

# 固体プラズマ中の縦波に関する絶対不安定性の 電算機解析

鎌倉 勝利\*

## Computer Analysis of Absolute Instabilities for Longitudinal Waves in a Solid State Plasma

By Katsutoshi Kamakura\*

**Synopsis:** It is clarified by means of computer analysis of the dispersion relation for longitudinal waves in a solid state plasma that two modes of absolute instabilities occur in a solid state plasma of InSb. In this paper, we show the result of analysis in varying the external magnetic field, the electron-hole density in a solid state plasma and the electron-hole temperature and discuss two modes of absolute instabilities. One mode (mode I) of the absolute instability occurs in the presence of the external magnetic field (the transverse magnetic field) and the other mode (mode II) occurs though there is no magnetic field. The transverse magnetic field of above about 4 kG is required for mode I to cause the absolute instability. Absolute instabilities occur above the electron-hole density of  $2 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$  for mode I and  $2.9 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$  for mode II, respectively. Frequencies of absolute instabilities are in the region of the microwave and millimeterwave.

**要旨：**固体プラズマ中の縦波に関する分散式について電算機解析を行ない、InSbの固体プラズマ中で二種類のモードの絶対不安定性が生じることを明らかにした。本論文では外部磁界、固体プラズマ中の電子正孔密度および電子正孔温度を変化した場合の解析結果を示し、二種類のモードの絶対不安定性について検討している。絶対不安定性の一つのモード（モードⅠ）は外部磁界（横磁界）が存在する場合に生じ、他のモード（モードⅡ）は磁界が存在しない場合でも生じる。モードⅠは絶対不安定性を生じるためには横磁界が約4 kG以上必要である。絶対不安定性はそれぞれモードⅠは電子正孔密度が $2 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$ 、モードⅡは $2.9 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$ 以上で生じる。絶対不安定性を生じる周波数はマイクロ波およびミリ波領域の周波数である。

### 1. ま え が き

固体プラズマ中の波動に関する不安定性の理論は現在まで数多く報告されている<sup>1)~8)</sup>。しかしながらそれらの理論解析の多くは対流不安定性 (convective instability) と絶対不安定性 (absolute instability) とを明確に区別して扱っていない。著者等は固体プラズマ中の縦波に関する不安定性の理論解析を行ない、対流不安定性と絶対不安定性を明確に区別し、両者の不安定性がInSbの固体プラズマ中で生じることを明らかにした<sup>9),10)</sup>。対流不安定性を生じるためには外部磁界（横磁界）が約2 kG以

上必要であるが、絶対不安定性が生じるためには必ずしも外部磁界を必要としないことを報告している。しかしながらこの理論解析<sup>9),10)</sup>においては固体プラズマ中の電子および正孔密度を一定 ( $1 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$ ) としているため外部磁界を必要とする対流不安定性を示すモードは絶対不安定性は生じない。本理論解析において電子正孔密度を変化することにより対流不安定性を示すモードが密度が $2 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$ 以上で絶対不安定性に移行することが明らかにされた。即ち電子正孔密度を変化するとすでに報告した絶対不安定性の他にこのモードの絶対不安定性も生じる。本論文では固体プラズマ中の縦波の分散式<sup>9),10)</sup>を電算機を用いて数値解析を行ない、解析結果を規格化された伝播ベクトルの複素平面上に図示し、R.J. Briggs<sup>11)</sup>が示した mapping operation による解法を

\*電気工学科 教授 工学博士  
Professor, Electrical Engineering Division Dr. of Engineering

用いて InSb の固体プラズマ中で生じる二種類の絶対不安定性について明らかにしている。

## 2. 固体プラズマ中の縦波に関する分散式

固体プラズマ中の縦波に関する分散式はすでに著者等が報告しているように次式で与えられる<sup>9),10)</sup>。

$$\sum_{i=e,h} [\omega_{pi}^2 \{(\omega - kv_{0i} - jv_{ci})^2 - \omega_{ci}^2 \cos^2 \theta\}] / [(\omega - kv_{0i}) \times (\omega - kv_{0i} - jv_{ci}) \{(\omega - kv_{0i} - jv_{ci})^2 - \omega_{ci}^2\} - k^2 v_{Ti\perp}^2 (\omega - kv_{0i} - jv_{ci})^2 \sin^2 \theta - k^2 v_{Ti\parallel}^2 \{(\omega - kv_{0i} - jv_{ci})^2 - \omega_{ci}^2\} \cos^2 \theta] = 1 \quad (1)$$

ここで

$$\omega_{pi} = \left( \frac{q^2 n_{0i}}{m_i \epsilon} \right)^{\frac{1}{2}}; \text{プラズマ角周波数}$$

$$\omega_{ci} = \frac{qB_0}{m_i}; \text{サイクロトロン角周波数}$$

$$v_{ci} = \frac{\epsilon}{m_i \mu_i}; \text{衝突周波数}$$

$$v_{Ti\perp} = \left( \frac{k_B T_{i\perp}}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}}; \text{粒子の横方向の熱速度}$$

$$v_{Ti\parallel} = \left( \frac{k_B T_{i\parallel}}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}}; \text{粒子の縦方向の熱速度}$$

$v_{0i}$ ; 粒子速度

$q$ ; 電荷

$n_{0i}$ ; 粒子密度

$m_i$ ; 粒子の有効質量

$\epsilon$ ; 誘電率

$B_0$ ; 外部磁界

$\mu_i$ ; 粒子の移動度

$k_B$ ; ボルツマン定数

$T_{i\perp}$ ; 粒子の横方向の温度

$T_{i\parallel}$ ; 粒子の縦方向の温度

$\theta$ ;  $B_0$  と  $v_{0i}$ ,  $k$  のなす角度

式(1)において、記号  $\sum_{i=e,h}$  は電子および正孔についての諸量の和をとることを意味する。(添字  $e$  は電子,  $h$  は正孔の諸量を意味する。)

## 3. 数値解析方法

式(1)において、電子と正孔の諸量の和をとり、規格化して dimensionless の形に置きかえ、規格化された伝搬ベクトル  $K$  について整理すると一般に  $K$  の 8 次複素数方程式が得られる。(特に  $\theta=90^\circ$  の場合は  $K$  の 6 次複素数方程式,  $\theta=0^\circ$  の場合は  $K$  の 4 次複素数方程式になる。) 本解析では角周波数  $\omega$  および伝搬ベクトル  $k$  は次

式に示すように規格化している。

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_{ph0}} \quad (2)$$

$$K = \frac{kv_{0e}}{\omega_{pe0}} \quad (3)$$

ここで  $\omega_{ph0}$ ,  $\omega_{pe0}$  は電子正孔密度が  $n_{0e}=n_{0h}=1 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$  の場合における正孔および電子のプラズマ角周波数である。

$K$  の複素方程式において、規格化された角周波数  $\Omega$  の実数項  $\Omega_r$  をパラメータとして与え、 $\Omega$  の虚数項  $\Omega_j$  を負の値から 0 まで変化させた場合について  $K$  の複素根を電算機により数値解析している。

数値解析は 77 K における InSb の固体プラズマを例にとって行なった。解析で使用した InSb の固体プラズマ中の諸物理量の数値および関係式を以下に示す。

$$m_e = 0.013 m_0 \text{ (} m_0 \text{: 自由電子の質量)},$$

$$m_h = 0.55 m_0, \mu_e = 20 \text{ m}^2/\text{v.s}, \mu_h = 1 \text{ m}^2/\text{v.s},$$

$$v_{0e} = 8 \times 10^5 \text{ m/s}, v_{0h} = v_{0e} (\mu_h/\mu_e),$$

$$\epsilon = 17.5 \epsilon_0 \text{ (} \epsilon_0 \text{: 真空の誘電率)}, T_{e\parallel} = T_{h\parallel},$$

$$T_{e\perp} = T_{e\parallel} / \{1 + (\mu_e B_0)^2\},$$

$$T_{h\perp} = T_{h\parallel} / \{1 + (\mu_h B_0)^2\}$$

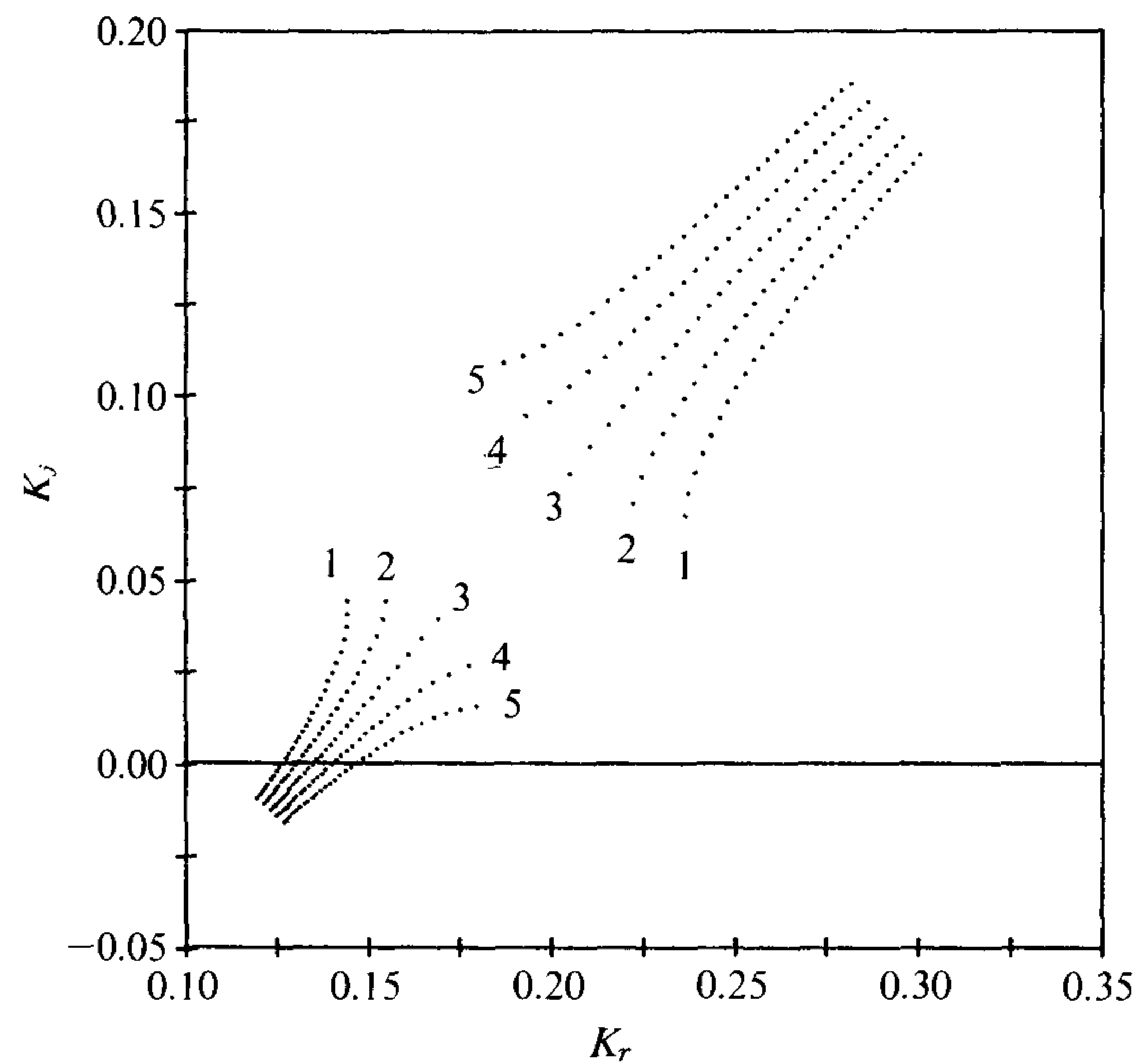
InSb の avalanche breakdown 領域の固体プラズマでは電子および正孔の温度は格子の温度 (77 K) より高くなり光学フォノン温度 260 K 以上と考えられるので、電子および正孔の縦方向の温度 ( $T = T_{e\parallel} = T_{h\parallel}$ ) は 260 K 以上を採用した。また電子と正孔の密度は等しいと考えられるので  $n = n_{0e} = n_{0h}$  として扱っている。

## 4. 解析結果と検討

### (1) 絶対不安定性を生じる二種類のモード

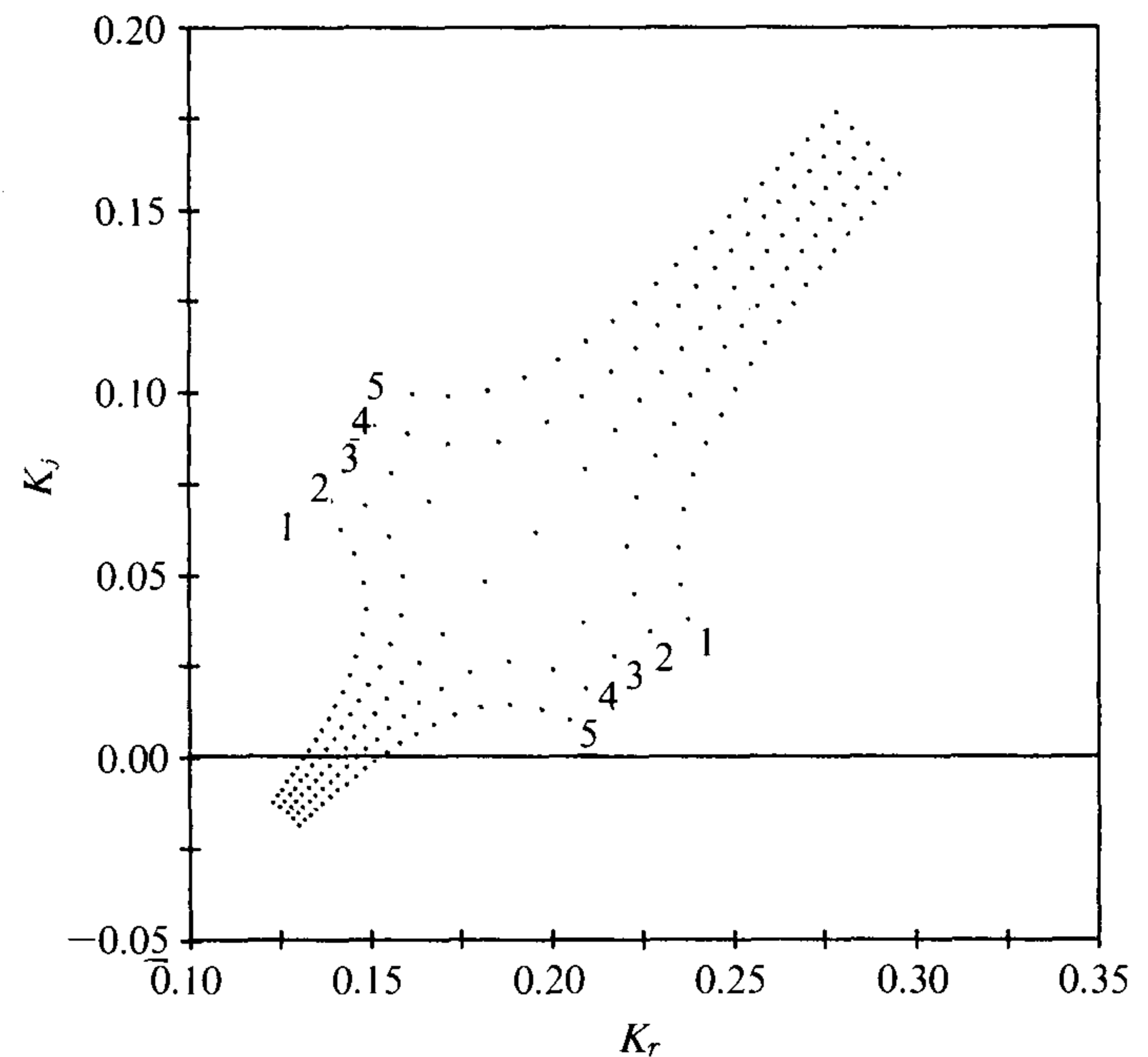
InSb の固体プラズマ中の縦波に関する不安定性の理論解析において著者等は対流不安定性と絶対不安定性が生じることを報告している<sup>9),10)</sup>。固体プラズマ中の電子正孔密度が  $1 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$  一定の場合には対流不安定性を生じるためには外部磁界 (横磁界) が約 2 kG 以上必要であり、この種類のモードの不安定性は絶対不安定性は生じない。しかしながら本解析においてこの種類のモードの不安定性は電子正孔密度を変化すると初めに対流不安定性が生じ、さらに密度を増加すると絶対不安定性が生じることが明らかにされた。

図 1 (a) に電子正孔密度  $n = 2 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$ , 横磁界  $B_0 = 4 \text{ kG}$  の場合における波数 (伝搬ベクトル)  $K$  の複素平面を示す。角周波数  $\Omega$  の実数項  $\Omega_r$  もを正の値に固定して、虚数項  $\Omega_j$  を負の値から 0 まで変化した場合、 $K$  の複素平面において実数項  $K_r$  が正の範囲で虚数項  $K_j$  が負



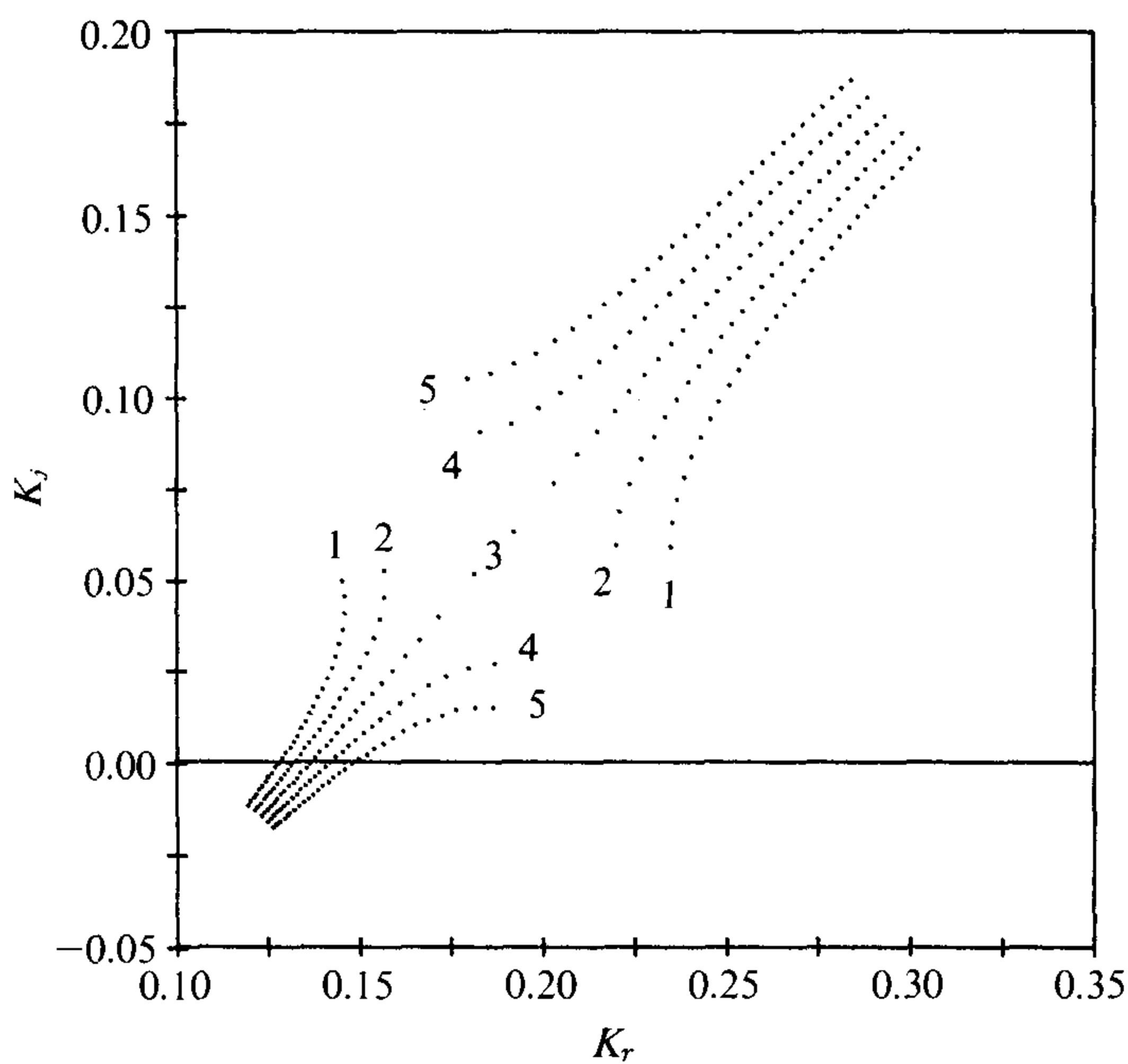
No.	1	2	3	4	5
$\Omega_r$	0.3321	0.3351	0.3381	0.3411	0.3441

(a)



No.	1	2	3	4	5
$\Omega_r$	0.3411	0.3441	0.3471	0.3501	0.3531

(c)



No.	1	2	3	4	5
$\Omega_r$	0.3347	0.3377	0.3407	0.3437	0.3467

(b)

 図1 絶対不安定性に対応する  $K$  の複素平面 (モード I)

 (a)  $n=2 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$  (b)  $n=2.5 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$ 

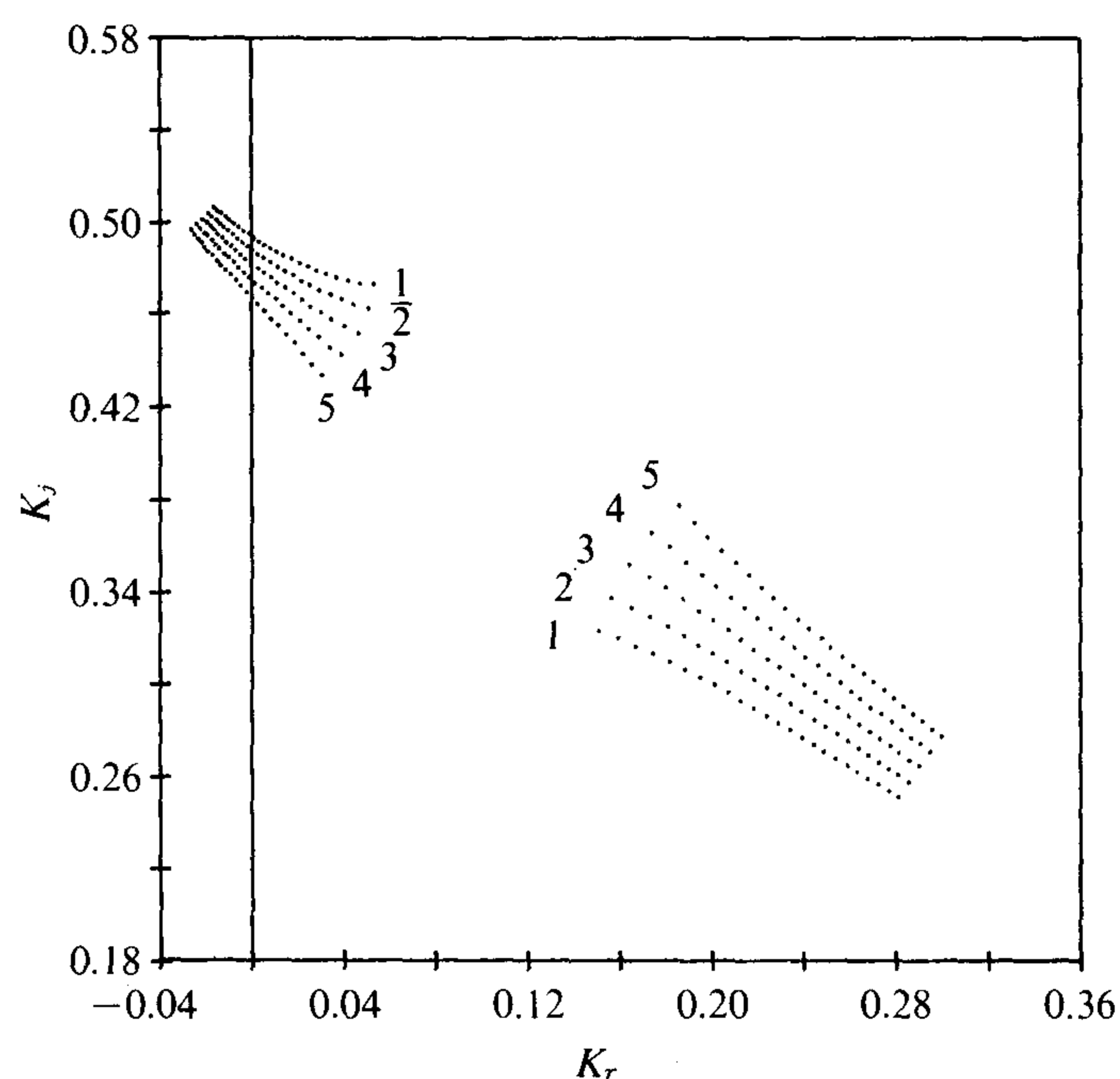
 (c)  $n=7 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$ 

 外部磁界(横磁界)は  $B_0=4 \text{ kG}$  一定である。

の値から正の値に変化していることがわかる。即ち  $K_i$  が実軸を横切り正の値をとり対流不安定性が生じている。図1(b)は  $n=2.5 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$  の場合であり、同様にして対流不安定性は生じているが、この場合はまだ絶対不安定性は生じていない。図1(c)に示すように電子正孔密度を増加して  $n=7 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$  の場合には  $\Omega_r=0.3471$  (実際の周波数100.4 GHz) のとき  $K$  の複素平面

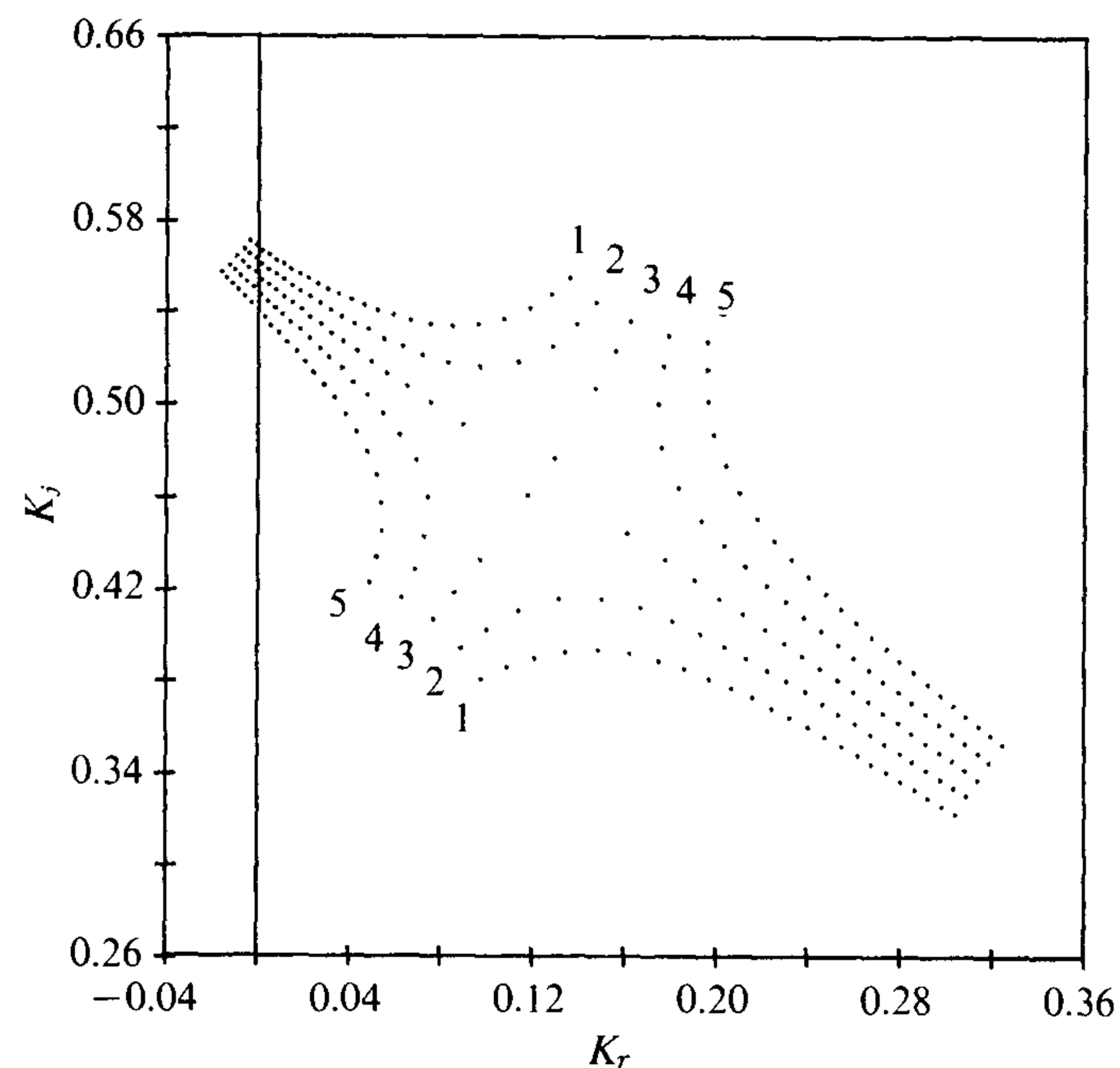
上で saddle point を形成し、即ち  $K$  が重根を持ち絶対不安定性が生じていることがわかる。すでに述べたように従来の解析<sup>9),10)</sup>では固体プラズマ中の電子正孔密度を  $n=1 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$  一定として扱ったために、この種類のモードの不安定性は対流不安定性しか生じないが、電子正孔密度を増加することにより絶対不安定性も生じることが明らかとなった。上に述べた不安定性は外部磁界が存在する場合であるが、外部磁界が必ずしも存在しなくとも不安定性を生じることにはすでに報告している。この種類のモードの不安定性は電子正孔密度が  $n=1 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$  の場合でも絶対不安定性を生じることが明らかにされている<sup>9),10)</sup>。図2に外部磁界が存在しない場合の波数  $K$  の複素平面を示す。図(a), (b)では対流不安定性は生じているが絶対不安定性は生じていない。電子正孔密度を増加して  $n=8 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$  の場合は図(c)に示すように  $\Omega_r=0.0990$  (実際の周波数28.65 GHz) のとき saddle point を形成し、絶対不安定性が生じることがわかる。

本論文において、不安定性を生じるために必ず外部磁界を必要とする場合の不安定性(図1の場合)をモード I とし、必ずしも外部磁界を必要としない場合の不安定性(図2の場合)をモード II と定めることにする。



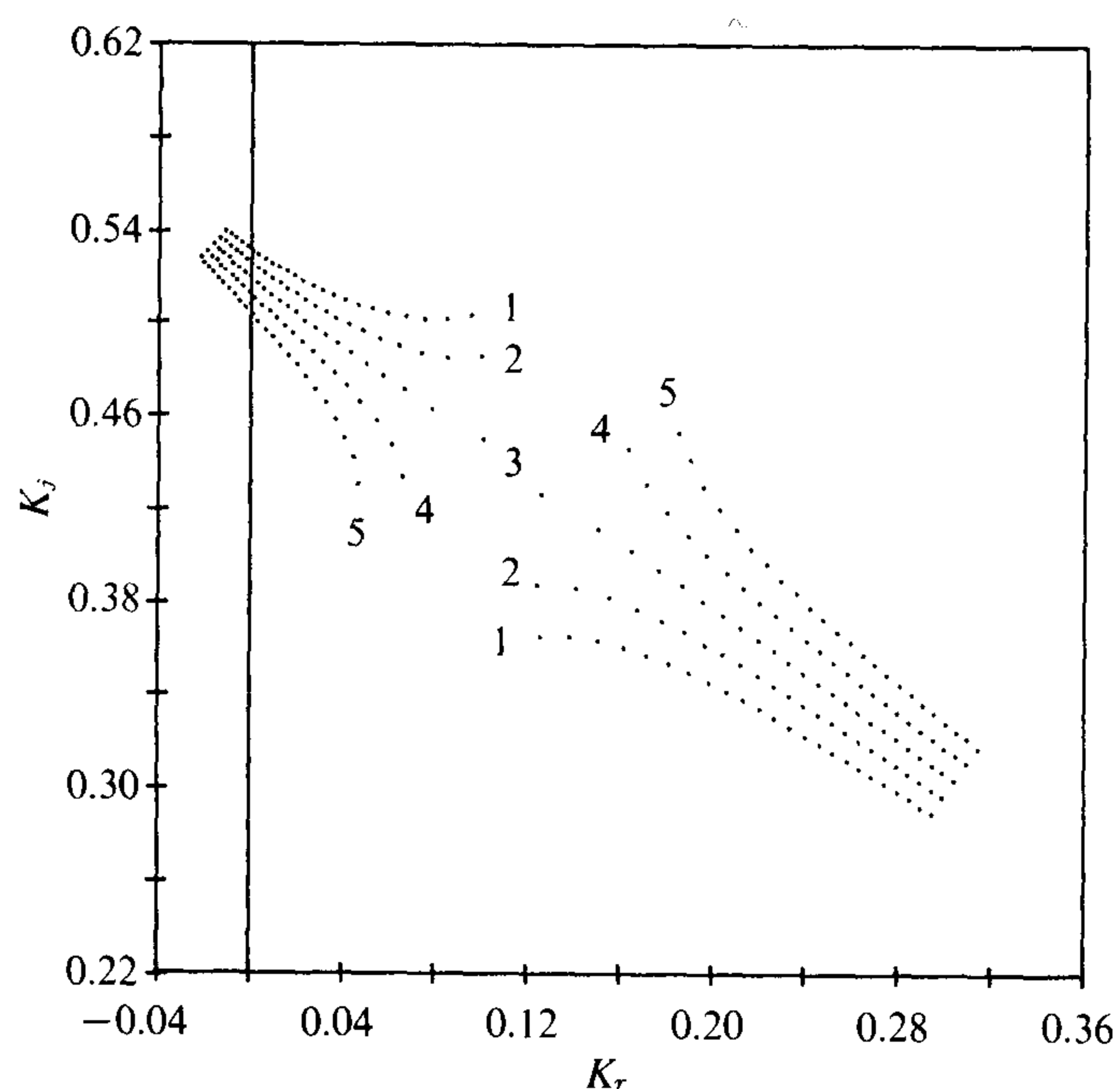
No.	1	2	3	4	5
$\Omega_r$	0.0760	0.0785	0.0810	0.0835	0.0860

(a)



No.	1	2	3	4	5
$\Omega_r$	0.0940	0.0965	0.0990	0.1015	0.1040

(c)



No.	1	2	3	4	5
$\Omega_r$	0.0860	0.0885	0.0910	0.0935	0.0960

(b)

図2 絶対不安定性に対応する  $K$  の複素平面 (モード II)

(a)  $n = 6 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$  (b)  $n = 7 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$

(c)  $n = 8 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$

外部磁界は存在しない。

$K$  一定としている。モード I (図(a)) では絶対不安定性を生じるためには磁界が約 4 kG 以上必要であることがわかる。また電子正孔密度は  $2 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$  以上必要である。モード II (図(b)) では磁界が存在しない場合でも絶対不安定性が生じている。磁界が 1 kG で電子正孔密度しきい値が最小となり、密度しきい値はモード I の場合と比べて 1 オーダ低く  $2.9 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$  以上で絶対不安定性が生じていることがわかる。図4は図3で示した電子正孔密度しきい値に対応する絶対不安定性を生じる周波数  $f$  と横磁界  $B_0$  との関係である。磁界が増加すると周波数が高くなる傾向を示し、周波数は数10~100数10 GHz のマイクロ波、ミリ波領域にわたって変化している。同一の磁界においては周波数はモード I (図(a)) の場合がモード II (図(b)) の場合よりも高くなる。これは密度しきい値がモード I の場合がモード II よりも大きく、周波数は密度が大きいくほど高くなると考えられるからである。図5は絶対不安定性を生じる電子正孔密度しきい値以上において、密度を一定とした場合の周波数と横磁界との関係である。この場合も図4に示したように磁界が増加すると周波数が高くなることがわかる。図6は図5で示した周波数に対応する固体プラズマ中の縦波

## (2) 横磁界 ( $\theta = 90^\circ$ ) における絶対不安定性

図1および図2に示すように電子正孔密度がある値以上になると絶対不安定性が生じることがわかる。図3に絶対不安定性を生じるために必要な最小の電子正孔密度即ち電子正孔密度しきい値  $n_{th}$  と横磁界 ( $\theta = 90^\circ$ )  $B_0$  との関係を示す。ここで InSb の固体プラズマ中の縦方向の電子正孔温度 ( $T = T_{e//} = T_{h//}$ ) は光学フォノン温度260

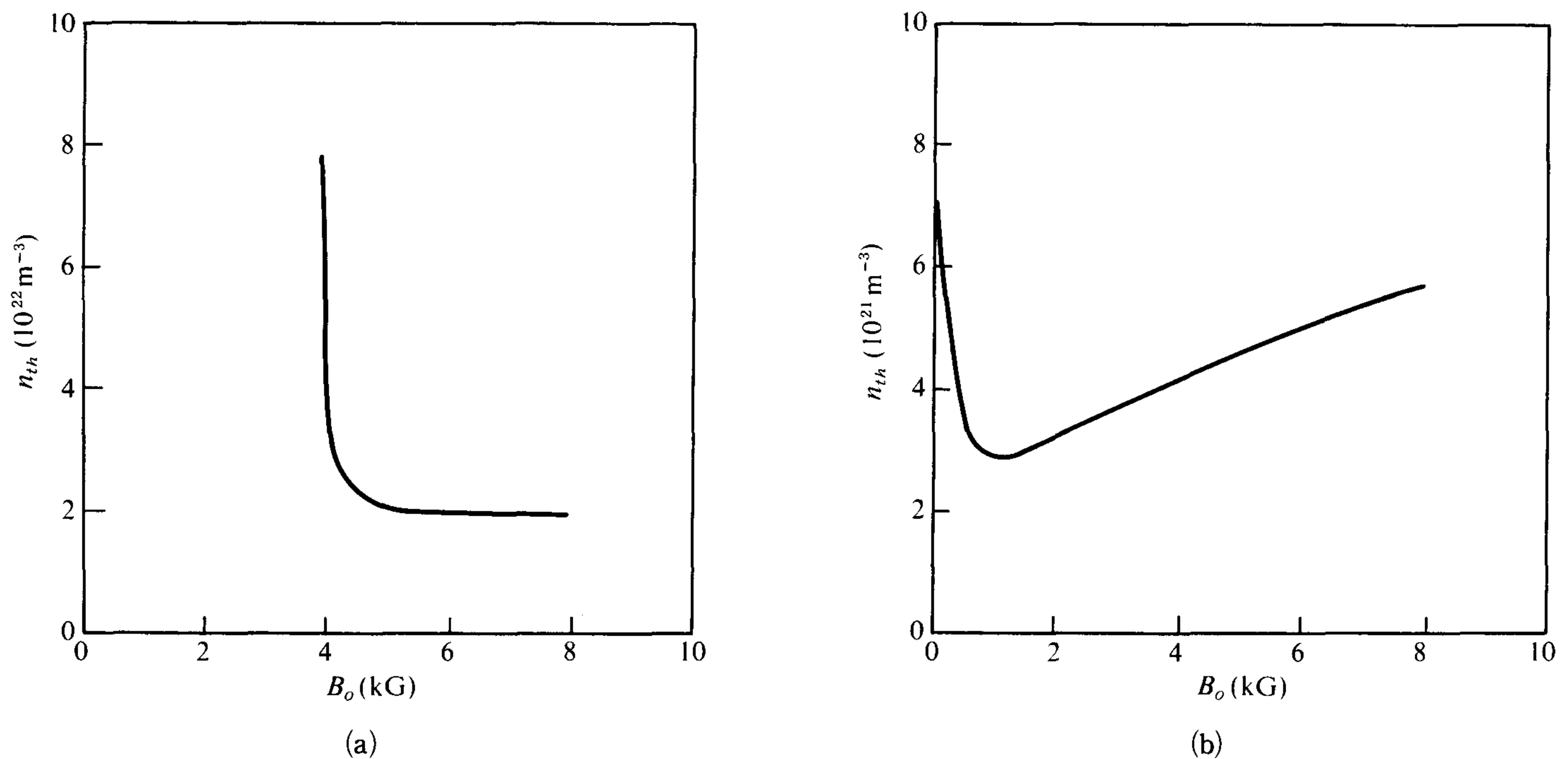


図3 電子正孔密度しきい値  $n_{th}$  と横磁界  $B_0$  との関係  
(a) モード I (b) モード II

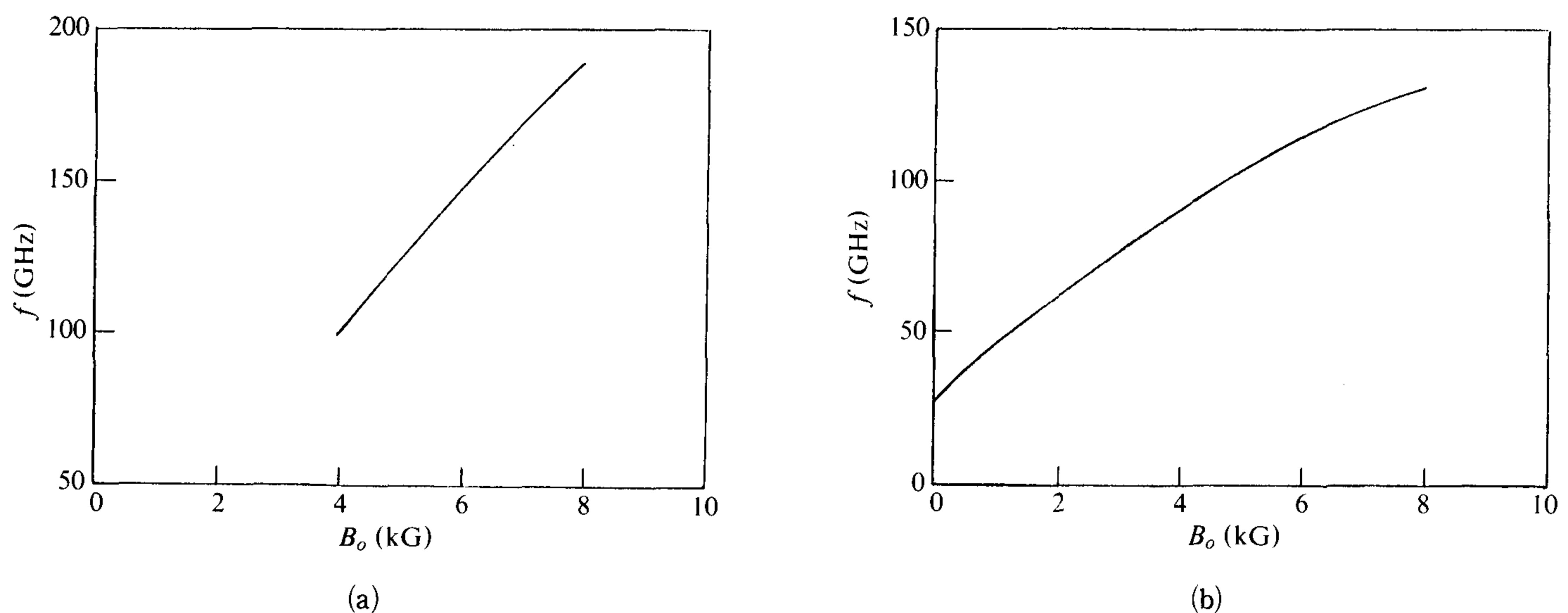


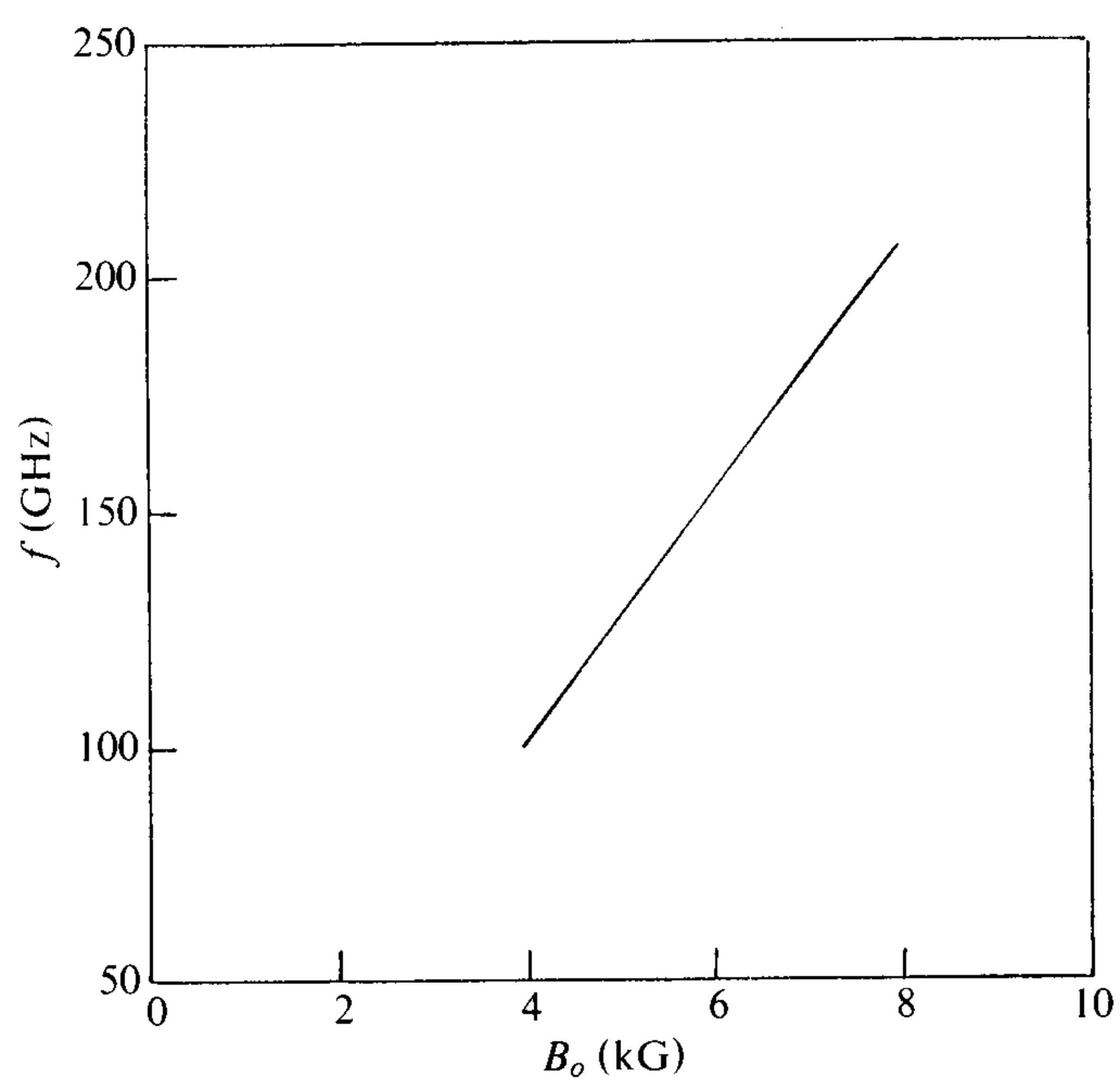
図4 周波数  $f$  と横磁界  $B_0$  との関係  
(a) モード I (b) モード II

の波長である。自由空間での電磁波の波長はこの周波数範囲（ミリ波領域）では数 mm であるが、固体プラズマ中では縦波の波長は  $0.5 \sim 3 \mu\text{m}$  程度となりかなり波長が短くなっている。固体プラズマ中の縦波の位相速度を  $v_p = \lambda f$  とすると  $v_p \approx 10^5 \text{ m/s}$  となり、電子のドリフト速度より多少遅くなる。

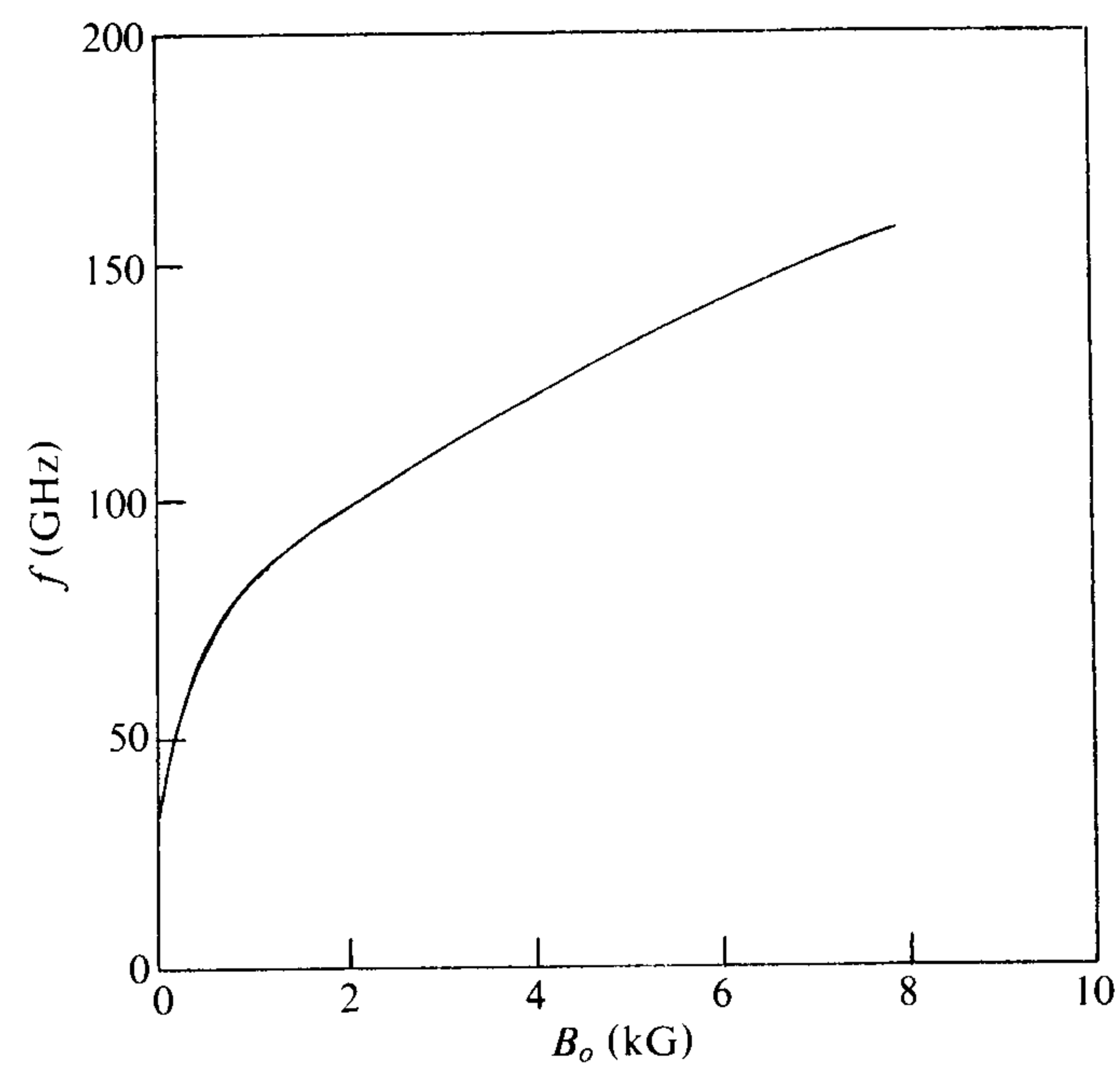
以上の解析結果は電子正孔温度が InSb の固体プラズマの光学フォノン温度 260 K 一定とした場合であるが次に電子正孔温度を変化して光学フォノン温度 260 K よりも高い場合の解析結果について述べる。

図7は磁界をパラメータとした場合の電子正孔密度しきい値  $n_{th}$  と電子正孔温度  $T$  との関係である。モード I (図(a)) では温度が高くなると密度しきい値が増加する。

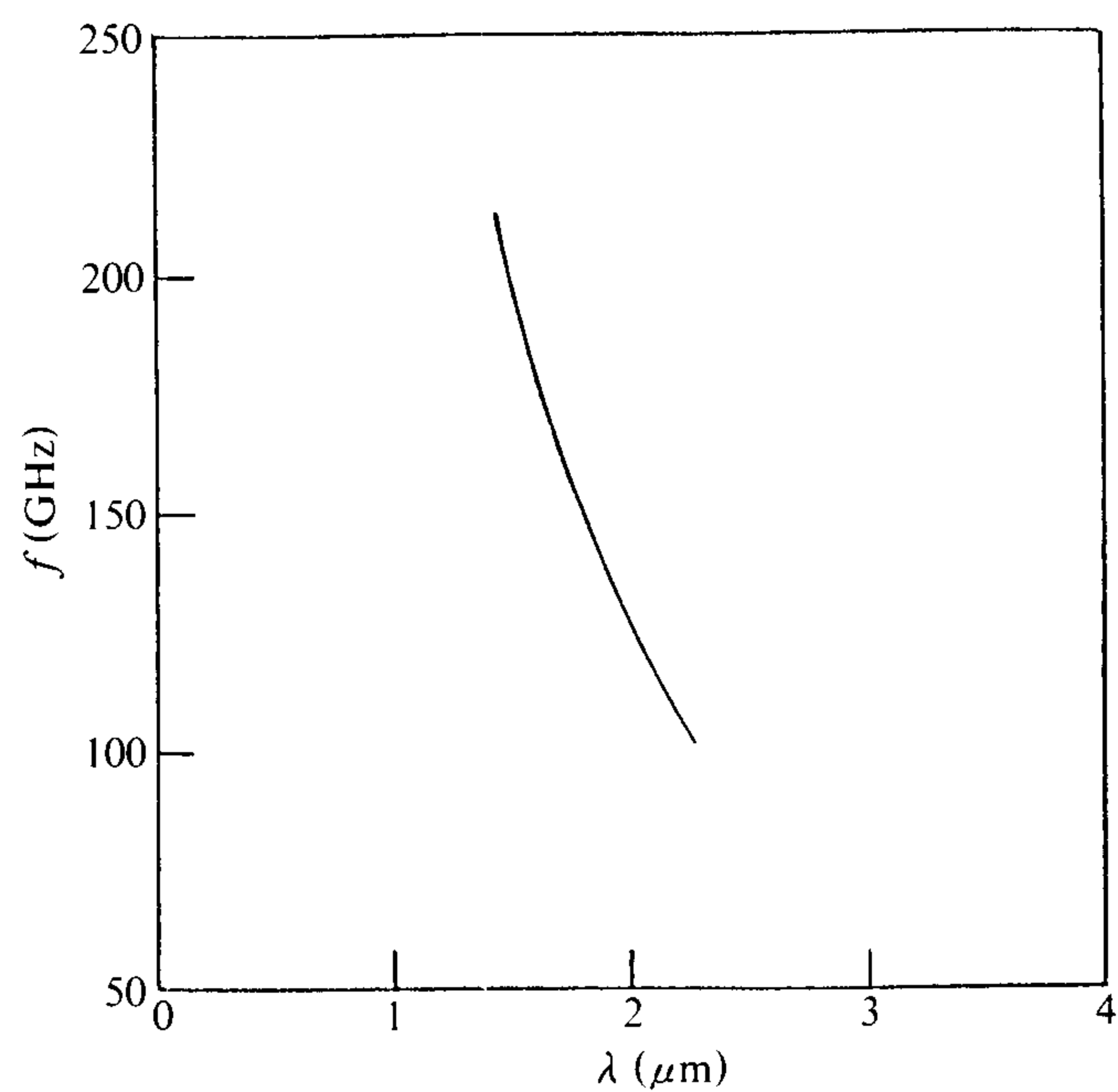
また磁界が減少すると密度しきい値が増加する。即ち絶対不安定性を生じるためには温度が高くなると、また磁界が減少すると電子正孔密度をより大きくする必要がある。磁界が存在しない場合はすでに述べたように絶対不安定性が生じない。モード II (図(b)) では磁界が存在する場合 ( $B_0 \geq 1 \text{ kG}$ )、磁界が減少すると密度しきい値が減少する。また温度が高くなるとモード I と同様に密度しきい値が増加する。図8は図7に示した電子正孔密度しきい値に対応する絶対不安定性を生じる周波数  $f$  と電子正孔温度  $T$  との関係である。モード I (図(a)) およびモード II (図(b)) とともに磁界が増加すると周波数が高くなる傾向があるが、温度が高くなっても周波数は多少高くなるが大きく変化しないことがわかる。



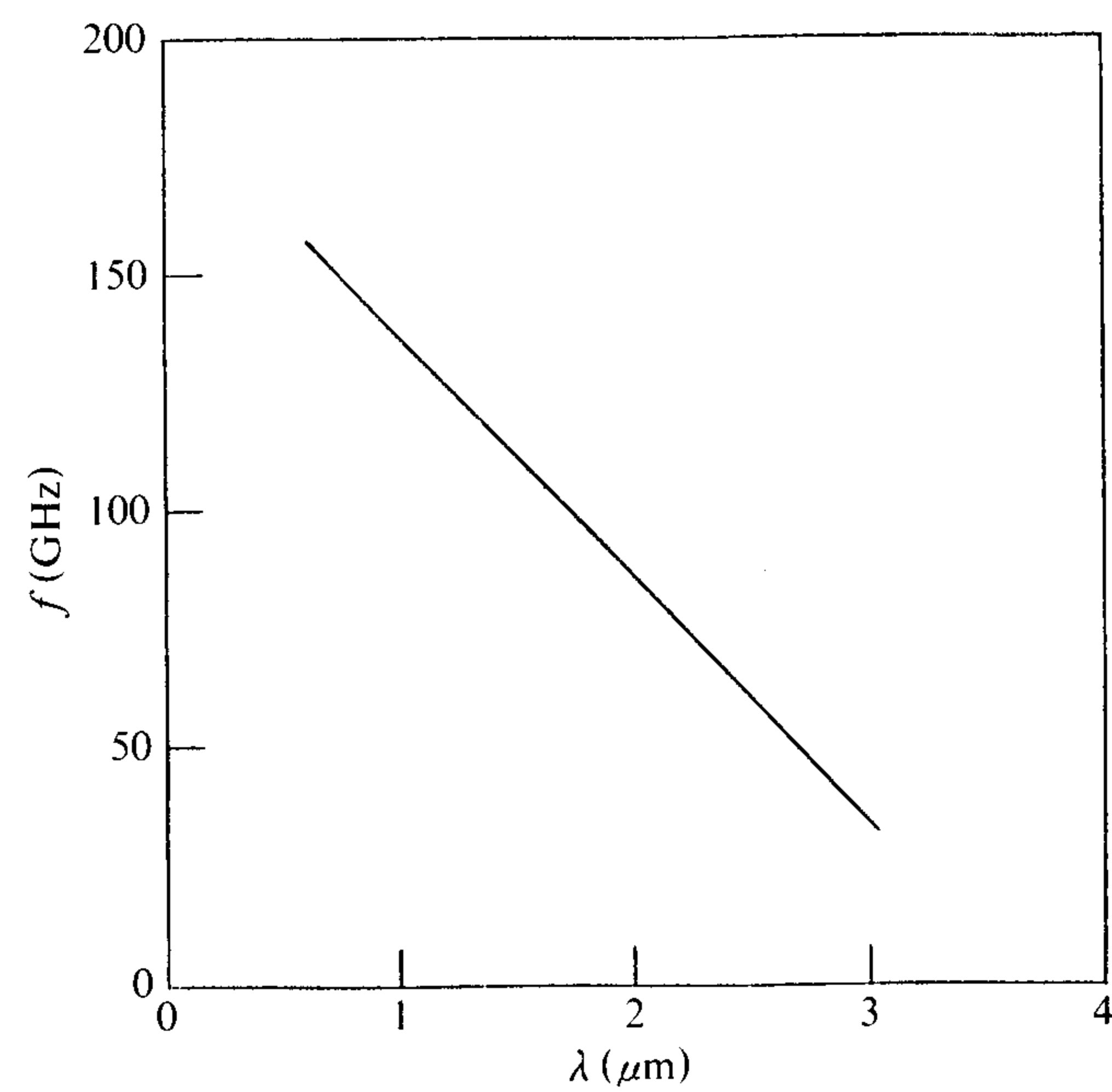
(a)



(b)

図5 周波数 $f$ と横磁界 $B_0$ との関係(a) モード I  $n = 5 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$ (b) モード II  $n = 1 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$ 

(a)



(b)

図6 周波数 $f$ と縦波の波長 $\lambda$ との関係

(a) モード I

(b) モード II

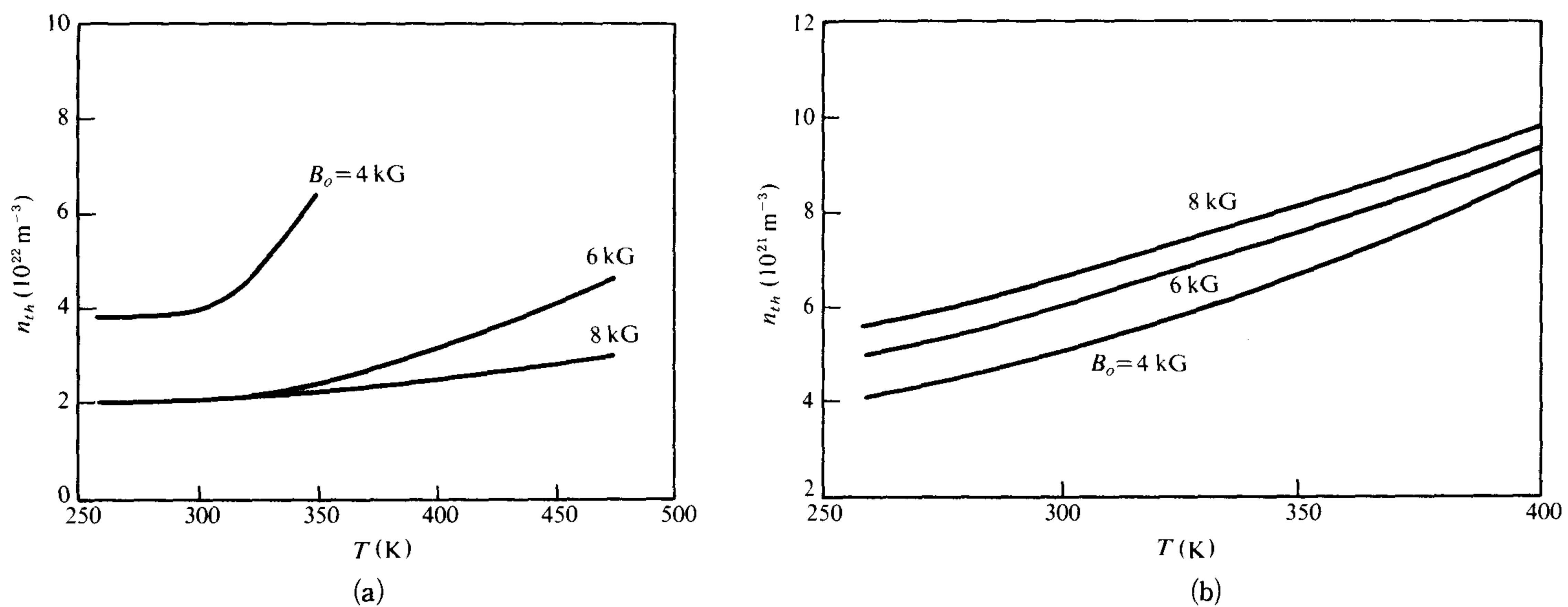


図7 電子正孔密度しきい値  $n_{th}$  と電子正孔温度  $T$  との関係  
(a) モード I (b) モード II

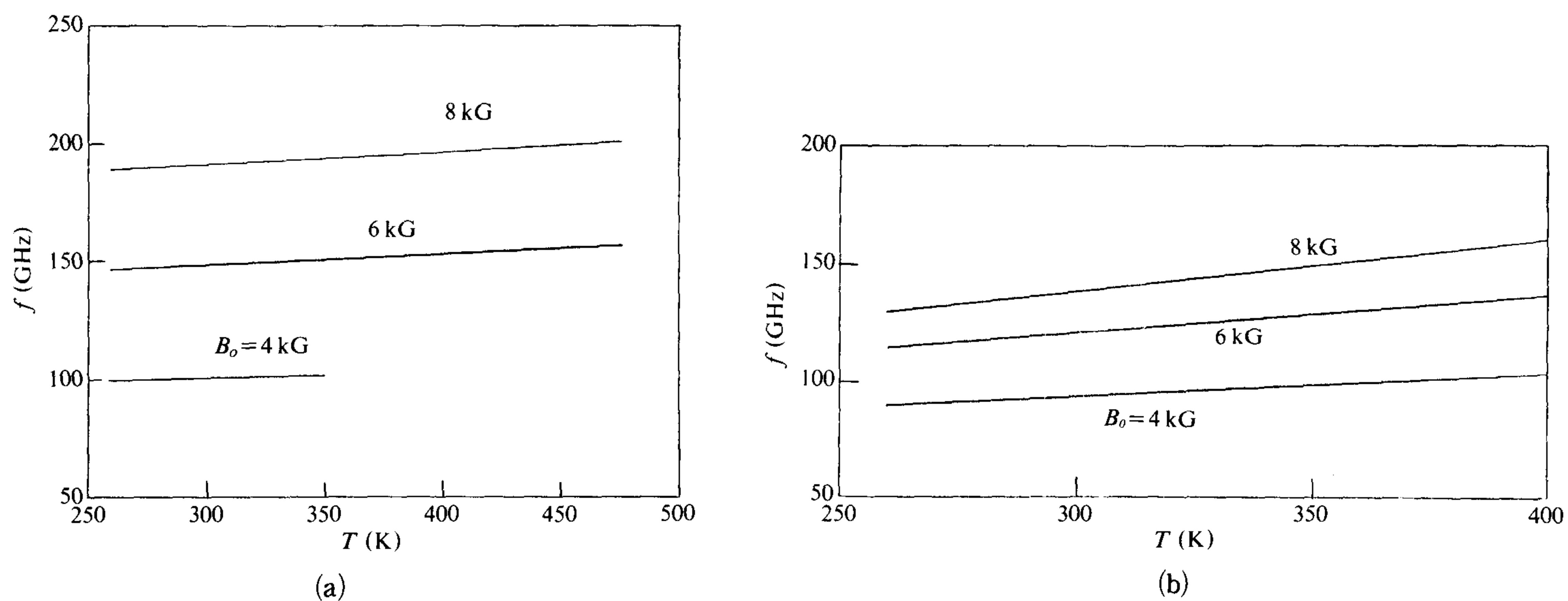


図8 周波数  $f$  と電子正孔温度  $T$  との関係  
(a) モード I (b) モード II

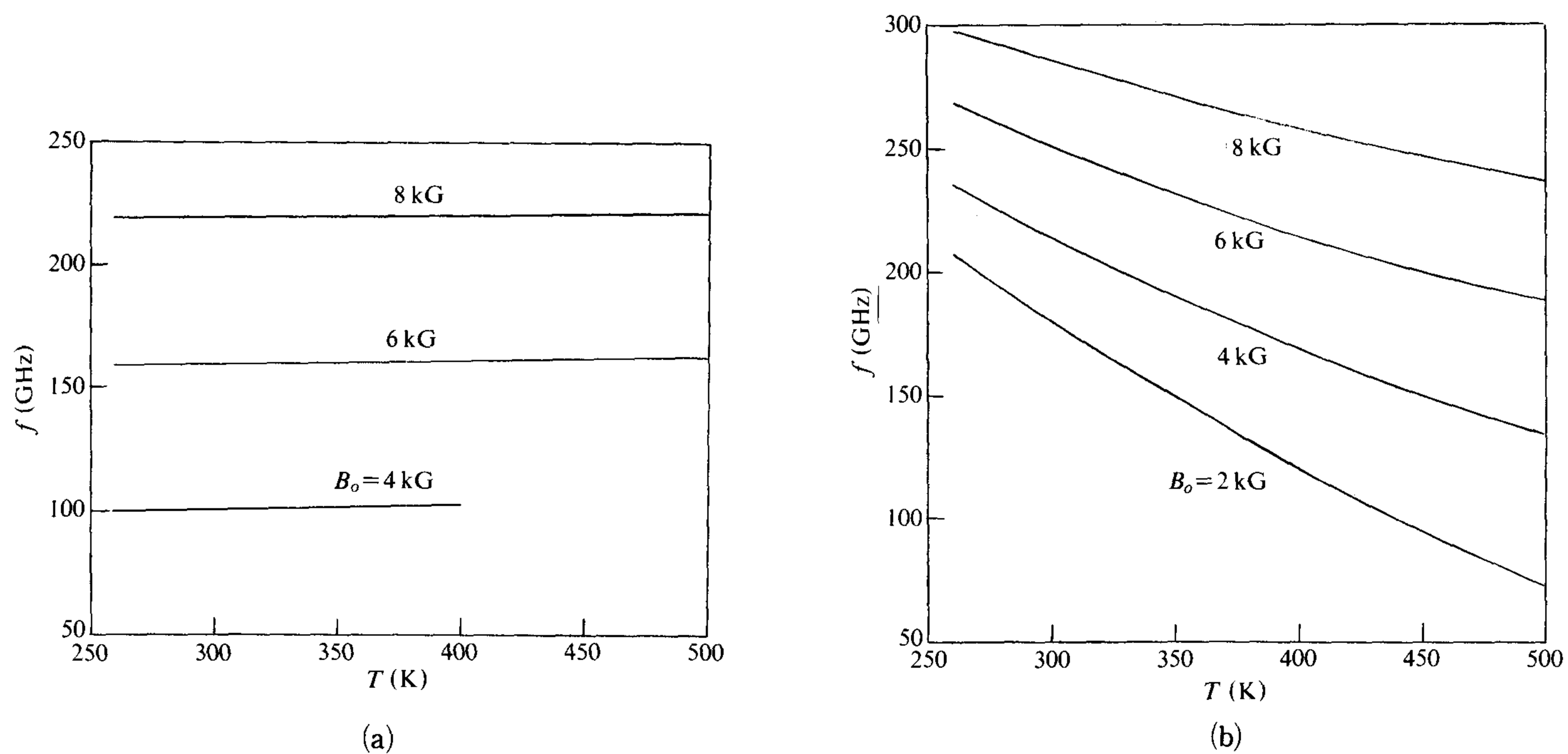


図9 周波数  $f$  と電子正孔温度  $T$  との関係  
(a) モード I  $n = 5 \times 10^{23} \text{ m}^{-3}$  (b) モード II  $n = 5 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$



次に電子正孔密度をしきい値以上の値にとり、一定とした場合の絶対不安定性を生じる周波数 $f$ と電子正孔温度 $T$ との関係を図9に示す。モードⅠ（図(a)）では周波数はほとんど温度に依存しなくほぼ一定値を示しているが、モードⅡ（図(b)）では温度が高くなると周波数が低くなることがわかる。

## 5. む す び

固体プラズマ中の縦波に関する分散式について電算機解析を行ない、InSbの固体プラズマ中でモードⅠおよびモードⅡの二種類の絶対不安定性が生じることを明らかにした。次に外部磁界（横磁界）、電子正孔密度および電子正孔温度を変化した場合の解析を示し、両者のモードの絶対不安定性について検討を行なった。結果を要約すると以下のようになる。

- (1) 本論文では、不安定性を生じるために必ず外部磁界を必要とする場合の不安定性をモードⅠとし、必ずしも外部磁界を必要としない場合の不安定性をモードⅡと定めている。モードⅠは絶対不安定性を生じるためには横磁界が約4 kG以上必要である。
- (2) モードⅠは電子正孔密度が $2 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$ 、モードⅡは $2.9 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$ 以上で絶対不安定性を生じる。
- (3) 絶対不安定性を生じる周波数は数10～数100 GHzのマイクロ波、ミリ波領域であり、外部磁界を増加すると周波数が高くなる。
- (4) 電子正孔温度が高くなると絶対不安定性を生じる電

子密度しきい値が増加する。

- (5) 電子正孔密度を一定とした場合、温度が高くなると周波数はモードⅠではほぼ一定であり、モードⅡでは低くなる傾向がある。

本論文では横磁界（ $\theta=90^\circ$ ）における絶対不安定性について述べたが、 $\theta$ を任意の角度にした場合の不安定性の解析も行なっている。

（原稿受付 昭和62年9月28日）

## 文 献

- 1) D. Pines and J. R. Schrieffer: *Phys. Rev.* **124**, 1378 (1961)
- 2) M. Glicksman: *Phys. Rev.* **124**, 1655 (1961)
- 3) J. Bok and P. Nozieres: *J. Phys. Chem. Solids* **24**, 709 (1963)
- 4) A. Hasegawa: *J. Phys. Soc. Japan* **20**, 1072 (1965)
- 5) A. Bers and A. L. McWhorter: *Phys. Rev. Letters* **15**, 755 (1965)
- 6) T. Suzuki: *J. Phys. Soc. Japan* **21**, 2000 (1966)
- 7) B. B. Robinson: *IEEE Trans. Electron Device* **ED-17**, 200 (1970)
- 8) O. P. Gandhi and R. W. Grow: *IEEE Trans. Electron Device* **ED-18**, 853 (1971)
- 9) 鎌倉：国土館大学工学部紀要 **14**, 35 (1981)
- 10) 鎌倉，香西：電子通信学会論文誌 **J66-B**, 445 (1983)
- 11) R. J. Briggs: *Electron Stream Interaction with Plasmas* (M. I. T. Press, Cambridge, Mass. 1964)