

離散変数と構造物の最適設計

菊田 征勇*・松井 邦人**・新延 泰生***・大平 忠之****

Optimal Design of Structure with Discrete Design Variable

By Yukio Kikuta*, Kunihito Matsui**, Yasuo Niinobe***

and Tadayuki Ohira****

Synopsis: A number of structural optimization theories have been developed for last quarter of a century, during which a remarkable progress has been made. Most optimization algorithms have focused on the problems with continuous design variables. However, in design practices, engineers frequently encounter problems in which discrete design variable are required. They also want several good design candidates from which they can choose, instead of obtaining a supposedly best solution under specified conditions. The optimization theories currently available can not satisfy their requests.

This paper presents an approach to solving the problems of engineers' concern.

要旨：現在まで約25年間、構造物の最適設計の研究が進められ、著しい進歩がなされてきた。しかし、その研究の大部分は、設計変数を連続量として取扱ったものであり、設計技術者が実務上必要とする、離散設計変数としての研究は数が少ない。また設計者は、陽な制約条件を満たす最良の解だけでなく、広義の領域で最良となる設計を選択するために、制約条件を満たす複数の設計案を望むことがしばしばあるが、現在用いられている最適設計のアルゴリズムでは解決できない。

本研究は、これらの問題を解決するための手法を提案するものであり、JISに規定する鋼管を用いた構造モデルの最小質量設計を行い、その有効性を示すものである。本手法は、連続設計変数として扱う第1段階と、離散設計変数として扱う第2段階とから成っている。第2段階では、第1段階で求めた最適解を基準とした目的関数の下限および上限を新たに制約式に加えた閉領域で、設計案をすべて抽出し、目的関数の小さなものから順に整理している。

計算例の結果から次のようなことが結論づけられる。連続設計変数としての最適解に近い離散設計変数の組合せは、離散設計変数としての最適解とは必ずしも言えない。また、離散設計変数の数が増えると、考慮すべき断面の組合せの数は非常に多くなるが、制約条件を満足する組合せの数はそれに較べて著しく少ないので、効率の改善を図る必要がある。それには、CPUタイムの大部分が構造解析に費やされるので、構造物の応答の感度解析を利用し、さらに規格材料のデータベースを利用すれば、効率良く結果が得られると思われる。

1. ま え が き

構造物の最適設計の研究は、現在まで約25年間数多くなされてきているが、設計変数を離散変数として扱ったり、あるいは離散的な断面寸法を設計に用いる研究は数が少ない^{1)~6)}。通常行われている構造物の最適設計では、設計変数は連続変数として取扱われており、連続的に変化する部材寸法が利用できるものとしている。しかし、実際に利用できる部材断面は、不規則に変化する離

*工学部土木工学科 教授

Professor, Civil Engineering Division

**東京電機大学理工学部建設工学科 教授 Ph.D.

Professor, Dept. of Civil and Structural Engineering, Tokyo Denki University

***東洋大学工学部土木工学科 助教授 工学博士

Associate Professor, Dept. of Civil Engineering, Toyo University, Dr. of Engineering

****工学部土木工学科 技術職員

Technical Staff, Civil Engineering Division

散的な寸法から成っていて、しかも有限であるので、連続設計変数として得られた最適解は、離散的な断面寸法には直接結びつかないことになる。

ところで、規格材料を部材として用いる場合、応力・変位・板厚等の陽な設計制約条件を満たす最良の解を求めるだけでなく、製作・施工・経済性をも含む広義の領域で最適となる設計を選択するために、制約条件を満たす複数の設計案を望むことがしばしばある。それらの設計案の中から、設計者の判断により然るべき設計案を選ぶことができれば、設計上の自由度は広がり、設計者にとって大変都合が良いと思われる。ところが、現在行われている構造物の最適設計の理論では、設計者のこのような要求にこたえることができない。

今回 JIS に断面寸法が規定されている鋼管を部材として用いるトラスの最小質量設計を行い、制約条件を満足する部材の組合せを幾組か選び出す手法を示す。この手法は 2 段階に分れる。第 1 段階は、連続設計変数として最小質量設計を行い、最適構造物の最小質量および最適部材寸法を見出す。第 2 段階は、設計変数を離散変数として扱い、連続設計変数として得られた最適値を基にして、目的関数の下限および上限を新たに制約式に加えた閉領域で、制約条件を満足する設計変数をすべて抽出し、目的関数の小さな順に整理する。

2. 最適化問題の定式化

連続設計変数として扱う第 1 段階および離散変数として扱う第 2 段階は、次のように定式化される。ここでは、最適化の尺度として構造物全体の質量（コスト）を選び、設計変数としては部材断面積を用いている。

第 1 階段 (b は連続変数)

$$\text{目的関数} \quad \phi_0(b) \rightarrow \text{最小化} \quad (1)$$

$$\text{剛性方程式} \quad K(b)z = Q \quad (2)$$

$$\text{制約条件} \quad \phi_i^c(b, z) \leq 0, \quad i=1, 2, \dots, p_1 \quad (3)$$

$$\phi_i^s(z) \leq 0, \quad i=p_1+1, p_1+2, \dots, p_2 \quad (4)$$

$$\phi_i^d(b) \leq 0, \quad i=p_2+1, p_2+2, \dots, p_3 \quad (5)$$

第 2 階段 (b は離散変数)

$$\text{目的関数} \quad \phi_0(b) \quad (6)$$

$$\text{剛性方程式} \quad K(b)z = Q \quad (7)$$

$$\text{制約条件} \quad \phi_i^c(b, z) \leq 0, \quad i=1, 2, \dots, q_1 \quad (8)$$

$$\phi_i^s(z) \leq 0, \quad i=q_1+1, q_1+2, \dots, q_2 \quad (9)$$

$$\phi_i^d(b) \leq 0, \quad i=q_2+1, q_2+2, \dots, q_3 \quad (10)$$

ここに、 $b=[b_1, b_2, \dots, b_m]^T$ は設計変数、 $z=[z_1, z_2, \dots, z_n]^T$ は状態変数、 $K(b)$ は $n \times n$ の剛性マトリックス、 Q

は $n \times 1$ の外力ベクトルである。また式(3)および(8)は部材応力に関する制約である。座屈応力は、オイラー座屈を考慮している。連続設計変数の場合、各部材の断面 2 次モーメント I_i は、設計変数 b_i の 2 乗に比例するものとして、 $I_i = \alpha b_i^2 (i=1, 2, \dots, m)$ と仮定している。式(4)および(9)は節点変位に関する制約である。式(5)は細長比に関する制約である。式(10)は、コストの上限・下限、部材断面の上限・下限、同一部材断面の質量、および部材の細長比に関する制約である。

第 1 段階の連続設計変数の場合の最適化計算には、Rosen の傾斜射影法 (Gradient Projection Method) を用いる⁷⁾。

第 2 段階の離散設計変数の場合のアルゴリズムを表 1 に示す。コストの下限とは第 1 段階での最適値であり、コストの上限はこの最適値の何%増として定める。断面の上限および下限は、第 1 段階での最適値を含むように

表 1 離散設計変数の場合のアルゴリズム

Step 1:	部材断面積および断面 2 次モーメントを読み込み、回転半径を計算。
Step 2:	コストの上限、下限および各部材グループの断面番号の上限、下限を読み込む。
Step 3:	許容応力 (座屈応力を含む)、許容変位、許容細長比、同一部材断面の許容量および部材の応力の種類を読み込む。
Step 4:	各部材グループ毎に、応力の種類を考慮して、必要最小回転半径を計算。
Step 5:	各部材グループに、下限の断面番号を割り当てる。
Step 6:	割り当てられた部材の回転半径が最小回転半径以上であれば、Step 7 へ。そうでなければ Step 10 へ。
Step 7:	同一断面の質量がその許容量を越えていなければ、Step 8 へ。そうでなければ Step 10 へ。
Step 8:	コストがコストの下限未満であれば、Step 10 へ。コストの下限以上で上限以下であれば Step 9 へ。コストの上限を越えていれば、Step 11 へ。
Step 9:	応力解析を行い、許容応力および許容変位を満足していれば求める解の一つであり、結果を出力し Step 10 へ。
Step 10:	グループ 1 の断面を 1 段階大きくする。断面の上限を越えていなければ Step 6 へ。越えていれば Step 11 へ。
Step 11:	部材グループ 1 に断面番号の下限を割り当て、部材グループ 2 の断面番号を 1 段階大きくする。これが断面番号の上限を越えていなければ、Step 6 へ。断面番号の上限を越えていれば、グループ 2 に断面番号の下限を割り当て、グループ 3 の断面番号を 1 段階大きくし、Step 6 へ。このようにして、すべての断面番号の組合せをチェックすれば終了。

定める。また、同一部材断面の許容量は、手持ち材料の量あるいは利用できる材料の量を定めたものである。このアルゴリズムでは、部材断面の上限および下限の間に含まれる部材のすべてについて各種の制約条件をチェックすることになるが、CPU タイムの主要部分は構造解析に費やされるので、構造解析を必要とする部材応力や節点変位の制約条件の判定は後にして、構造解析に至るまでに、不適格な組合せをいかに外すかが眼目である。たとえば、限界細長比に関する部材応力の種類（圧縮または引張）については、第1段階の解析結果を用いており、第2段階での構造解析結果から細長比の適格性を判断するものではない。

なお、第1段階での収束判定は、第2段階でも制約条件のチェックを行うので、それ程厳しくなくても良い。

3. 計算例

図1に示す3部材トラスおよび図2に示す10部材トラスの計算例を示す。使用した鋼管は、JIS G 3444の中から、断面積が増加するにつれて断面2次モーメントも

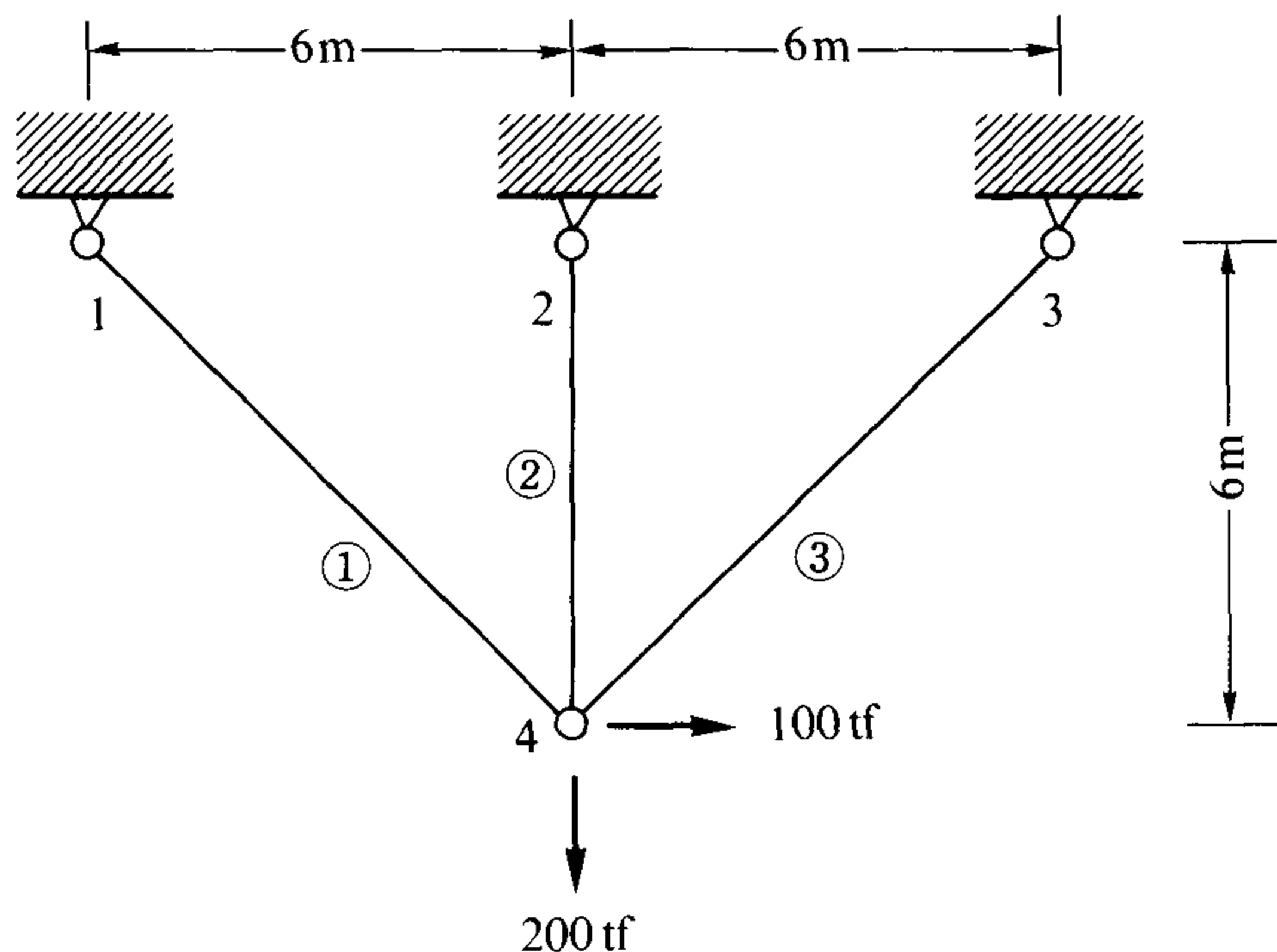


図1 3部材トラス

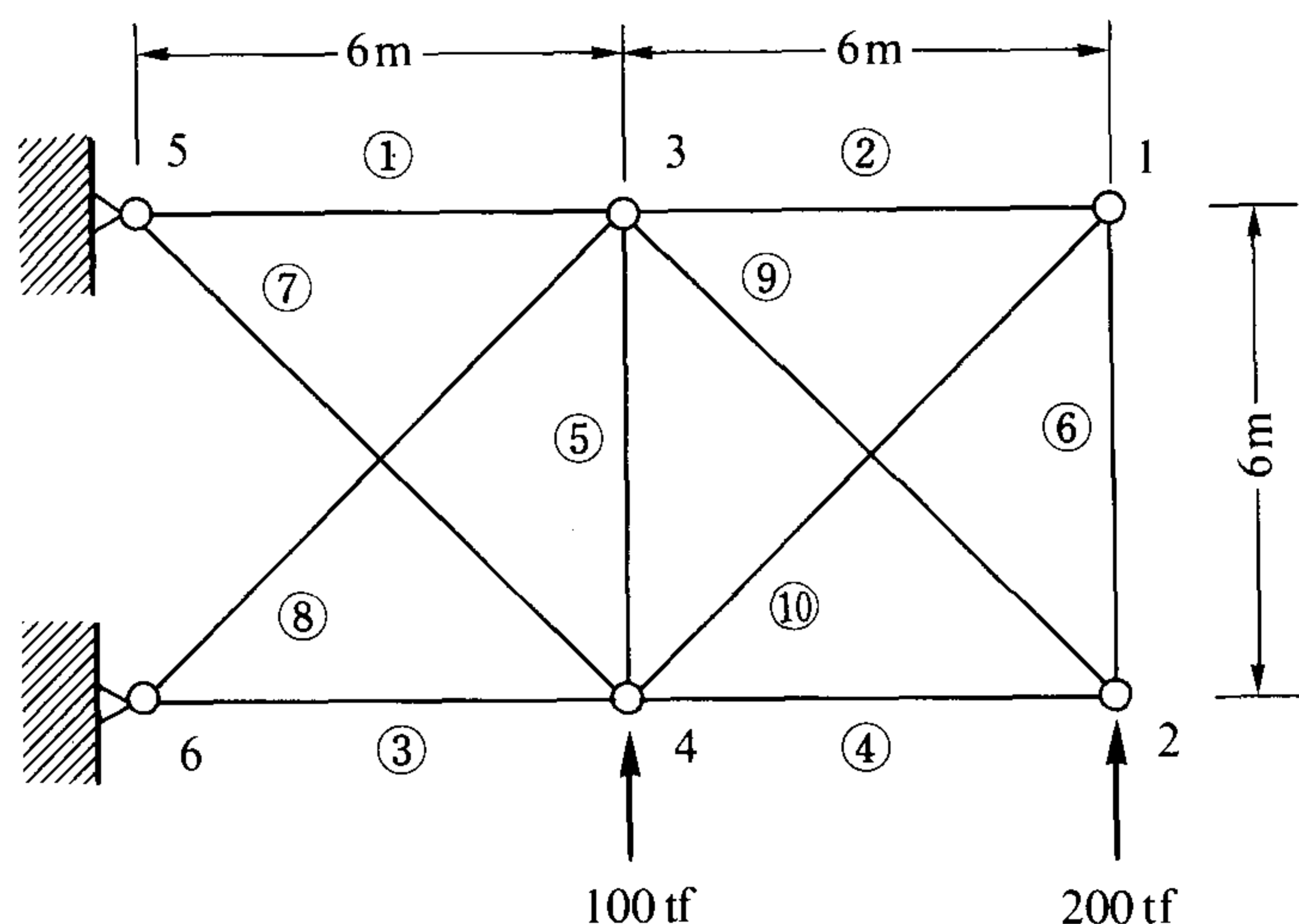


図2 10部材トラス

増加する組合せを選んだ。これを表2に示す。材質はSTK41で、ヤング係数 $E=2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2 \{206 \text{ GPa}\}$ 、質量 $\rho=7,850 \text{ kg/m}^3$ である。断面番号1—5の許容量は0.5 t, 6—10は1.0 t, 11—16は2.0 t, 17—22は3.0 tとした。細長比は、道路橋示方書・同解説¹⁰⁾を参照して、引張部材は200以下、圧縮部材は120以下とした。連続設計変数の場合、 $I_i = \alpha b_i^2$ の α は、表2から1.1969—3.5614となるが、最適解のコストが小さめになる $\alpha=3.5614$ とした。許容圧縮応力および許容引張応力はともに、 $1,400 \text{ kgf/cm}^2 \{137 \text{ MPa}\}$ である。許容座屈応力は、オイラー座屈応力/1.70である。変位制約は考えていない。また構造物の対称性を考慮して、3部材トラスは2グループに、10部材トラスは6グループに分けている。

i) 3部材トラス

連続設計変数の場合の結果を表3に示す。第2段階では、この最適値を基にして、グループ1およびグループ2の部材はともに、断面番号10—15の中から選ぶことにする。断面番号の組合せは、 $6 \times 6 = 36$ 通りある。この中で、コストの上限を5%増から25%増まで変えた場合に、考慮した組合せの数（制約条件の判定の対象とした

表2 鋼管断面

断面番号	断面積 (cm^2)	断面2次モーメント (cm^4)
1	11.17	172
2	15.40	357
3	19.13	438
4	22.72	734
5	26.32	114×10
6	29.94	168×10
7	39.61	219×10
8	49.27	421×10
9	58.91	719×10
10	69.13	105×10^2
11	87.36	132×10^2
12	98.00	147×10^2
13	112.4	222×10^2
14	126.7	318×10^2
15	141.1	439×10^2
16	155.5	588×10^2
17	167.1	730×10^2
18	198.5	122×10^3
19	227.3	184×10^3
20	301.9	242×10^3
21	340.2	346×10^3
22	378.5	479×10^3

表 3 3 部材トラス (連続変数)

グループ	断面積 (cm ²)	部材	圧縮 又は 引張	作用応力 許容応力
1	91.75	1	引張	1.000
		3	圧縮	0.101
2	94.02	2	引張	0.899
コ ス ト		1665.15 kg		

組合せの数), その中で表 1 に示す Step 9 まで進んだ回数 (応力解析をした回数) および応力制約も満足した組合せの数 (条件を満足する組合せの数) を表 4 に示す。当然のことながら, コストの上限を大きくすると考慮すべき組合せの数も増加する。なお, この例では, 応力解析をした断面の組合せはすべて応力制約を満足している。

コストの上限がコスト 10% 増の場合の解の状況を, コストの小さい順に番号づけして表 5 に示す。表 3 では部材 1 が許容応力いっぱいになっていたが, 表 5 では許容応力いっぱいの部材は 1 本もない。また, 番号 5 の組合せで, 部材 3 は引張力となって, 連続設計変数の解の場合の圧縮応力と異なっている。これは, 部材グループ 1 の断面積が部材グループ 2 の断面積より大きくなったためである。もちろん細長比の制約条件は満足している。

図 3 は, 設計空間と得られた解の状況を示したものである。設計変数の数が 2 なので, 制約条件等を平面で表示することができる。横軸に離散設計変数 b_1 (部材グループ 1 の断面積), 縦軸に離散設計変数 b_2 (部材グループ 2 の断面積) を取り, 該当する断面積のところに断面番号 10—15 を記入している。設計空間は, 部材 1 および 2 の許容引張応力, グループ 2 の断面積の上限および下限, およびコスト 10% 増で囲まれた領域である。制約条件を満足する組合せは 6 通りあり, 表 5 の番号と対応

づけて 1—6 の番号をつけている。

ところで, 連続設計変数の解から離散設計変数の解を見つけるには, 一般に, 連続設計変数の解に近い離散設計変数の断面積を選ぶ。従って, b_1 および b_2 の組合せとして, $(b_1, b_2) = (11, 12)$, $(12, 11)$ および $(12, 12)$ の組合せが考えられる。図 3 を見れば, $(11, 12)$ は設計空間の外なので解ではない。最小値を与える解は

表 5 3 部材トラスの断面の組合せ (10% 増)

番号	グループ	断面 番号	部材	作用応力 許容応力	同一断面の 質量 (kg)	コスト (kg)
1	1	11	1	0.908	1163.8	1693.2
			3	0.168		
	2	13	2	0.820	529.4	
2	1	12	1	0.971	1305.5	1717.0
			3	0.059		
	2	11	2	0.912	414.5	
3	1	11	1	0.957	1163.8	1760.6
			3	0.199		
	2	14	2	0.758	596.8	
4	1	12	1	0.942	1763.1	1763.1
			3	0.088		
	2		2	0.854		
5	1	13	1	0.930	1497.4	1823.0
			3	※0.031		
	2	10	2	0.961	325.6	
6	1	11	1	0.930	1163.8	1828.4
			3	0.226		
	2	15	2	0.704	664.6	

※ 引張応力

表 4 3 部材トラスの断面の組合せの数

コストの下限 (kg)	コストの上限 (kg)	考慮した組合せの数	応力解析をした回数	条件を満足する組合せの数
1665.15 (連続変数の場合の最適値)	1748 (5% 増)	18	2	2
	1832 (10% 増)	22	6	6
	1915 (15% 増)	25	9	9
	1998 (20% 増)	27	11	11
	2082 (25% 増)	29	12	12

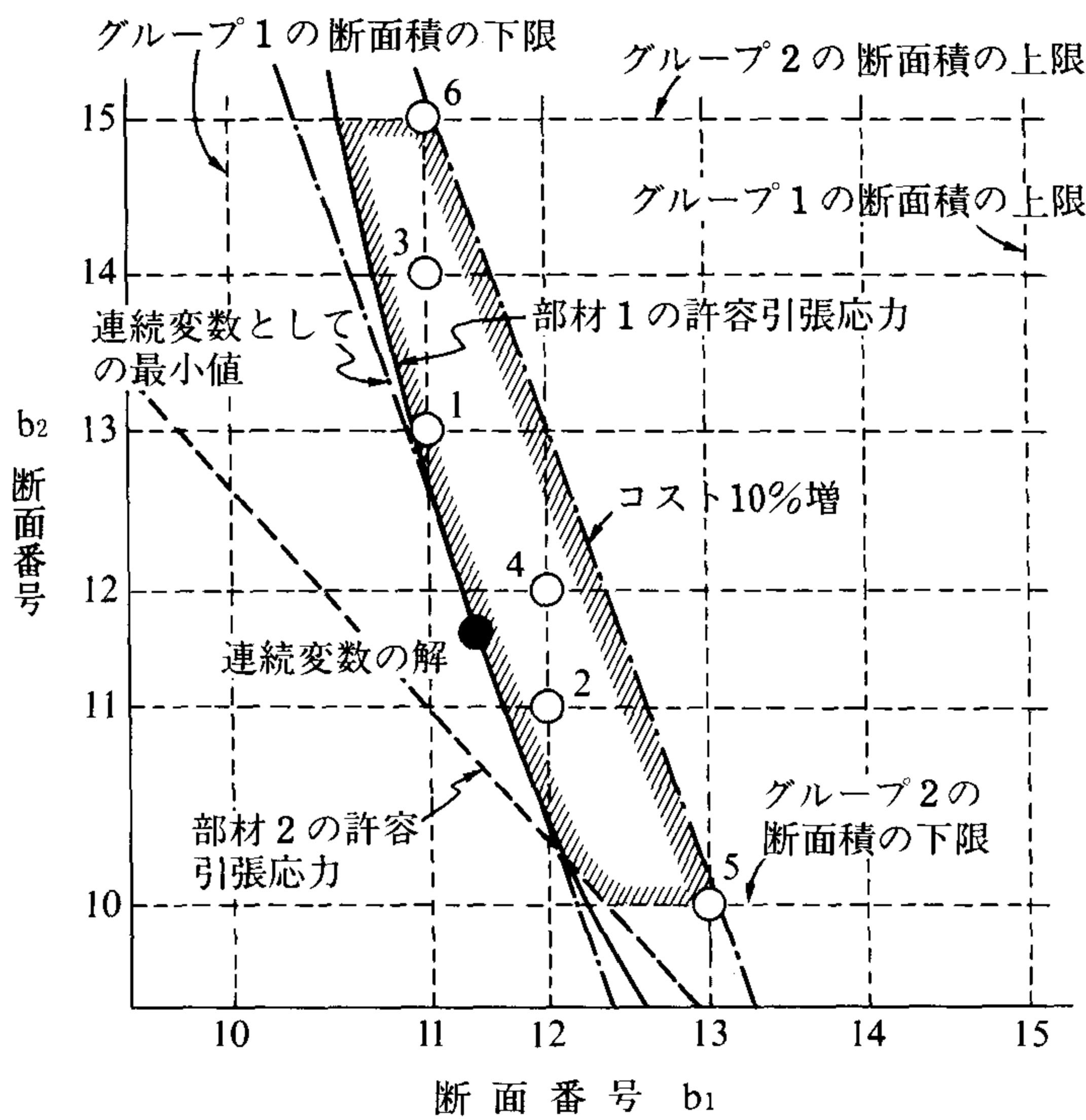


図3 3部材トラスの断面の組合せ

(11, 13) であって、(12, 11) および (12, 12) の組合せは、制約条件は満足するが最小値を与えるものではないことも分る。

この例で示すように、連続設計変数として得られた最適断面の値に近い離散設計変数の組合せは、離散設計変数の場合の最適解を与えるとは必ずしも言えない。

ii) 10部材トラス

連続設計変数の場合の結果を表6に示す。この最適断面の値を基にして、部材グループ1は断面番号18—22の中から選ぶ。以下同様にして、部材グループ2—6はそれぞれ、断面番号10—14, 4—8, 7—10, 14—19, 13—17の中から選ぶことにする。部材グループ1—6の断面の組合せは、最大限 $5 \times 5 \times 5 \times 4 \times 6 = 15,000$ 通りある。この中から、コストの上限を、コスト5%増, 10%増, 15%増と変えた場合の断面の組合せの状況を表7に示す。この例でも、コストの上限を大きくすると考慮した組合せの数も増え、応力解析をした回数も増えているが、制約条件を満足する組合せの数は著しく増加している。しかし、応力解析をした回数に較べて、最終的に制

表6 10部材トラス (連続変数)

グループ	断面積 (cm ²)	部材	圧縮 又は 引張	作用応力 許容応力
1	257.06	1	圧縮	0.945
		3	引張	1.000
2	91.08	2	圧縮	0.569
		4	引張	1.000
3	29.87	5	圧縮	0.302
4	52.17	6	圧縮	0.993
5	161.50	7	圧縮	1.000
		8	引張	0.873
6	128.80	9	圧縮	1.000
		10	引張	0.569
コ ス ト		7533.20 kg		

約条件を満足する断面の組合せの数は少ない。

コストの上限がコスト10%増の場合の解の状況を、コストの小さい方から番号をつけて、表8a—8dに示す。これらの表を見ると、せいぜい1部材ぐらいが許容応力いっぱいになっているくらいで、連続設計変数の場合に較べて、応力的に余裕のある部材が多い。これは、利用できる部材断面積が離散的でかつそれらの間隔が離れているからであろう。また、3部材トラスの場合とはちがって、この例では、離散設計変数の場合の部材応力の符号は、連続設計変数の場合の部材応力の符号と完全に一致している。

ところで、10部材トラスでは設計変数が6なので、設計空間は6次元空間となり、3部材トラスの場合とは異なり、設計空間を簡単に図示することができない。そこで図4には、横軸に部材グループ番号を取り、縦軸に部材断面積を取り、該当する断面積のところに断面番号4—22をつけて、表8a—8dに示す解の断面の組合せの状況と、連続設計変数の解とを示した。図中、●は連続

表7 10部材トラスの断面の組合せの数

コストの下限 (kg)	コストの上限 (kg)	考慮した組合せの数	応力解析をした回数	条件を満足する組合せの数
7533.20 (連続変数の場合の最適値)	7910(5%増)	8178	536	0
	8278(10%増)	10634	570	12
	8663(15%増)	12603	1277	53

表 8 a 10部材トラスの断面の組合せ (その 1)

番号	グループ	断面 番号	部材	作用応力 許容応力	同一断面の 質量 (kg)	コスト (kg)
1	1	20	1	0.797	2843.9	8113.6
			3	0.859		
	2	12	2	0.548	923.2	
			4	0.910		
	3	4	5	0.485	107.0	
	4	10	6	0.777	325.6	
	5	17	7	0.986	2226.1	
			8	0.828		
	6	14	9	0.995	1687.9	
			10	0.599		
2	1	20	1	0.799	2843.9	8130.6
			3	0.857		
	2	12	2	0.550	923.2	
			4	0.907		
	3	5	5	0.357	124.0	
	4	10	6	0.780	325.6	
	5	17	7	0.981	2226.1	
			8	0.832		
	6	14	9	0.992	1687.9	
			10	0.602		
3	1	20	1	0.806	2843.9	8138.4
			3	0.850		
	2	11	2	0.636	822.9	
			4	0.999		
	3	8	5	0.268	232.1	
	4	10	6	0.804	325.6	
	5	17	7	0.963	2226.1	
			8	0.851		
	6	14	9	0.974	1687.9	
			10	0.620		

表 8 b 10部材トラスの断面の組合せ (その 2)

番号	グループ	断面 番号	部材	作用応力 許容応力	同一断面の 質量 (kg)	コスト (kg)
4	1	20	1	0.806	2843.9	8145.1
			3	0.850		
	2	12	2	0.544	923.2	
			4	0.914		
	3	7	5	0.274	186.6	
	4	9	6	0.905	277.5	
	5	17	7	0.964	2226.1	
			8	0.850		
	6	14	9	0.999	1687.9	
			10	0.595		
5	1	20	1	0.800	2843.9	8147.6
			3	0.856		
	2	12	2	0.553	923.2	
			4	0.905		
	3	6	5	0.338	141.0	
	4	10	6	0.784	325.6	
	5	17	7	0.977	2226.1	
			8	0.791		
	6	14	9	0.990	1687.9	
			10	0.605		
6	1	20	1	0.808	2843.9	8190.6
			3	0.848		
	2	12	2	0.548	923.2	
			4	0.910		
	3	8	5	0.243	232.1	
	4	9	6	0.911	277.5	
	5	17	7	0.958	2226.1	
			8	0.856		
	6	14	9	0.995	1687.9	
			10	0.599		

設計変数の場合の最適解である。また、⊖は離散設計変数の場合に、組合せに選ばれた断面で、数字は表 8a—8d の番号に一致している。なお、—は離散設計変数の場合に組合せの対象となった断面であるが、✕は同一部

材断面の許容量を満足しないので対象外となった断面である。

この図を見ると、コストの中で約35%を占める部材グループ 1 の断面は断面番号20に固定され、また約27%を

表 8 c 10部材トラスの断面の組合せ (その 3)

番号	グループ	断面 番号	部材	作用応力 許容応力	同一断面の 質量 (kg)	コスト (kg)
7	1	20	1	0.804	2843.9	8193.1
			3	0.852		
	2	12	2	0.558	923.2	
			4	0.899		
	3	7	5	0.295	186.6	
	4	10	6	0.792	325.6	
	5	17	7	0.969	2226.1	
			8	0.845		
	6	14	9	0.984	1687.9	
			10	0.611		
8	1	20	1	0.807	2843.9	8238.6
			3	0.850		
	2	12	2	0.563	923.2	
			4	0.895		
	3	8	5	0.263	232.1	
	4	10	6	0.798	325.6	
	5	17	7	0.962	2226.1	
			8	0.852		
	6	14	9	0.979	1687.9	
			10	0.615		
9	1	20	1	0.801	2843.9	8257.3
			3	0.855		
	2	12	2	0.525	923.2	
			4	0.932		
	3	4	5	0.426	107.0	
	4	9	6	0.874	277.5	
	5	17	7	0.976	2226.1	
			8	0.837		
	6	15	9	0.916	1879.7	
			10	0.516		

表 8 d 10部材トラスの断面の組合せ (その 4)

番号	グループ	断面 番号	部材	作用応力 許容応力	同一断面の 質量 (kg)	コスト (kg)
10	1	20	1	0.800	2843.9	8266.2
			3	0.857		
	2	13	2	0.476	1058.8	
			4	0.795		
	3	5	5	0.348	124.0	
	4	10	6	0.774	325.6	
	5	17	7	0.980	2226.1	
			8	0.834		
	6	14	9	0.998	1687.9	
			10	0.597		
11	1	20	1	0.802	2843.9	8274.3
			3	0.854		
	2	12	2	0.528	923.2	
			4	0.930		
	3	5	5	0.314	124.0	
	4	9	6	0.878	277.5	
	5	17	7	0.972	2226.1	
			8	0.841		
	6	15	9	0.913	1879.7	
			10	0.518		
12	1	20	1	0.801	2843.9	8283.3
			3	0.855		
	2	13	2	0.478	1058.8	
			4	0.793		
	3	6	5	0.329	141.0	
	4	10	6	0.777	325.6	
	5	17	7	0.976	2226.1	
			8	0.838		
	6	14	9	0.995	1687.9	
			10	0.600		

占める部材グループ 5 の断面は断面番号17に固定されていて、比較的パーセンテージの小さな部材グループの断面が変動してコストが順々に大きくなって行く様子が分る。

4. 結 論

離散設計変数を用いて構造物の最適設計を行い、複数組の最適断面を選び出す手法を開発し、2種類の構造モ

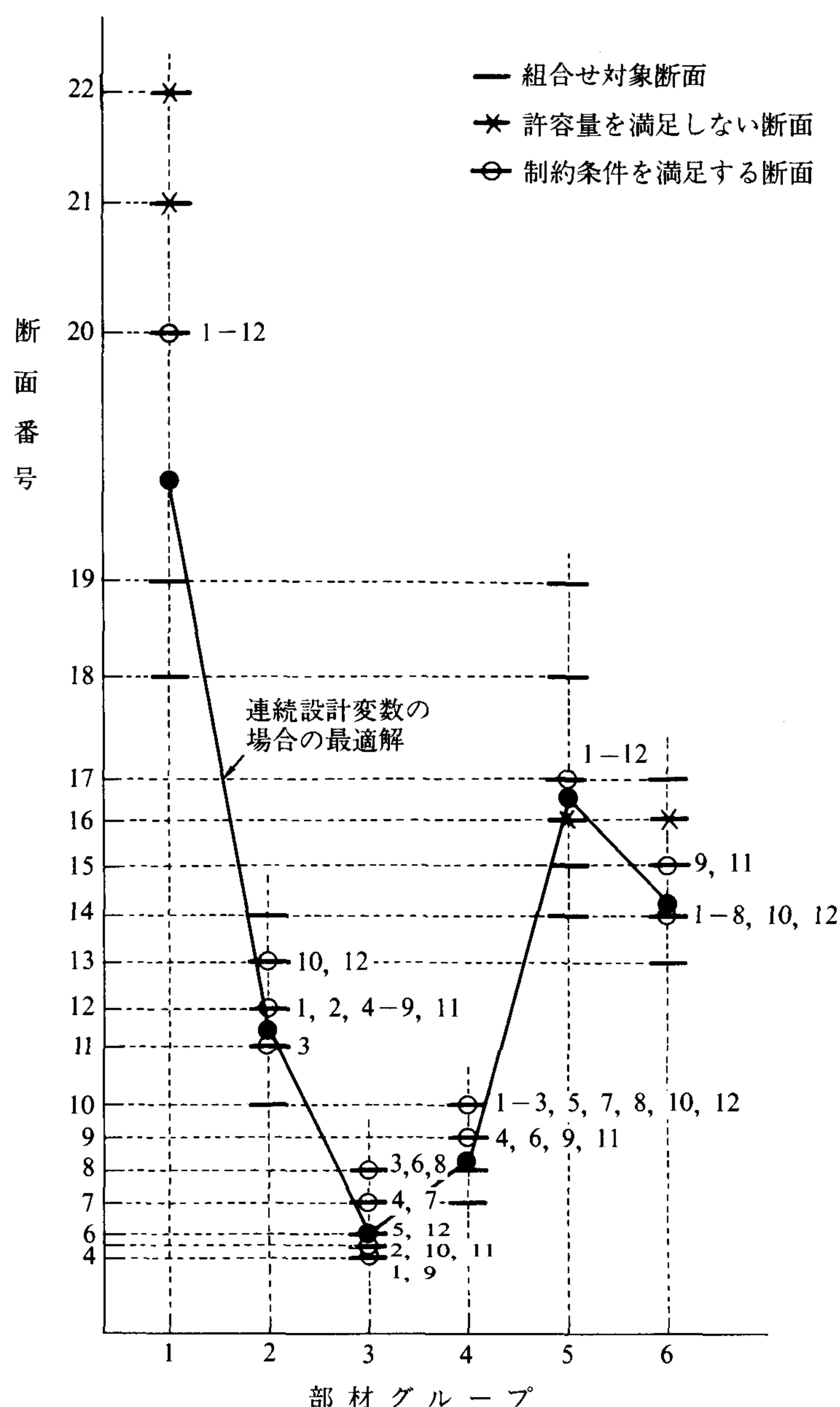


図4 10部材トラスの断面の組合せ (10%増)

デルの最小質量設計を行ってその妥当性を確認した。その結果から次のように結論を下せる。

i) 連続設計変数として得られた最適断面の値に近い離散設計変数の組合せは、必ずしも離散設計変数の最適解とは言えない。

ii) 制約条件としてのコストの上限を大きくすると、考慮した組合せの数、応力解析をする回数および制約条件を満足する組合せの数も増えるが、前二者に較べて後者の増え方が特に著しい。

iii) 離散設計変数の数が多くなると、考慮すべき組合せの数も増えるが、考慮した組合せの数に比較して、制

約条件を満足する組合せの数は、著しく少なく効率が悪い。CPU タイムの大部分は構造解析に費やされるので、第2段階での構造物の応答計算は第1段階での感度解析を利用し、さらに規格材料のデータベースを利用すれば、効率性の改善が図られると思われる。

謝辞 本研究の計算は、国土館大学電子計算機センターの Honeywell DPS 8/70 を用いて行ったことを付記し、謝意を表します。

(原稿受付 昭和61年9月28日)

参考文献

- 1) Toakley, A. R., 'Optimum Design Using Available Sections,' Journal of the Structural Division. ASCE, 94, No. ST5, 1968, pp. 1219-1241
- 2) Reinschmidt, K. F., 'Discrete Structural Optimization,' Journal of the Structural Division. ASCE, 97, No. ST1, 1971, pp. 133-156
- 3) Cella, A. and Logcher, R. D., 'Automated Optimum Design from Discrete Components,' Journal of the Structural Division. ASCE, 97, No. ST1, 1971, pp. 175-190
- 4) Annamalai, N., Lewis, A. D. M. and Goldberg, J. E., 'Cost Optimization of Welded Plate Girders,' Journal of the Structural Division. ASCE, 98, No. ST10, 1972, pp. 2235-2246
- 5) Gutkowski, W., Bauer, J. and Iwanow, Z., 'Discrete Structural Optimization,' Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, 51, 1985, pp. 71-78
- 6) Schmit, L. A. and Fleury, C., 'Discrete-Continuous Variable Structural Synthesis Using Dual Method,' AIAA Journal, Vol. 18, No. 12, December, 1980, pp. 1515-1524
- 7) Haug, E. J. and Arora, J. S., 'Applied Optimal Design,' John Wiley & Sons, Inc., New York, 1979
- 8) Cella, A., 'Properties of Discrete Optima in Structural Optimization,' Journal of the Structural Division, ASCE, 98, No. ST3, 1972, pp. 787-792
- 9) Cella, A. and Soosaar, K., 'Discrete Variables in Structural Optimization,' Optimal Structural Design—Theory and Applications, R. H. Callagher and O. C. Zienkiewicz, eds., John Wiley and Sons, New York, 1973, Chap. 11
- 10) 道路橋示方書・同解説, I 共通編, II 鋼橋編, 日本道路協会, 昭和55年