

# 二次元翼列を過ぎる亜音速圧縮性流れについて

宮 崎 昭 勇\*

## Theoretical Solution of High Subsonic Flow Past Two-Dimensional Cascades of Airfoils

By Teruo Miyazaki\*

**Synopsis:** For a given cascade the influence of compressibility on the aerodynamic parameters of the cascade is numerically investigated. The numerical calculation which is based on our rigorous solution of subsonic potential flow past two-dimensional cascades of airfoils proceeds in three steps: a) calculation of the incompressible two-dimensional flow, b) calculation of the subsonic potential flow, c) calculation of the compressible boundary layer along the suction side and pressure side of blade. For the first step the inadequate parts of the so-called vortex-singularity method have been improved.

The results obtained by the present method show very good agreement with experiments.

**要旨:** 任意の二次元翼列を過ぎる亜音速圧縮性流れを理論的に取り扱うためには (i) 亜音速ポテンシャル流れの解法, (ii) 粘性流れの解法の2つが必要となるが, 本論文は主として前者の解法について数値的な検討を加えたものである。(i)の解法として著者らによる厳密解法を用いる場合には非圧縮性ポテンシャル流れが既知でなければならず, このための解法としては渦特異点解法を改良して用いてある。さらに, 粘性の影響を加味するために翼表面上に発達する圧縮性境界層についても検討してある。

### 1. ま え が き

ターボ機械の大形化, 高速化にともない, 翼列性能のわずかな差も直接経済性に影響をおよぼすようになり, 翼列を過ぎる流れの解析的取り扱いにおいても精度の高い手法が要求されている。このために, 圧縮性の二次元翼列流れへの影響の系統だった取り扱いがますます重要となりつつある。翼列流れの理論的考察においては, 与えられた翼列を過ぎる圧縮性ポテンシャル流れを計算し, ついでこの計算結果を用いて粘性の影響を加味する。また, 翼列流れの具体例では, Reynolds 数が大きいために翼列流れへの粘性の影響は翼面に沿う薄い境界層と翼列後方の幅の狭い後流部分とに限定される。非圧縮性流れにおける粘性の影響についての研究例としては L. Seidel<sup>1)</sup>, L. Speidel および N. Scholz<sup>2)</sup> などがある。圧縮性流れにおける系統だった取り扱いは余り報告されていないようである。この原因の一つとして, 二次元翼列を過ぎる圧縮性ポテンシャル流れを求めるための従来の理論的研究は, 流れが解析関数として取り扱えないことより, 主として近似解法によっていたために解の信頼性

および収束性などに問題点があったことがあげられる。本研究においては流れを亜音速流れに限定し, 著者らによる二次元亜音速ポテンシャル流れの厳密解法<sup>3)</sup>を用いて翼列翼表面上の圧力分布, および機械的エネルギー損失を求めている。なお, 圧力分布の計算結果の一部では, 線形近似された解および実験値と対比して示してある。また, 粘性の影響としては翼列翼表面に発達する圧縮性境界層の排除効果のみを加味した翼列流れについても報告してある。

境界層の排除厚を加味する場合の具体的な流れの取り扱いにおいては, まず与えられた翼列翼を過ぎる亜音速圧縮性ポテンシャル流れを非圧縮性ポテンシャル流れの解を用いて厳密に求め, 翼列翼の圧力面および吸込面に沿う圧縮性境界層を計算する。ついで, 境界層の排除効果を加味した仮想の翼列翼を過ぎる亜音速圧縮性ポテンシャル流れを再び計算し, 翼表面上の圧力分布, および翼列損失を与えてある。このために, 本研究で用いる数値計算手法は「二次元翼列を過ぎる非圧縮性ポテンシャル流れの解法」, 「二次元翼列を過ぎる亜音速圧縮性ポテンシャル流れの解法」および「翼表面に発達する圧縮性境界層の計算手法」の3つに分けて考えることができる。非圧縮性ポテンシャル流れの計算手法としては従来の

\* 機械工学科 助教授

Assistant Professor, Mechanical Engineering Division.

Oellers<sup>4)</sup> によるいわゆる渦特異点解法を改良し、また、圧縮性境界層の計算には、全翼周で完全乱流境界層であり、かつ、翼列翼表面が断熱壁よりなる場合の Englert<sup>5)</sup> の手法をそれぞれ用いてある。

本研究における解法を用いれば、任意の二次元翼列を過ぎる亜音速圧縮性流れの系統だった取り扱いが可能であるが、数値計算例としては翼形 NACA 0010 を用いたものに限って示してある。

## 2. 記 号

本論文に用いる主な記号を次に示す。

$\alpha$ : 迎え角

$\beta_{-\infty}, \beta_{+\infty}$ : 流入角, 流出角

$\beta_s$ : 翼列食違い角

$t$ : 翼列ピッチ

$d$ : 翼弦長

$w$ : 複素速度

$S$ : 圧力分布, 式 (1) または (5)

$p$ : 圧力

$\rho$ : 密度

$\gamma$ : 比熱比

$\delta^*$ : 境界層排除厚

$4E$ : 機械的エネルギー損失

$\zeta_w$ : 機械的エネルギー損失係数

添字

$-\infty, +\infty$ : 翼列無限上, 下流

$s$ : 激み点または吸込面

## 3. 非圧縮性ポテンシャル流れの計算

任意の二次元翼列を過ぎる非圧縮性ポテンシャル流れを求める解法には、等角写像解法および特異点解法などがある。等角写像解法としては翼列翼を2重円環領域に写像する白倉の手法<sup>6)</sup>が優れているが、特異点解法のうち、翼列翼表面に渦分布させる Oellers<sup>4)</sup> によるいわゆる渦特異点解法もまた、境界条件の取り扱いおよび比較的计算手法が簡単のために有利な手法である。しかしながら、Oellers による解法では翼形代表点の個数を増加させれば解が振動するなどの欠点があるために、この手法を用いた研究結果はほとんど報告されていない。このために、まず解法の検討を行なう。渦特異点解法においては翼列翼表面に分布させた渦に関する積分方程式を導き、さらに積分を有限和で置き換えることにより、連立1次方程式の解として渦分布の強さを求める。このとき、次の近似がなされていると考えられる。(i) 物体を多面体で表現する。(ii) 多面体の各要素 (panel) で渦分布の強さは一定である。

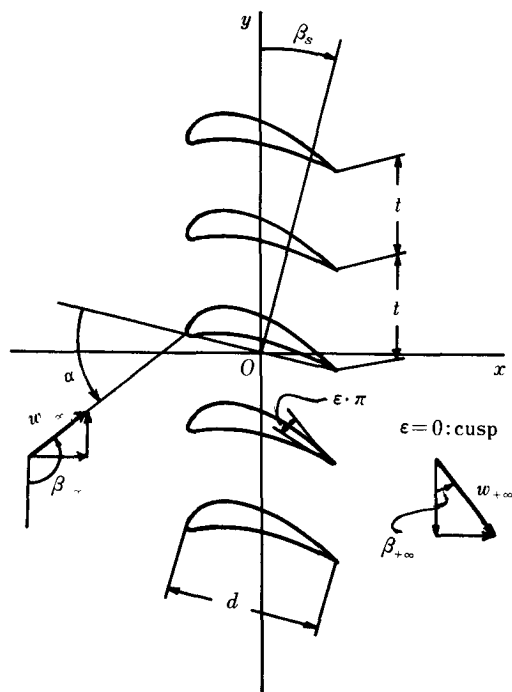


図1 翼列配置図

翼列翼に対しても単独翼におけると同様な考察<sup>7)</sup>が可能であり、まず、積分方程式の定式化による問題点の第一としては、境界値問題に対する解の存在と一意性であり、properly posed であるか否かの判定がなされていないことと、第二に導かれた式は第一種 Fredholm 形方程式であり、和分近似でえられる連立方程式は ill-conditioned system となる可能性があること、第三に Kutta の条件より導かれる後縁における特異性が積分方程式による表現と関数論に基づく表現とは異なることがあげられる。第二の問題点については、積分核が特異性を有する点での数値的取り扱いの必要から、特異点近傍では和分近似せずに特別な配慮をした結果、well-conditioned となるように第2種 Fredholm 形方程式に転換したと同様な効果がえられているが、これら定式化にともなう問題点に関する資料は乏しく、現在のところさらに議論することができない。これらの問題点を有するにもかかわらず、渦特異点解法が工学的に有効か否かを判定するために、具体的な数値解法の検討と改良を次の3点に対して行なっている。(i) パネル化の方法、(ii) 積分核の取り扱い、(iii) 激み点における渦分布の修正。まず、パネル分割化の方法に関して、パネルを曲線近似する。このために、パネル数の倍の翼形代表点を翼周に沿ってほぼ等間隔となるように選び、各パネルを3点で表現し、

さらに積分核の有する値はパネル内で大きく変化する場合があるので、その積分平均をとりパネルにおける値とした。これらの配慮は単純なパネル数の増加を避け、これと同等の効果を期待するものである。また、渦み点を示すパネル上では渦分布の値が零であることより無限個の零点を有するポテンシャル流れとなり不合理である。このために、渦み点においてのみ渦分布の値が零となるように修正する。このとき翼周上の修正を施さない他の部分に影響をおよぼさないように、渦み点に臨接するパネルの渦分布の強さを変化させ、渦み点近傍における渦分布の強さを曲線近似する。

なお、本解法では後縁分岐点における渦分布が零として与えられることより、翼形後縁形状が cusp をなす場合には翼形後縁形状を一部修正することにより適用する。cusp をなさない翼形を cusp をなす翼形形状に修正するためには、翼弦曲線をその接線方向に延長し、この延長上に新しい後縁点を取り、延長された翼弦曲線を新しい翼弦曲線に選ぶ。また、もとの後縁点をこの点において無限小厚みを有する翼形上下面の2点に分離し、この新しい2点で渦分布の強さの絶対値が等しくなるようにする。このとき、この2点における渦分布の大きさを cusp をなす翼形の後縁における渦分布とみなす。これにより渦特異点解法を任意の後縁形状を有する非圧縮性ポテンシャル流れに適用することができる。

以上のような改良を加えることにより、所要の非圧縮性ポテンシャル流れがえられ、渦特異点解法の実用性が示される。渦特異点解法による非圧縮性ポテンシャル流れ計算のフローチャートを図2に示す。

図3および4に従来の渦特異点解法の参考として、翼形 NACA0010、節弦比1.0、迎え角および翼列食違い角がともに零で、後縁が渦み点となる場合の翼表面上の圧力分布  $S$  についての数値計算例を示す。ただし、

$$S = (P_s - P) / (1/2 \cdot \rho \cdot |w_\infty|^2) = |w/w_\infty|^2. \quad (1)$$

図中には後縁形状が cusp をなす場合についての Schlichting<sup>9)</sup> による結果を同時に示してある。図3は翼周を等分割し、かつ、2本の折線でパネルを近似した場合の計算結果を示す。翼形代表点の個数を増加させることにより、Schlichting の結果に近づくが、前後縁部にピークが残る。図4はパネルを曲線近似したものである。翼後縁形状が cusp をなす翼列翼についてさらに積分核の取り扱い、および渦み点における渦分布の改良を加えて求めた翼表面圧力分布についての計算結果を図5に示す。図中には翼形代表点の個数の与え方にもなう影響を明らかにするために、代表点個数が38, 58, 78および118 (パネル数で59) である場合のそれぞれについて求めている。計算例として用いた翼形が対称翼であること

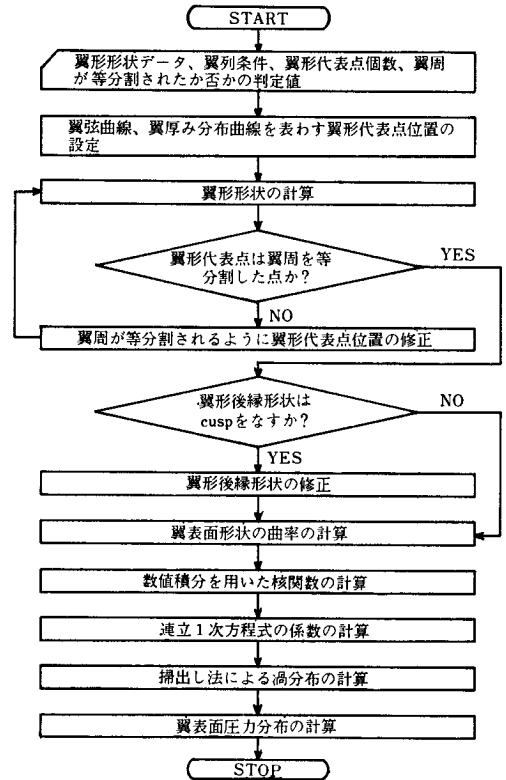


図2 非圧縮性ポテンシャル流れを求める解法フローチャート

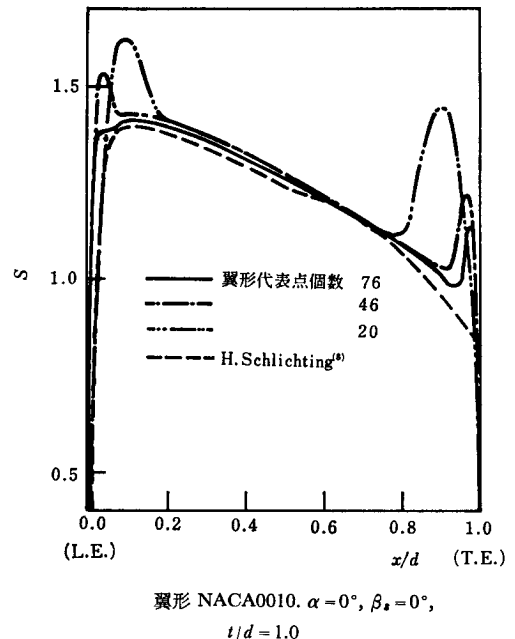


図3 非圧縮性ポテンシャル流れ

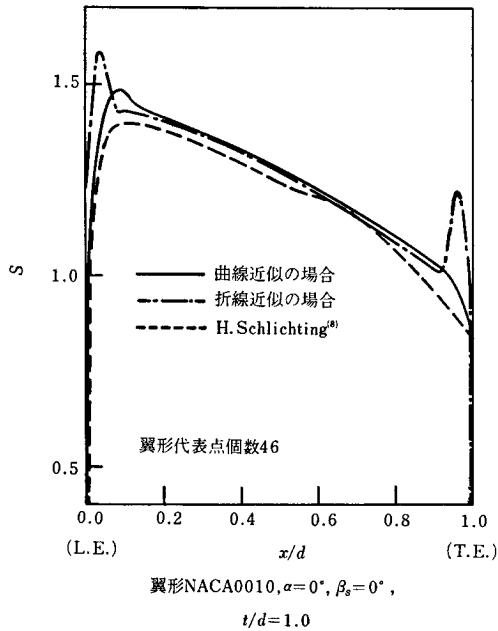


図4 パネルを曲面近似した場合の圧力分布

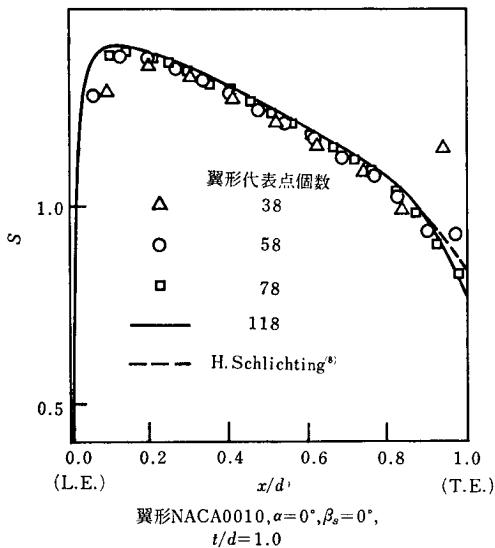


図5 翼形代表点個数の影響

より、図では代表点個数78でほぼ満足できる結果がえられているが、非対称翼ではさらに個数を追加する必要がある。

#### 4. 亜音速圧縮性ポテンシャル流れの計算

二次元翼列を過ぎる亜音速圧縮性ポテンシャル流れを求める従来の理論解法としては摂動法、ホドグラフ法、

流線解析法および仮想吹き出し (fictitious sources) を用いる方法などがあるが、これらはすべて近似解法であり、その適用にはかなりの制約があり、また、それらによる解の信頼性および収束性などにおいても問題点があった。翼列まわりの非圧縮性ポテンシャル流れの複素速度が場所  $Z$  を変数とする解析関数として与えられるのに

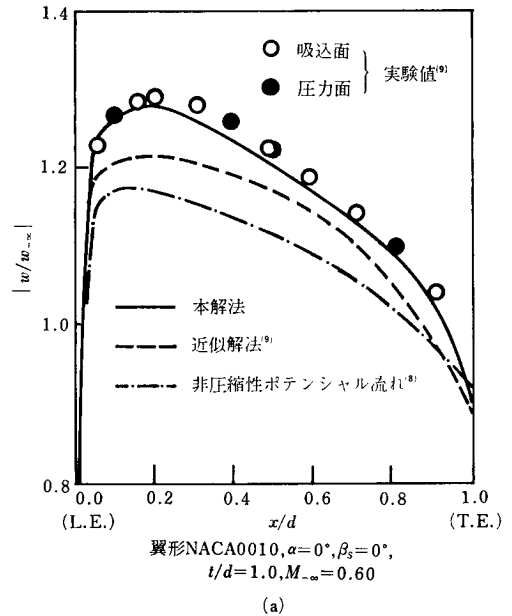


図6 翼列翼表面の速度分布

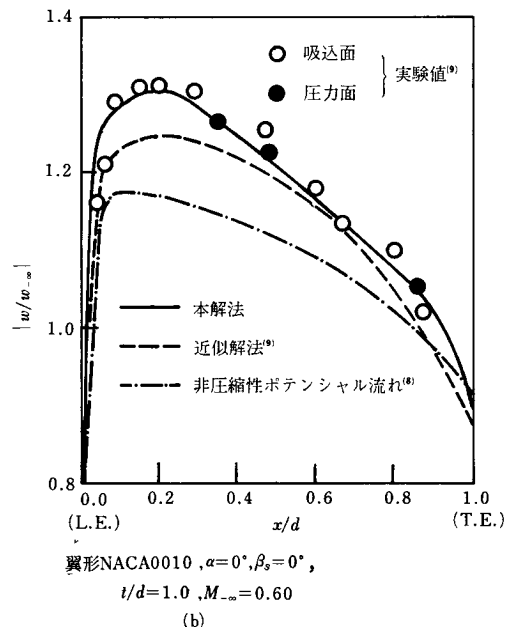


図6 翼列翼表面の速度分布

対し、亜音速圧縮性ポテンシャル流れの複素速度は、 $z$  とその共役複素数  $\bar{z}$  とを変数とする擬解析関数として与えられる。本研究においては、この擬解析関数を用いた任意の翼形形状および翼列配置に適用可能な著者ら<sup>9)</sup> の解法を用いることにより、精度の良い亜音速圧縮性ポテンシャル流れを計算してある。

#### 4.1. 実験値との対比

翼形 NACA0010, 節弦比1.0, 迎え角および翼列食違い角がともに零で、後縁形状が cusp をなす場合の翼表面上速度分布についての数値計算結果を図6に示す。摂動法の一つである Prandtl-Glauert 変換を用いた近似解<sup>9)</sup> は流入 Mach 数が0.60, 0.65のいずれにおいても実験値よりかなり小さい値をとるが、本解法による結果と実験値<sup>9)</sup> との一致は良好である。

#### 4.2. 節弦比の影響

図7に4.1における翼列条件のうち節弦比を0.75および1.25に変化させた場合の速度分布を示す。Prandtl-

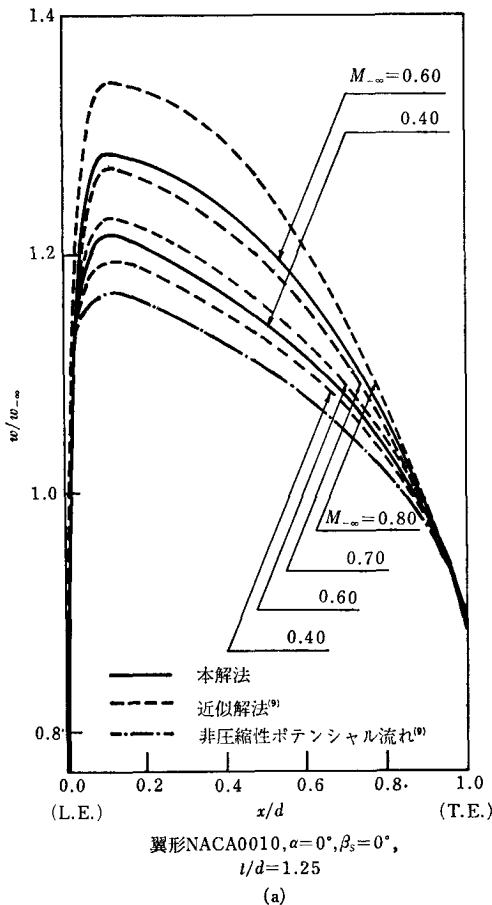


図7 節弦比の影響

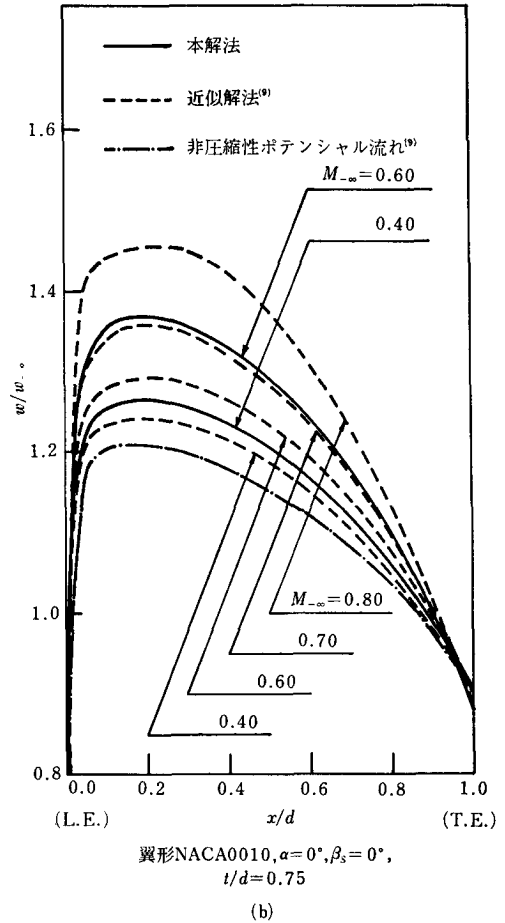


図7 節弦比の影響

Glauert 変換を用いた計算結果<sup>9)</sup> では、流入 Mach 数が0.8まで亜音速圧縮性ポテンシャル流れを与えているが、本解法では求められない。

#### 4.3. 迎え角の影響

4.1における翼列条件のうち、迎え角を $5^\circ$ および $10^\circ$ に変化させた場合の翼表面上の圧力分布を図8に示す。ただし、圧力分布  $S$  としては、次式で示すものを用いてある。

$$\begin{aligned} S &= (P_s - P) / (1/2 \cdot \rho_\infty \cdot |w_\infty|^2) \\ &= 1/(\gamma \cdot M_\infty^2) \cdot (P/P_\infty) \cdot (\rho_s/\rho) \cdot \\ &\quad [(\gamma-1) \cdot M^2 + 2 - 2 \cdot \rho/\rho_s]. \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、

$$P/P_\infty = [1 + (\gamma-1)/2 \cdot M_\infty^2 \cdot (1 - |w|^2/|w_\infty|^2)]^{\gamma/(\gamma+1)}, \quad (3)$$

$$\rho_s/\rho = [1 + (\gamma-1)/2 \cdot M_\infty^2]^{1/(\gamma-1)}. \quad (4)$$

なお、流入 Mach 数  $M_\infty$  としては0.40および0.60について求めてある。

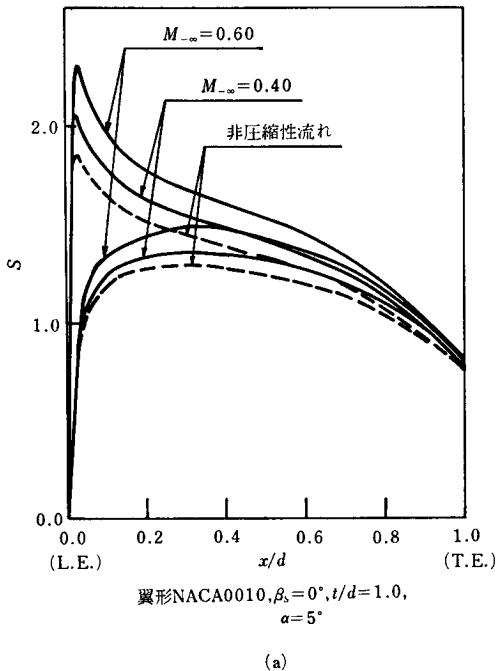


図8 迎え角の影響

## 5. 圧縮性境界層についての考察

流れにおよぼす粘性の影響を加味するために、本研究では翼周上に発達する圧縮性境界層について考察する。

具体的な境界層の取り扱いでは既知である翼列翼を過ぎる亜音速圧縮性ポテンシャル流れを用いて、翼列翼前縁より後縁分岐点までに発達する圧縮性境界層排除厚を翼の吸込面(添字  $s$ ) および圧力面(添字  $p$ ) についてそれぞれ計算する。このとき、翼周に発達する境界層は完全乱流とし、翼表面は断熱壁、Prandtl 数は1.0、境界層内の静圧は翼周の法線方向に一定とする。なお、簡単化のために亜音速圧縮性ポテンシャル流れにおける後縁分岐点は翼後縁に一致するとおく。

境界層の近似計算における特性値として、運動量損失厚  $\theta$ 、形状係数  $H$  および排除厚  $\delta^*$  を、またその近似手法としては、Englert<sup>(5)</sup> による計算法を用いる。境界層排除厚  $\delta^*$  は  $\theta$  および  $H$  を用いて、

$$\delta^* = \theta \cdot H. \quad (5)$$

なお、この手法によっては  $\delta^*$  および  $\theta$  をはく離点までしか与えることができないので、はく離する場合には、はく離点の直前まで計算を実行する。

### 5.1. 排除厚を加味した翼形状

境界層が存在することにより、翼形状が排除厚  $\delta^*$  分だけ翼厚みを増加したと同じ効果をポテンシャル流れ

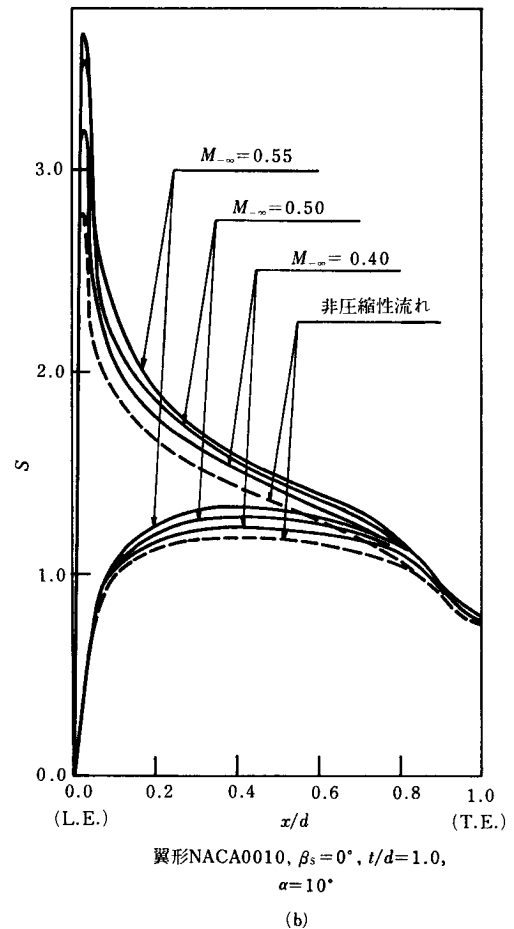


図8 迎え角の影響

に与える。このために排除厚を加味した仮想の翼形状を計算する。一般に排除厚  $\delta^*$  は翼の吸込面および圧力面で同一でないために、排除厚を考慮するには、まず翼形状の厚みを次のように  $\Delta y_i$  だけ翼周の法線外向きに増加させる。

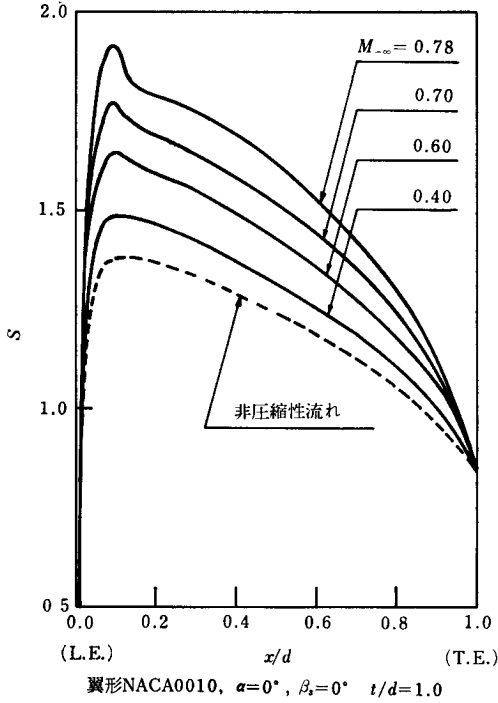
$$\Delta y_i = 1/2 \cdot (\delta_s^* + \delta_p^*) \quad (6)$$

また、翼弦曲線の変化分  $\Delta y_c$  は、

$$\Delta y_c = 1/2 \cdot (\delta_s^* - \delta_p^*) \quad (7)$$

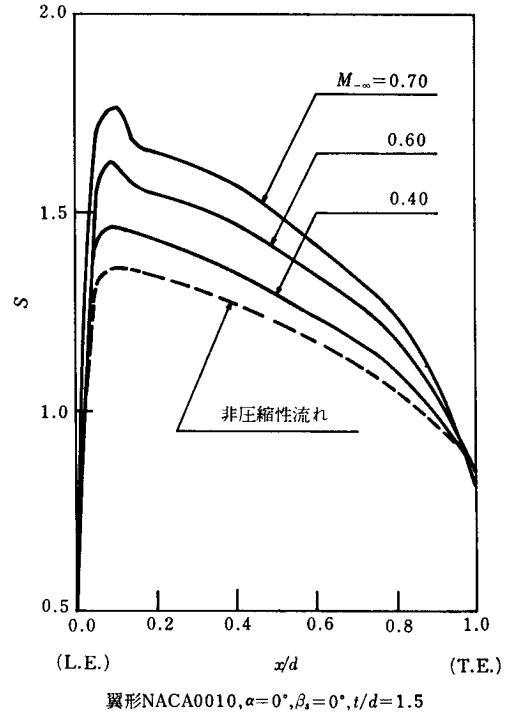
この  $\Delta y_i$  および  $\Delta y_c$  を加味した翼形における翼弦曲線を  $y_c$  とし、新しい翼形に対しても、後縁分岐点は後縁  $(x_r, y_r)$  に一致するとおく。

なお、新しい翼形に対しても亜音速圧縮性ポテンシャル流れを求めるが、翼表面上の圧力分布におよぼす影響は少ないと考えられるので、圧縮性流れ計算の基礎となる非圧縮性ポテンシャル流れとしては、元の翼形における同一のものを用いる。



(a)

図9 節弦比の影響 (境界層加味)



(b)

図9 節弦比の影響 (境界層加味)

## 5.2. 翼表面圧力分布

迎え角および翼列食違い角がともに零の場合について、圧縮性境界層排除厚を加味して計算した翼表面圧力分布を図9に示す。節弦比としては1.0および1.5の2種類について求めているが、排除厚の圧力分布におよぼす影響はわずかであるために排除厚を加味しない結果は図示していない。

なお、翼厚みが増大すれば  $|w|/|w_{-\infty}|$  の比が大きくなることより、さらに理論計算結果が実験値に近づくことは明らかである。

## 6. 機械的エネルギー損失

本解法における手法では、亜音速圧縮性ポテンシャル流れが翼列無限下流をも含めて計算されるために、ターボ機械の性能を表わすパラメータである流出角および機械的エネルギー損失は翼列無限下流の複素速度を用いて容易に求まる。ただし、本論文では対称翼よりなる翼形で、翼列食違い角が零の場合についてのみ扱っているため、流出角は常に零である。

翼表面上の境界層を考慮する場合には翼面における速度零から薄い境界層外縁のポテンシャル流れの速度まで

の大きな速度差は翼列無限下流で一樣となり、このとき静圧もまた一定となる。翼列無限下流における機械的エネルギー損失  $\Delta E$  を次のようにとる。

$$\Delta E = C_p \cdot (\rho_{-\infty} T_{-\infty}^* - \rho_{+\infty} T_{+\infty}^*) \quad (8)$$

ただし  $T_{-\infty}^*$   $T_{+\infty}^*$  はそれぞれ翼列無限上、下流における流れのせき止め温度を示す。せき止め温度  $T^*$  は次のように表わされる。

$$T^* = T \cdot [1 + (k-1)/2 \cdot M^2] \quad (9)$$

また、局所温度  $T$  は、

$$T = a^2 / (k \cdot g \cdot R) = 1 / (k \cdot g \cdot R) \cdot |w|^2 / M^2 \quad (10)$$

式(10)より、せき止め温度  $T^*$  は、

$$T^* = 1 / (k \cdot g \cdot R) \cdot |w|^2 / M^2 \cdot [1 + (k-1)/2 \cdot M^2] \quad (11)$$

式(11)を(8)に代入すれば、

$$\begin{aligned} \Delta E = C_p / (k \cdot g \cdot R) \cdot \{ \zeta_{-\infty} \cdot |w_{-\infty}|^2 / M_{-\infty}^2 \cdot \\ [1 + (k-1)/2 \cdot M_{-\infty}^2] - \zeta_{+\infty} \cdot |w_{+\infty}|^2 / M_{+\infty}^2 \cdot \\ [1 + (k-1)/2 \cdot M_{+\infty}^2] \} \end{aligned} \quad (12)$$

ただし、比熱比  $k$  としては等エントロピ流れにおける  $\gamma$  を用いる。

なお、翼列無限下流における機械的エネルギー損失  $\Delta E$  を次のような損失係数  $\zeta_w$  を用いて表わす。

$$\zeta_w = \Delta E / (C_p \cdot \rho_{-\infty} \cdot T_{-\infty}^*) \quad (13)$$

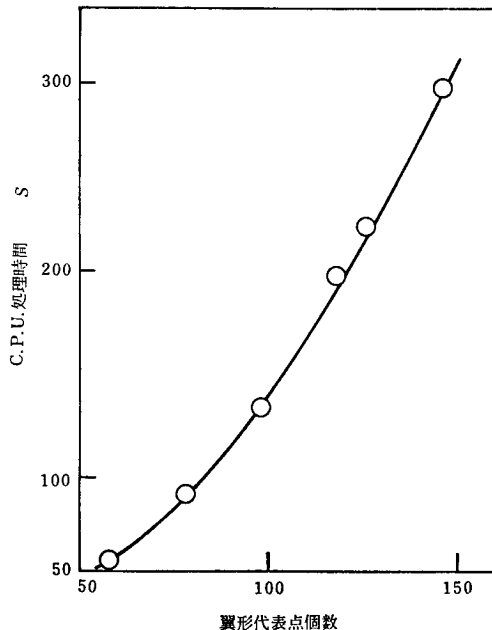
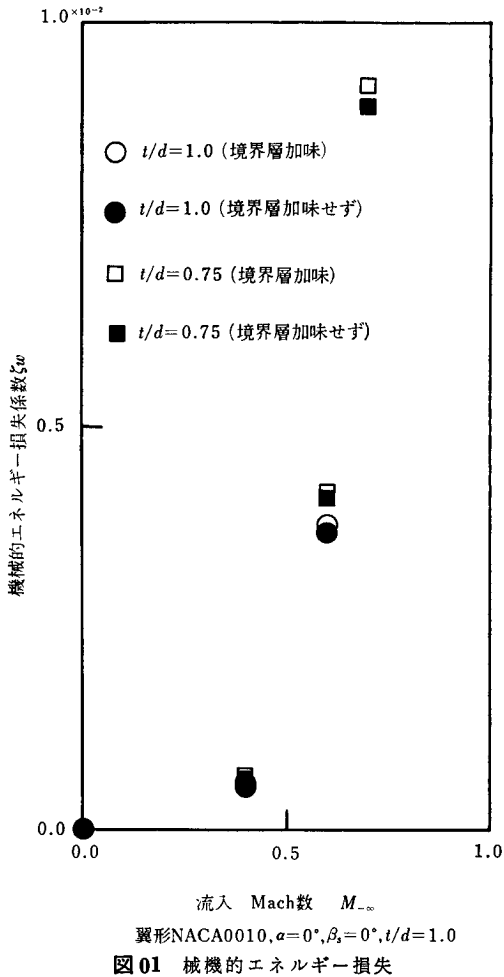


図 11 非圧縮性流れの計算に要する C.P.U. 処理時間

図10に迎え角および翼列食違い角がともに零で節弦比が0.75および1.0の場合における機械的エネルギー損失を示す。非圧縮性流れにおいては、無限上下流で軸流速度が同一であるために機械的エネルギー損失は零であるが、圧縮性流れでは、機械的エネルギー損失は変化し、節弦比が大きい方が、また、圧縮性境界層の影響を加味する方が大きい値として求められる。

## 7. 数値演算処理についての検討

本研究における数値計算は、本学電子計算機センター設置の FACOM 230-28 によった。数値演算の実行に当っては数値計算結果の精度とその処理経費とのかね合いが関心事となる。まず、非圧縮性ポテンシャル流れの計算においては計算精度は翼形代表点個数で表わされる。図11に翼形代表点個数と C.P.U. (中央処理装置) 処理時間との関係を示す。ただし、非圧縮性流れの計算に要す

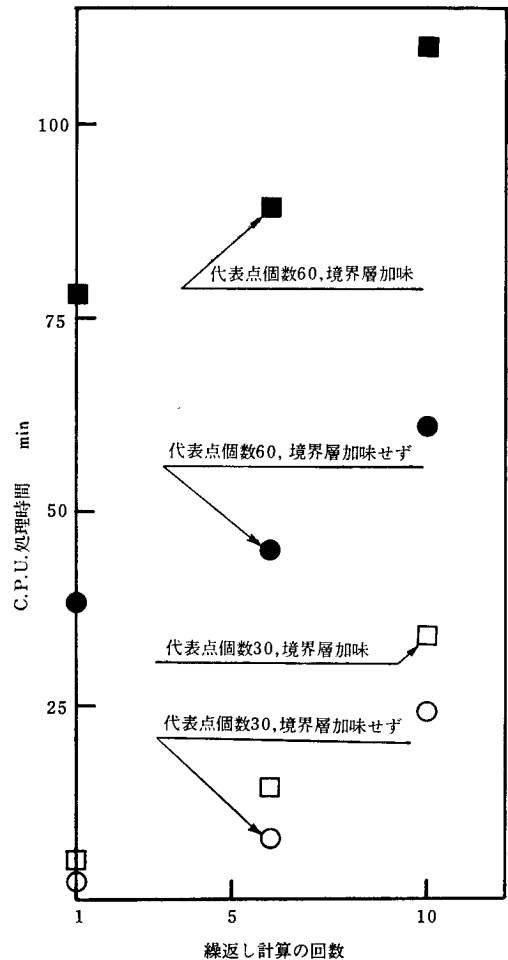


図 12 圧縮性流れの計算に要する C.P.U. 処理時間



る処理時間は比較的短いので計算機容量の許す範囲内で大きくとることが望ましい。

ついで、境界層を加味、または加味しない圧縮性ポテンシャル流れの計算におけるその計算精度は翼形代表点の個数および繰返し計算の回数によって表わされる。図12に翼形代表点個数30および60におけるC.P.U. 処理時間を示す。処理に要する時間は代表点個数および繰返し回数にほぼ比例するが、処理時間が長いためにこれらの値を大きくすることは必ずしも実用的であるとは考えられない。翼列設計に利用できる数値的な資料をうるためには、翼形代表点個数を80以上とすることが望ましいが、流れを系統だっ取り扱うための本研究においては、翼形代表点個数を30、収束に要する繰返し回数を6回とした。

## 8. ま と め

本研究において改良された渦特異点解法は非圧縮性ポテンシャル流れを求める実用的な手法であることが確められた。

翼列翼まわりの循環の値が零となる圧縮性翼列流れの計算においては、初期値としての非圧縮性流れの解の影響を受け、圧縮性流れへの収束が必ずしも良好とは言えない場合があったために、具体的な数値計算手法の改良を行なった。翼形代表点個数30は必ずしも望ましいものではないが、初期値である非圧縮性ポテンシャル流れの速度の偏微分値を適切に設定すれば、厳密解法が適用でき、かつ、十分実用的であることが示された。

## 謝 辞

本研究は亜音速ポテンシャル流れの厳密解法に関する一連の研究の一部であり、東京都立大学教授平山直道博士の御指導を受けました。日頃よりの懇切なる御指導に対しまして厚く御礼申し上げます。

圧縮性流れの数値計算の実行には、機械工学科技術職員安東洋氏、当時、流体工学研究室所属の卒論学生であった昭和50年度の鈴木正道、古川嘉彦の両氏および昭和51年度の大窪政克、古林康紀の両氏の協力をえました。また、非圧縮性ポテンシャル流れの計算手法の改良には昭和51年度の沢井克典氏に負うところが非常に大きい。これら各氏に謝意を表します。

(昭和52年9月30日 受理)

## 参 考 文 献

- 1) L. Speidel, Ingenieur-Archiv, **22** (1954), 295-322.
- 2) L. Speidel und N. Scholz, VDI-Forschungs Heft 464, 1-36.
- 3) 宮崎, 平山, 前田, 日本機械学会第 858 回講演論文集, 750-8 (昭和50年8月).
- 4) Oellers, H. J., T.H. Aachen, 1961.
- 5) Englert, G. W., NACA TN 4022.
- 6) 白倉, 日本機械学会論文集, **21**-108 (第3部) (昭和30年), 577-582.
- 7) 海老原, 日本航空宇宙学会誌, **20**-217 (昭和 47 年 2 月), 63-75.
- 8) Schlichting, H., V.D.I.-Forschungs Heft 447.
- 9) Feindt, E.G. und Schlichting, H., Z.A.M.P., **9b**, 1958, 274-284.