh \alpha y \right] \quad (9)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -\sum_{m=1}^{\infty} \alpha \cos \alpha x \left[\left\{ \frac{2A_m (\cosh aa + aa \sinh aa) + 2B_m aa \cosh aa}{(2aa - \sinh 2aa)} \right\} \cdot \alpha \cosh \alpha y + \left\{ \frac{2A_m \cosh aa + 2B_m \sinh aa}{\alpha \sinh aa - 2aa} \right\} \cdot (\cosh \alpha y + \alpha y \sinh \alpha y) \right] \quad (10)$$

ここで、係数 A_m, B_m, B_0 は Dirichlet の条件を基に $y = \pm a$ における境界条件 (Fig. 2) から級数展開して求まる。

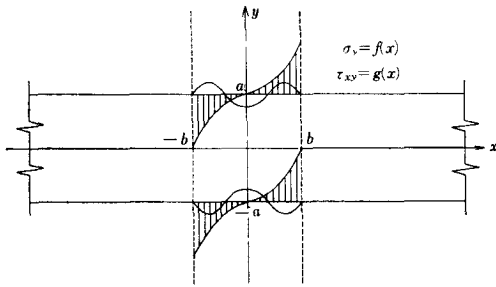


Fig. 2

$$y = a \quad \sigma_y = f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi}{l} x$$

$$\tau_{xy} = g(x) = \frac{B_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos \frac{m\pi}{l} x$$

$$y = -a \quad \sigma_y = -f(x) = -\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi}{l} x$$

$$\tau_{xy} = g(x) = \frac{B_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos \frac{m\pi}{l} x$$

ここで

$$f(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7$$

$$g(x) = b_0 + b_2 x^2 + b_4 x^4 + b_6 x^6$$

である。

各々の係数は

$$B_0 = \frac{1}{l} \int_{-b}^b g(x) dx$$

$$B_m = \frac{1}{l} \int_{-b}^b g(x) \cos \frac{m\pi}{l} x dx$$

$$A_m = \frac{1}{l} \int_{-b}^b f(x) \sin \frac{m\pi}{l} x dx$$

従って応力成分は

$$\sigma_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \alpha x [D_0 \sinh \alpha y + D_1 \alpha (2 \sinh \alpha y + \alpha y \cosh \alpha y)] \quad (11)$$

$$\sigma_y = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi}{l} x$$

$$= -\sum_{m=1}^{\infty} \alpha^2 \sin \alpha x (D_0 \sinh \alpha y + D_1 y \cosh \alpha y)$$

$$(12)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{B_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos \frac{m\pi}{l} x \\ &= \frac{B_0}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} \alpha \cos \alpha x [D_0 \alpha \cosh \alpha y \\ &\quad + D_1 (\cosh \alpha y + \alpha y \sinh \alpha y)] \end{aligned} \quad (13)$$

ここで

$$D_0 = \frac{2A_m (\cosh \alpha a + \alpha a \sinh \alpha a) + 2B_m \alpha a \cosh \alpha a}{\alpha^2 (2\alpha a - \sinh 2\alpha a)}$$

$$D_1 = \frac{2(A_m \cosh \alpha a + B_m \sinh \alpha a)}{\alpha (\sinh 2\alpha a - 2\alpha a)}$$

である。

級数の収束性をみて $m=80$ までの解析結果は

Table 1, Fig. 3 の如くである。

Table 1 接合部パネルせん断応力度分布 (理論値)

座標値	応力度 (kg/cm ²)	座標値	応力度 (kg/cm ²)
1.4	0.518	-0.1	74.571
1.3	3.313	-0.2	72.551
1.2	7.326	-0.3	69.183
1.1	12.674	-0.4	64.483
1.0	19.299	-0.5	58.516
0.9	26.947	-0.6	51.437
0.8	35.193	-0.7	43.525
0.7	43.525	-0.8	35.193
0.6	51.437	-0.9	26.947
0.5	58.516	-1.0	19.299
0.4	64.483	-1.1	12.674
0.3	69.183	-1.2	7.326
0.2	72.551	-1.3	3.313
0.1	74.571	-1.4	0.518
0.0	75.244		

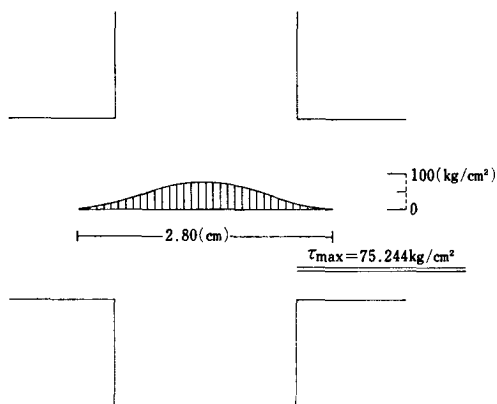


Fig. 3 接合部パネルせん断応力度分布図 (理論値)

3. 光弾性実験解析

試験体は板厚 3.5mm のエポキシ板を用い、梁成、柱成を等しくとって Fig. 4, Table 2, の形状である。荷重

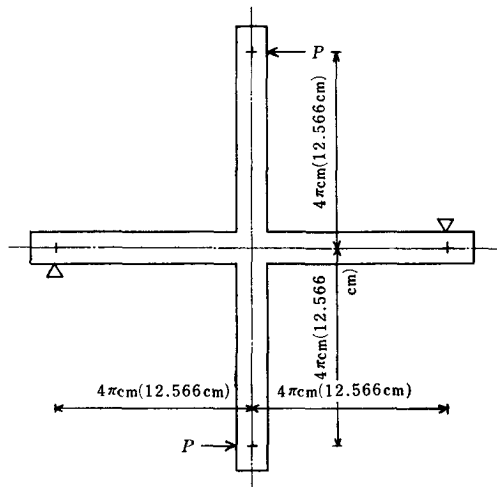


Fig. 4 試験体

Table 2 試験体形状

	柱巾 (cm)	梁巾 (cm)	板厚 (cm)	弾性係数 E (kg/mm ²)	ポアソン 比 ν
試験体 1	2.00	2.00	0.35	270	0.166
試験体 2	2.00	2.00	0.34	270	0.166

は繰返しが 4~5 回となるように 3kg を載荷し、Fig. 5 の荷重装置で Fig. 6 のような逆対称荷重を加える。その時の等色線 (Fig. 7), 主応力線 (Fig. 8) を求め、これらを用いて接合部境界の曲げ応力度, せん断応力度, 及び接合部パネルのせん断応力度とその分布を求める (Fig. 9)。

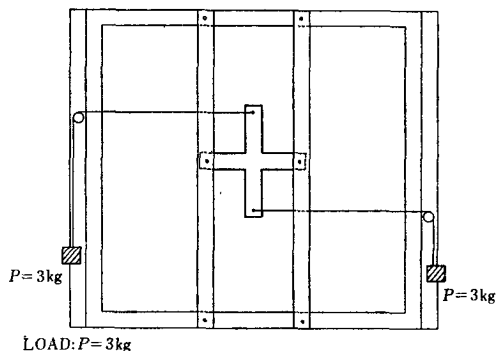


Fig. 5 実験装置

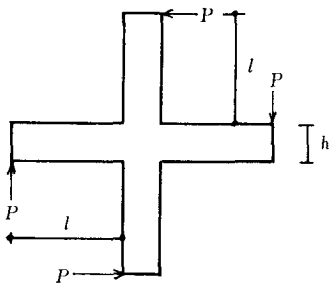
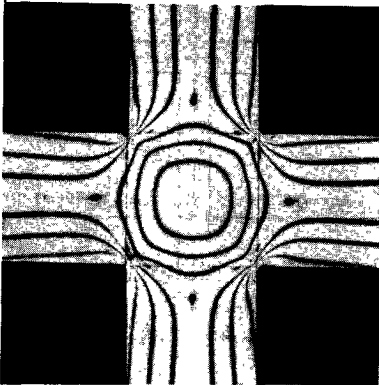


Fig. 6

暗視野



明視野

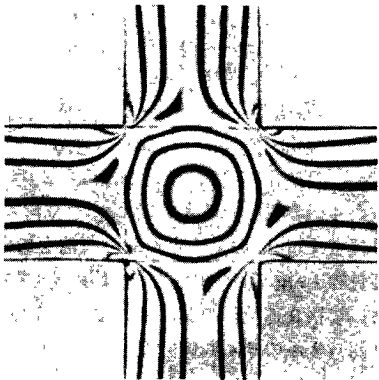


Fig. 7 等色線

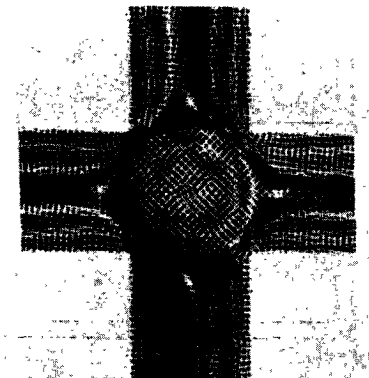


Fig. 8 主応力線

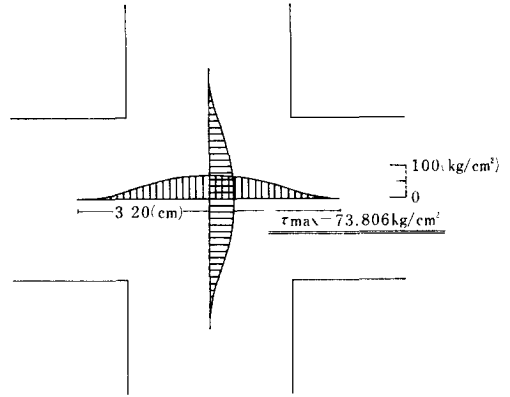


Fig. 9 接合部パネルせん断応力度分布図(実験値)

4. 有限要素法による解析

有限要素法により Fig. 10 のように要素を分割して柱梁接合部のせん断応力度を求めると Fig. 11 のようになる。

5. 接合パネルのせん断応力度

接合部パネルに加わる外力は Fig. 12 のせん断力 P_1 , P_2 , 及び曲げモーメント M_1, M_2 である。この曲げモーメントを軸力に置き換えて Fig. 13 のように材端に集中して作用する場合を考えると、接合部パネルのせん断力 Q_1 は

$$Q_1 = \frac{2P \cdot l}{h} - P \quad (14)$$

となる。又、Fig. 14 のように曲げモーメントを三角形分布として作用すると考える場合には、接合部パネルのせん断力 Q_2 は

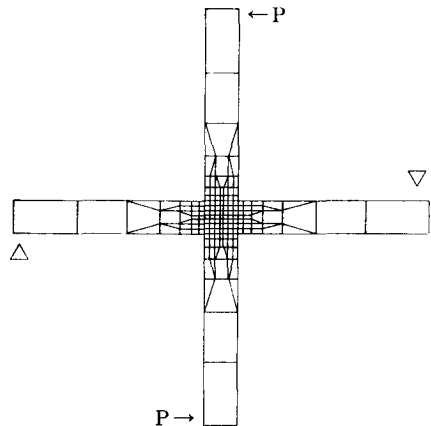


Fig. 10 要素の分割状態

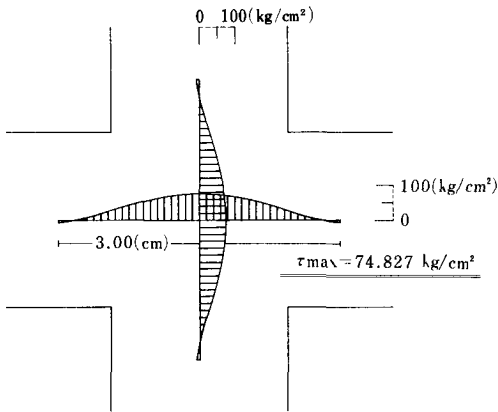


Fig. 11 接合部パネルせん断応力度分布図 (FEM)

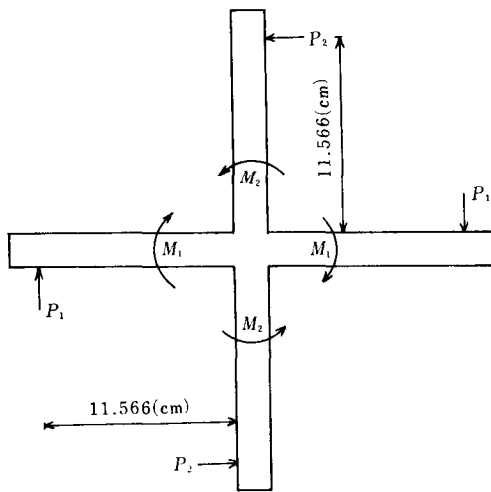


Fig. 12 接合部外力

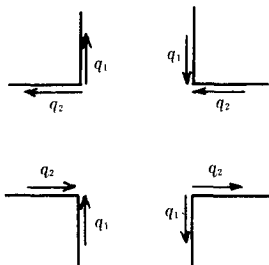


Fig. 13

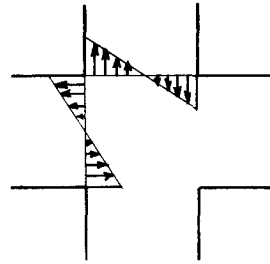


Fig. 14

$$Q_2 = \frac{6P \cdot l}{2h} - P \quad (15)$$

となる。更に Fig. 12 より接合部パネルの設計式は

$$Q_P = \frac{1}{J_B} \left\{ (M_1 + M_2) - \frac{P_2 + P_1}{2} J_B \right\} \quad (16)$$

$$\tau_P = \frac{Q_P}{t \cdot j_c} \quad (17)$$

となる。 j_B : 梁の応力中心距離

j_c : 柱の応力中心距離

t : 接合部パネルの厚さ

Table 3 は本研究の結果をまとめたものである。接合部パネルの総せん断力の光弾性実験値を基準にして検討すると、何れの値も Q_1 と Q_2 の間に存在し、理論値、光弾性実験解析値、FEM 解析値は殆んど等しい。パネル内の最大せん断応力度も三者共殆んど等しく、せん断応力度分布状態は Fig. 15 のようになる。

Table 3, 及 Fig. 15 によれば、せん断応力度分布の範囲は、理論値では実験値の88%であり、FEM 解析値では94%となる。このせん断応力度分布の範囲は接合部パネルの領域と考えられるから、接合部パネルの平均せん断

Table 3 研究のまとめ

	Q_1	Q_P	理論値	実験値	F・E・M	Q_2
せん断力 Q (kg)	31.698	38.308	40.396	43.911	45.646	49.047
最大せん断 応力度 τ_{max} (kg/cm ²)	—	—	75.244	73.806	74.827	—
せん断応力 度分布範囲 (cm)	—	—	2.80	3.20	3.00	—
平均せん断 応力度 τ_0 (kg/cm ²)	—	65.148	41.220	39.204	43.472	—
	—	1.66	1.05	1.00	1.11	—

Q_1 : 端部の曲げモーメントを集中荷重とした場合

Q_P : 設計式

Q_2 : 端部の曲げモーメントを三角分布とした場合

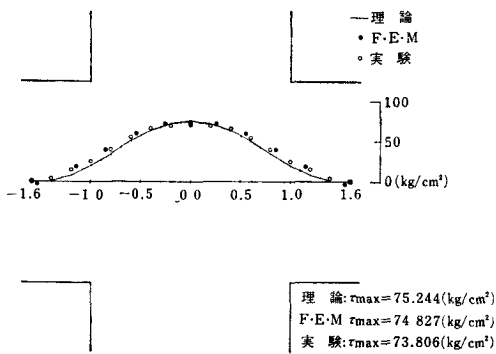


Fig. 15 接合部パネルせん断応力度分布図

せん断応力度 (τ_0) は各々 1.05 : 1.0 : 1.11 の割合となり、設計式で求まる平均せん断応力度 (τ_P) よりも60%低い値となっている。これは設計式の接合部パネルの領域を、柱と梁で囲まれる部分に限っているからであり、実状から考えるとかなり安全側な値となっている。

6. まとめ

本論で示した理論解析は、フーリエ級数の形が複雑で級数の収束に関して問題を残すが、光弾性実験解析値、有限要素法解析値とよく一致し、妥当な解析方法である。

接合部パネルの領域は、薄肉架構の場合、柱と梁で囲まれた部分よりも外にある事が本研究並びに既往の研究で明らかにされている。従って現在行なわれている接合部パネル設計式は、接合部パネルの領域をかなり小さくとっている事になるので、充分安全側の設計となっている。

本研究に当たり、卒業論文研究にあたられた昭和51年度卒業生、高島数馬君、田房義彦君に感謝致します。

参考文献

- 1) Theory of Elasticity by Timoshenko and Goodier
- 2) The Finite Element Method in Engineering Science. by Zienkiewicz
- 3) Stress Analysis of + Type Beam-Column Connections (I), (II), (III) by Toshio Okoshi. 日本建築学会論文報告集
- 4) 版架構接合部の実験的研究 松井, 田中, 他 日本建築学会大会学術論文集 (昭和44年)
- 5) 薄肉架構接合部の実験的研究 田中, 他 国士館大学工学部紀要 第3号
- 6) 三次元光弾性法による薄肉架構の実験的研究 田中, 他 国士館大学工学部紀要 第4号
- 7) 鉄筋コンクリート柱梁接合部の実験的研究 田中, 他 日本建築学会大会学術論文集 (昭和48年)
- 8) 高層壁式架構の応力解析法の研究 田中, 他 国士館大学工学部紀要 第9号
- 9) 材料力学 松井源吾 彰国社