

円形開口のある壁体の片側鉛直荷重時の応力解析に関する研究

榎 田 寛 治*

Study on Stresses of Wall with Round Opening Subjected to Vertical Loads on One Side near the Center

By Hiroshi Enokida*

Synopsis: In this study, stresses of wall with round opening are analyzed for the case of vertical loads acting on one side near the center of the straight boundary.

First, a general stress function is given for the problem of antisymmetric load near the center on the straight boundary, and is applied to the case loaded on one side near the center.

Secondly, by using the cases of the symmetric and the antisymmetric load, the case of arbitrary load on the straight boundary can be solved.

As an example using both of them, two solutions for the case of concentrated load and the case uniformly loaded on one side near the center are given. In the both cases, the maximum tensile stress on the upper edge of the hole occurs on a little to the loaded side of the center, and values of the stresses have no great difference between them.

Finally, the photoelastic experiment of the both cases is carried out, and the results well accord with that of the analytical solutions.

要旨: 円形開口のある壁体が直線境界の片側に鉛直荷重を受ける場合の応力解析を行っている。

まず、直線境界の中央で逆対称荷重を受ける場合の応力関数を示し、片側荷重時の問題に適用する。

次に、対称荷重と逆対称荷重の解を用い、直線境界で任意荷重を受ける場合の解を得る。

この場合の例として、中央付近で片側集中荷重と、片側分布荷重の解を求める。これらの開口の最大引張応力は中央よりわずかに荷重側に生じ、その最大値に大差はない。

最後に、片側荷重時の光弾性実験を行っている。その結果は理論とよく一致している。

1. 序

直線境界に近く円形開口のあるアーチや浅いトンネルなどでは、開口上部に大きな引っ張り応力が起きて危険である。直線境界の片側に荷重が集中、あるいは分布する場合は、対称荷重時に比較して開口上部の応力分布が大きく変化する。しかし、直線境界に片側荷重等の任意の荷重を受ける場合の一般的解析は未だなされていない。本論文は双極座標¹⁾²⁾を用いた二次元弾性論により、直線境界の片側に集中荷重と分布荷重を受ける場合の解を求めている。

直線境界の荷重に対しては、集中荷重を Barjansky³⁾,

大川⁴⁾⁵⁾等が、等分布荷重を鵜戸²⁾が解いているのみで、任意荷重の解法はない。

本論文は、双極座標の直線境界は、半径無限大の円に相当し、したがって、そこでの任意荷重は周期関数と考えられることに着目し、応力関数を提案し、解法を示している。

例として、開口が直線境界に近く、その境界の開口頂点付近に鉛直対称荷重を受ける場合の解⁶⁾に、鉛直逆対称荷重時の解を加えて、片側鉛直荷重を受ける場合について、集中荷重と分布荷重時の解を求める。それらを光弾性実験により確かめている。

2. 双極座標での応力関数および応力

まず、直線境界で任意荷重を表現できる応力関数 χ_0

*建築学科 助手 工学博士

Assistant, Architectural Division, Dr. of Engineering

と Jeffery¹⁾の導いた双極座標の応力関数 χ_1 を用い、円周の境界条件から χ_1 の係数を求め、応力の式を導く。ついで、各荷重時の境界荷重分布を Fourier 級数に展開し、 χ_0 の係数を決定する。

双極座標系で共役調和関数を α, β とすると次の関係がある⁷⁾ (図-1)。

$$\alpha + i\beta = \log \frac{x+i(y+a)}{x+i(y-a)} \quad (1)$$

ただし、 x, y は直交座標、 $i = \sqrt{-1}$ 、 $2a$ は両極間距離とする。式(1)を x, y について解くと次式になる。

$$x = \frac{a \sin \beta}{\cosh \alpha - \cos \beta}, \quad y = \frac{a \sinh \alpha}{\cosh \alpha - \cos \beta} \quad (2)$$

$h = (\cosh \alpha - \cos \beta)/a$ とおき、双極座標の一般的な応力関数を χ とすると各応力成分は式(3)になる。

$$\left. \begin{aligned} a\sigma_\alpha &= \left[(\cosh \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \sinh \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \cosh \alpha \right] (h\chi), \\ a\sigma_\beta &= \left[(\cosh \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \sinh \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \cos \beta \right] (h\chi), \\ a\tau_{\alpha\beta} &= -(\cosh \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} (h\chi) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$h\chi$ が満足すべき微分方程式は次式となる。

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right) (h\chi) = 0 \quad (4)$$

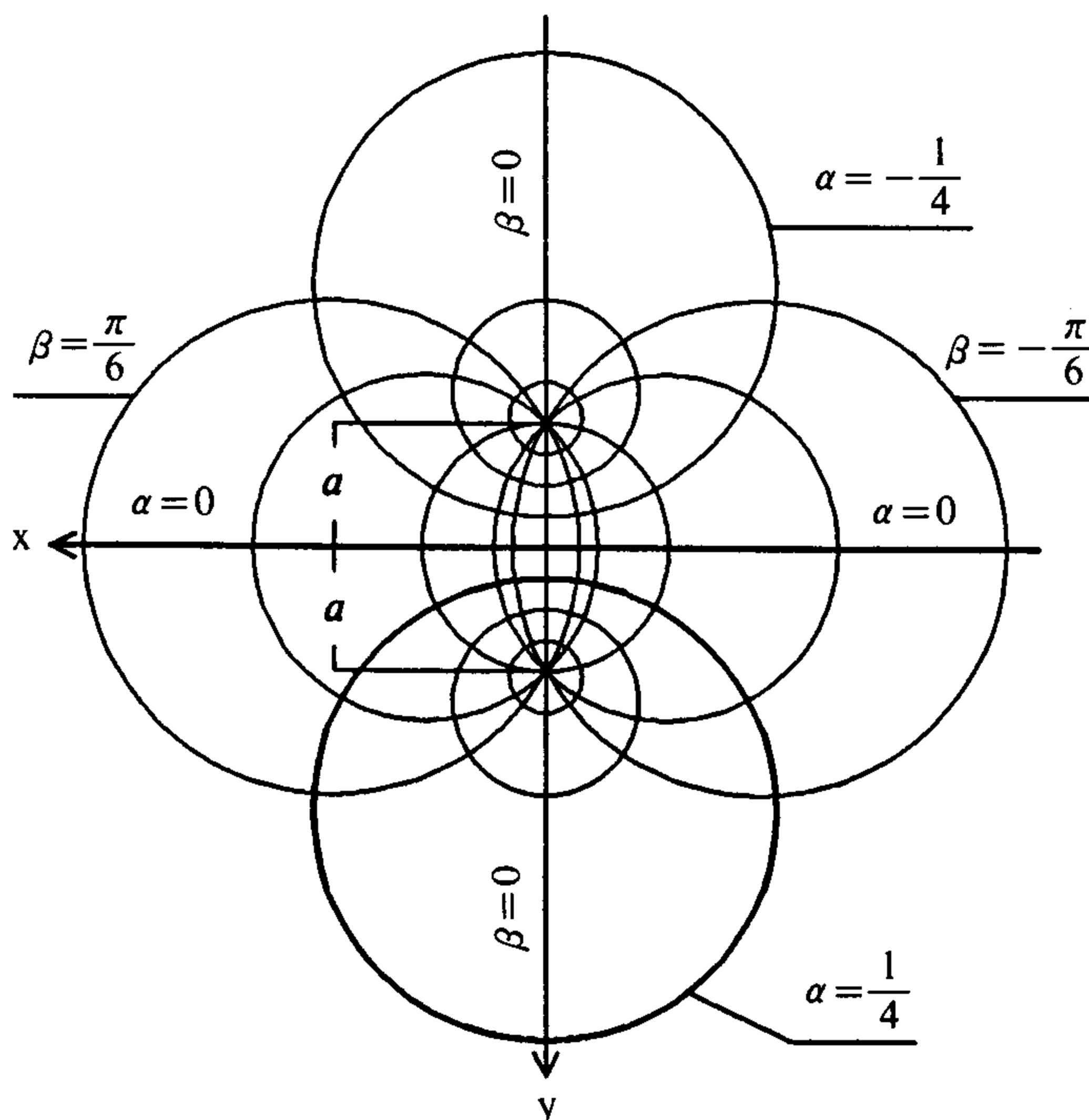


図-1 双極座標

2.1 鉛直逆対称荷重時の応力関数 χ_0 と境界条件

この場合の応力関数として次式を用いる。この式は直線境界 $\alpha=0$ で種々の鉛直逆対称荷重を表現できる。

$$\left. \begin{aligned} h\chi_0 &= \sum_{n=2}^{\infty} \phi_n(\alpha) \sin n\beta, \\ \phi_n(\alpha) &= F_n e^{-(n+1)\alpha} + G_n e^{-(n-1)\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

各応力成分は式(3)に代入して、次式になる。

$$\left. \begin{aligned} a\sigma_{\alpha 0} &= \sum_{n=2}^{\infty} \{ [-n^2 (\cosh \alpha - \cos \beta) + \cosh \alpha] \phi_n(\alpha) \\ &\quad - \sinh \alpha \cdot \phi_n'(\alpha) \} \sin n\beta - \sin \beta \sum_{n=2}^{\infty} n \phi_n(\alpha) \cos n\beta, \\ a\sigma_{\beta 0} &= \sum_{n=2}^{\infty} [(\cosh \alpha - \cos \beta) \phi_n''(\alpha) - \sinh \alpha \cdot \phi_n'(\alpha) \\ &\quad + \cos \beta \cdot \phi_n(\alpha)] \sin n\beta - \sin \beta \sum_{n=2}^{\infty} n \phi_n(\alpha) \cos n\beta, \\ a\tau_{\alpha\beta 0} &= -(\cosh \alpha - \cos \beta) \sum_{n=2}^{\infty} n \phi_n'(\alpha) \cos n\beta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ただし、 $\phi_n'(\alpha) = \partial \phi_n(\alpha) / \partial \alpha$ 、 $\phi_n''(\alpha) = \partial^2 \phi_n(\alpha) / \partial \alpha^2$ とする。

図-2 に示す鉛直逆対称荷重時の直線境界の条件は $\alpha=0$ で $\tau_{\alpha\beta 0}=0$ より、 $\phi_n'(0)=0$ となり、 $n \geq 2$ で $(n+1)F_n + (n-1)G_n = 0$ となる。 $G_n = -(n+1)F_n / (n-1)$ を式(5)に代入し、 $F_n / (n-1) = E_n$ とおき、次式が得られる。

$$\phi_n(\alpha) = E_n [(n-1) e^{-(n+1)\alpha} - (n+1) e^{-(n-1)\alpha}], \quad (n \geq 2) \quad (7)$$

この式の係数 E_n は直線境界の荷重条件で決定できる。

2.2 円周の境界条件

式(4)の一般解²⁾から β の奇関数および直線境界 $\alpha=0$ における条件 $\sigma_\alpha = \tau_{\alpha\beta} = 0$ を満す係数を選ぶと、その関数 χ_1 は次式になる。

$$\left. \begin{aligned} h\chi_1 &= A_1 \cosh 2\alpha \sin \beta + \sum_{n=2}^{\infty} \{ A_n [\cosh (n+1)\alpha \\ &\quad - \cosh (n-1)\alpha] + D_n [(n-1) \sinh (n+1)\alpha \\ &\quad - (n+1) \sinh (n-1)\alpha] \} \sin n\beta \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

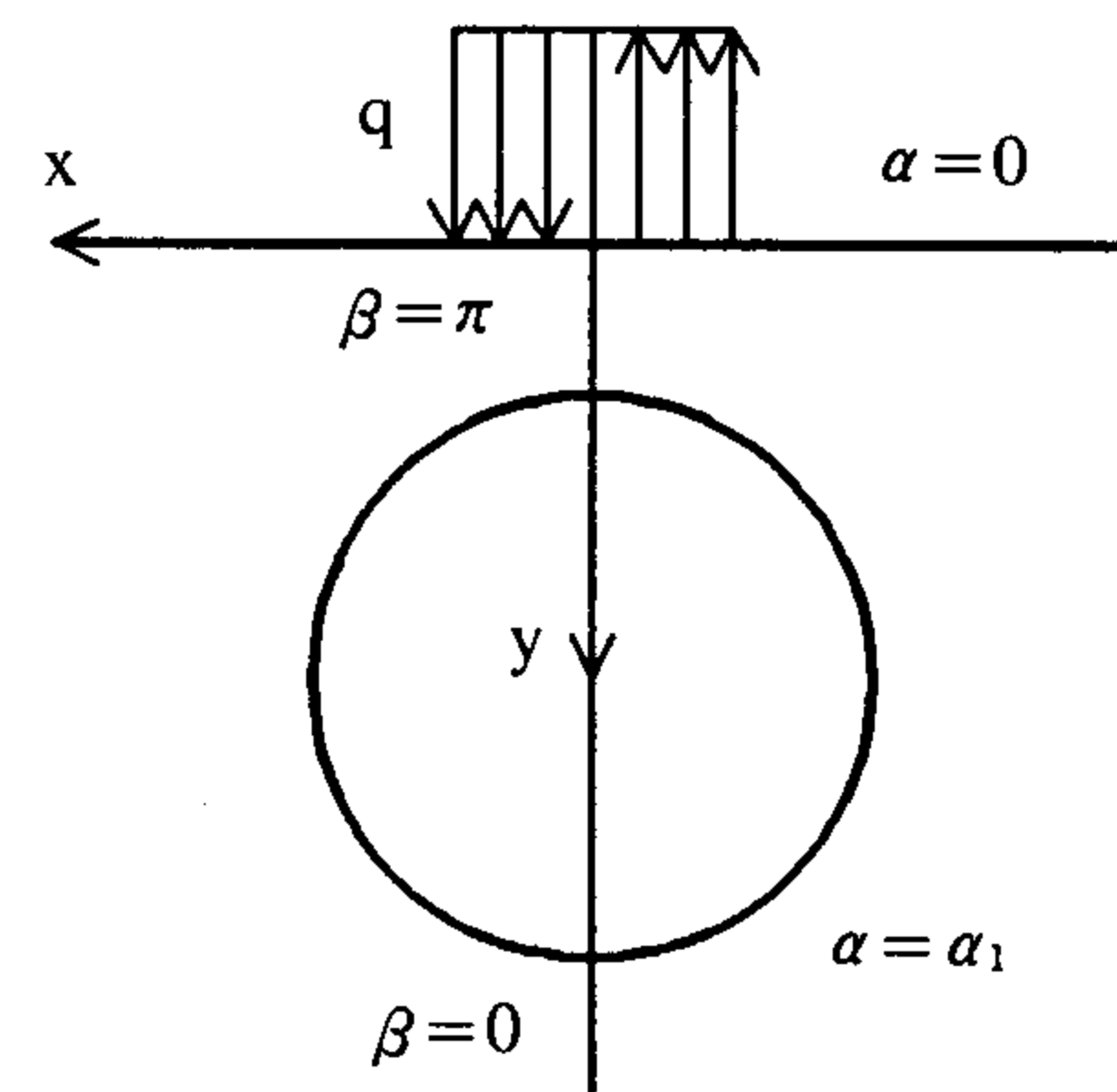


図-2 鉛直逆対称荷重

応力関数 χ_0 と χ_1 の和 $h\chi = h\chi_0 + h\chi_1$ が円周 $\alpha = \alpha_1$ で境界条件 $\sigma_\alpha = \tau_{\alpha\beta} = 0$ を満す条件として次式²⁾を用いる。

$$\left. \begin{aligned} h\chi &= \xi \tanh \alpha + \eta (\cosh \alpha \cdot \cos \beta - 1) + \tau \sin \beta, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (h\chi) &= \xi \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ただし, ξ, η, τ は Michell の定数。 $\alpha = \alpha_1$ において応力関数, 式(5)を用い,

$$\left. \begin{aligned} h\chi_0 &= \sum_{n=2}^{\infty} E_n [(n-1) e^{-(n+1)\alpha_1} - (n+1) e^{-(n-1)\alpha_1}] \sin n\beta \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} R_n \cdot \sin n\beta, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (h\chi_0) &= - \sum_{n=2}^{\infty} E_n (n^2 - 1) [e^{-(n+1)\alpha_1} - e^{-(n-1)\alpha_1}] \sin n\beta \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} S_n \cdot \sin n\beta \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここで,

$$\begin{aligned} R_n &= E_n [(n-1) e^{-(n+1)\alpha_1} - (n+1) e^{-(n-1)\alpha_1}], \\ S_n &= -E_n (n^2 - 1) [e^{-(n+1)\alpha_1} - e^{-(n-1)\alpha_1}] \end{aligned}$$

とする。同様に式(8)より,

$$\left. \begin{aligned} h\chi_1 &= A_1 \cosh 2\alpha_1 \cdot \sin \beta + \sum_{n=2}^{\infty} \{A_n [\cosh (n+1)\alpha_1 \\ &\quad - \cosh (n-1)\alpha_1] + D_n [(n-1) \sinh (n+1)\alpha_1 \\ &\quad - (n+1) \sinh (n-1)\alpha_1]\} \sin n\beta, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (h\chi_1) &= 2A_1 \sinh 2\alpha_1 \cdot \sin \beta + \sum_{n=2}^{\infty} \{A_n [(n+1) \\ &\quad \times \sinh (n+1)\alpha_1 - (n-1) \sinh (n-1)\alpha_1] \\ &\quad + D_n (n^2 - 1) [\cosh (n+1)\alpha_1 \\ &\quad - \cosh (n-1)\alpha_1]\} \sin n\beta \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式(9)に式(10)と(11)を代入して, 次の各係数を得る。

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 0, \\ A_n &= \frac{-(n \cosh n\alpha_1 \cdot \sinh \alpha_1 - \sinh n\alpha_1 \cdot \cosh \alpha_1) S_n + (n^2 - 1) \sinh n\alpha_1 \cdot \sinh \alpha_1 \cdot R_n}{2[(n \sinh \alpha_1)^2 - (\sinh n\alpha_1)^2]}, \\ D_n &= \frac{\sinh n\alpha_1 \cdot \sinh \alpha_1 \cdot S_n - (n \cosh n\alpha_1 \cdot \sinh \alpha_1 + \sinh n\alpha_1 \cdot \cosh \alpha_1) R_n}{2[(n \sinh \alpha_1)^2 - (\sinh n\alpha_1)^2]} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

2.3 応力関数 χ_0 と χ_1 による応力

χ_0 による応力は式(5)と(6)より次式になる。

$$\left. \begin{aligned} a\sigma_{\alpha_0} &= \sum_{n=2}^{\infty} E_n \{ (n-1) e^{-(n+1)\alpha} [-n^2 (\cosh \alpha - \cos \beta) \\ &\quad + (n+1) \sinh \alpha + \cosh \alpha] - (n+1) e^{-(n-1)\alpha} \\ &\quad \times [-n^2 (\cosh \alpha - \cos \beta) + (n-1) \sinh \alpha \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \cosh \alpha \} \sin n\beta - \sin \beta \sum_{n=2}^{\infty} E_n \cdot n \\ &\quad \times [(n-1) e^{-(n+1)\alpha} - (n+1) e^{-(n-1)\alpha}] \cos n\beta, \\ a\sigma_{\beta_0} &= \sum_{n=2}^{\infty} E_n \{ (n-1) e^{-(n+1)\alpha} [(n+1)^2 (\cosh \alpha - \cos \beta) \\ &\quad + (n+1) \sinh \alpha + \cosh \alpha] - (n+1) e^{-(n-1)\alpha} \\ &\quad \times [(n-1)^2 (\cosh \alpha - \cos \beta) + (n-1) \sinh \alpha \\ &\quad + \cosh \alpha] \} \sin n\beta - \sin \beta \sum_{n=2}^{\infty} E_n \cdot n \\ &\quad \times [(n-1) e^{-(n+1)\alpha} - (n+1) e^{-(n-1)\alpha}] \cos n\beta, \\ a\tau_{\alpha\beta_0} &= (\cos \alpha - \cos \beta) \sum_{n=2}^{\infty} E_n \cdot n (n^2 - 1) \\ &\quad \times [e^{-(n+1)\alpha} - e^{-(n-1)\alpha}] \cos n\beta \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

同様に, χ_1 による応力は式(3)と(8)より次式になる。

$$\left. \begin{aligned} a\sigma_{\alpha_1} &= -2A_1 \sinh \alpha \cdot \sinh 2\alpha \cdot \sin \beta \\ &\quad + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \{ -A_n \cdot n \sinh \alpha [n (\cosh \alpha \\ &\quad - \cos \beta) \sinh n\alpha + \sinh \alpha \cdot \cosh n\alpha] \\ &\quad + D_n [(n^2 (1 - \cosh \alpha \cdot \cos \beta) - 1) \sinh n\alpha \\ &\quad - n \sinh \alpha [n^2 (\cosh \alpha - \cos \beta) \\ &\quad - \cosh \alpha] \cosh n\alpha] \} \sin n\beta \\ &\quad - 2 \sin \beta \sum_{n=2}^{\infty} [A_n \sinh \alpha \cdot \sinh n\alpha \\ &\quad + D_n (n \sinh \alpha \cdot \cosh n\alpha \\ &\quad - \cosh \alpha \cdot \sinh n\alpha)] n \cos n\beta, \\ a\sigma_{\beta_1} &= 4A_1 (\cosh^3 \alpha - \cosh 2\alpha \cdot \cos \beta) \sin \beta \\ &\quad + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \{ A_n [n^2 (\cosh \alpha - \cos \beta) \sinh \alpha \cdot \sinh n\alpha \\ &\quad + n (1 + \cosh^2 \alpha - 2 \cosh \alpha \cdot \cos \beta) \cosh n\alpha] \\ &\quad + D_n [(n^2 (1 - \cosh \alpha \cdot \cos \beta) - 1) \sinh n\alpha \\ &\quad + n \sinh \alpha [(n^2 - 1) (\cosh \alpha - \cos \beta) \\ &\quad + \cos \beta] \cosh n\alpha] \} \sin n\beta \\ &\quad - 2 \sin \beta \sum_{n=2}^{\infty} [A_n \sinh \alpha \cdot \sinh n\alpha \\ &\quad + D_n (n \sinh \alpha \cdot \cosh n\alpha \\ &\quad - \cosh \alpha \cdot \sinh n\alpha)] n \cos n\beta, \\ a\tau_{\alpha\beta_1} &= -2A_1 (\cosh \alpha - \cos \beta) \sinh 2\alpha \cdot \cos \beta \\ &\quad - 2 (\cosh \alpha - \cos \beta) \sum_{n=2}^{\infty} [A_n (n \sinh \alpha \cdot \cosh n\alpha \\ &\quad + \cosh \alpha \cdot \sinh n\alpha) + D_n (n^2 - 1) \sinh \alpha \cdot \sinh n\alpha] \\ &\quad \times n \cos n\beta \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

以下, 直線境界上で任意荷重が作用する場合の例として, 鉛直逆対称荷重時について応力関数 χ_0 の係数 E_n を

決定する。

3. 鉛直逆対称荷重時の応力関数 χ_0 の係数

まず、鉛直逆対称荷重として、直線境界上の中央から離れて2点に集中荷重（図-3，中央），および中央に等分布荷重（図-4，中央）がある場合の2タイプについて求める。

次に、それぞれ鉛直対称荷重の解⁶⁾（図-3，4，左）に各タイプを加えて、片側集中荷重（図-3，右）および片側分布荷重（図-4，右）の解を得る。

3.1 2点集中荷重⁸⁾

直線境界上の荷重分布を Fourier 級数に展開し、応力関数 χ_0 の係数を決定する。

直線境界 $\alpha=0$ で $\beta=\pm\theta$ での集中荷重を、小さい分布幅 γ に等分布荷重 q が働く場合におきかえて考えることにする（図-5）。

この荷重を次式で表す。

$$a\sigma_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\beta = f(\beta) \quad (15)$$

ただし、 $f(\beta)$ は直線境界上の荷重を表す関数。

$f(\beta)$ の積分は $\alpha=0$, $\beta=0$ の反力を考えると上部の荷重の2倍となる。Fourier 係数 C_n を求めると次式になる。

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\beta) \sin n\beta d\beta = \frac{4}{\pi} \int_{\theta-\gamma/2}^{\theta+\gamma/2} q \sin n\beta d\beta \\ &= \frac{8q}{n\pi} \sin \frac{n\gamma}{2} \cdot \sin n\theta \end{aligned} \quad (16)$$

次に、応力成分の式(6)の $\sigma_{\alpha 0}$ と境界荷重式(15)を等置することにより、係数 E_n を決定する。式(6)の $\sigma_{\alpha 0}$ を $\alpha=0$ で次のように変形する。

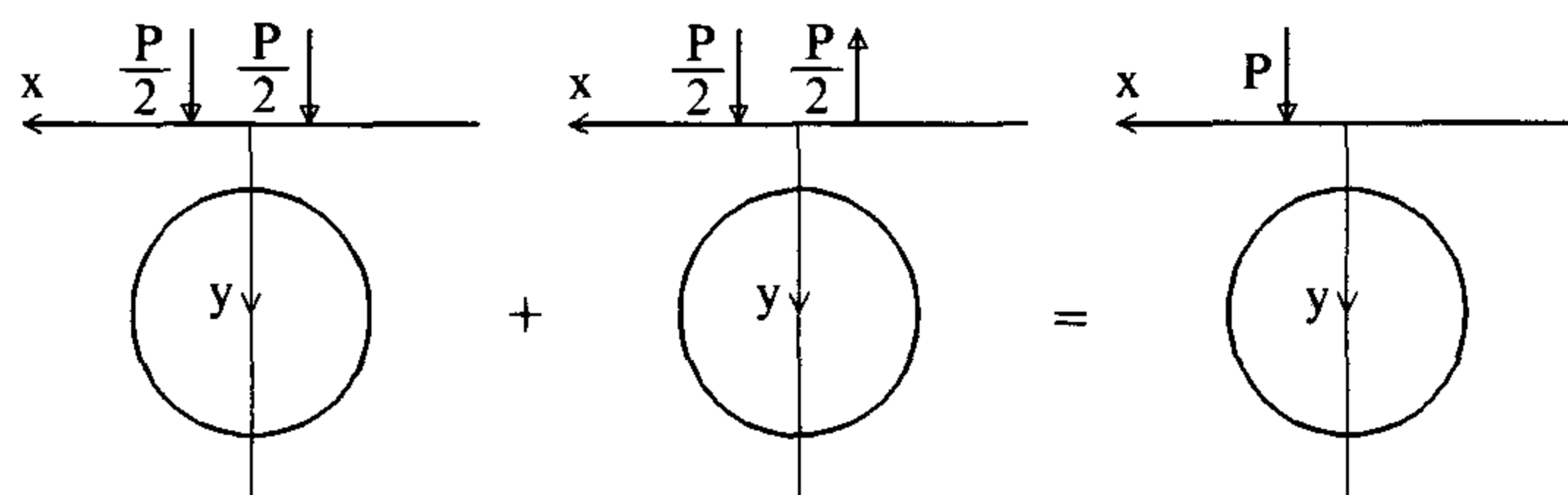


図-3 片側集中荷重

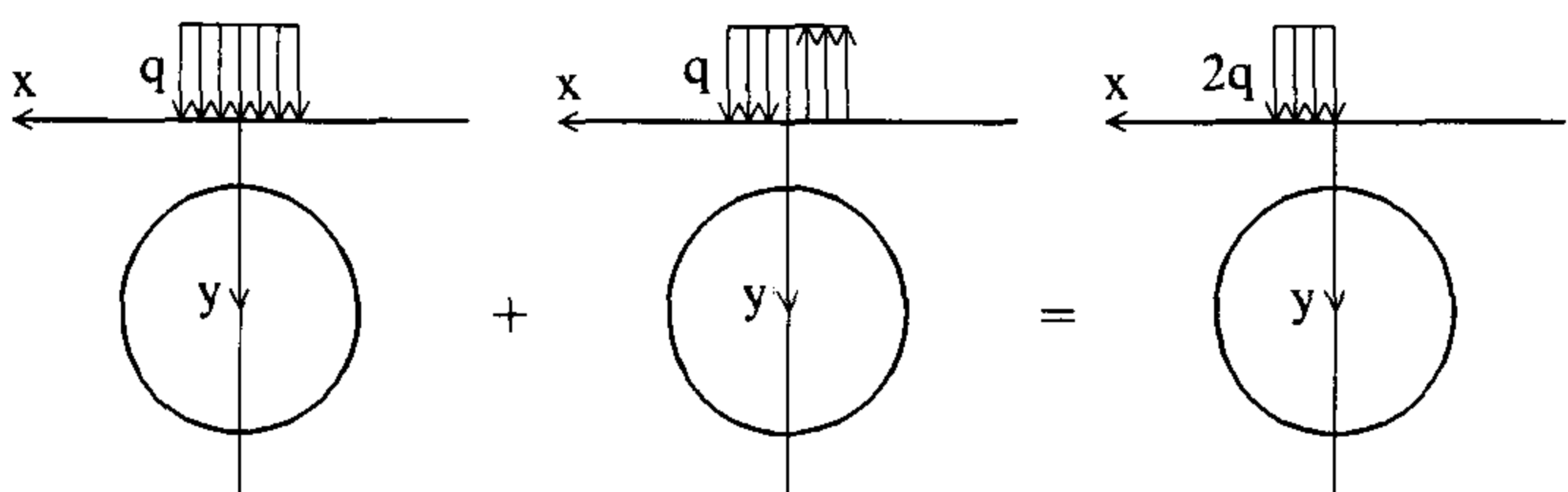


図-4 片側等分布荷重

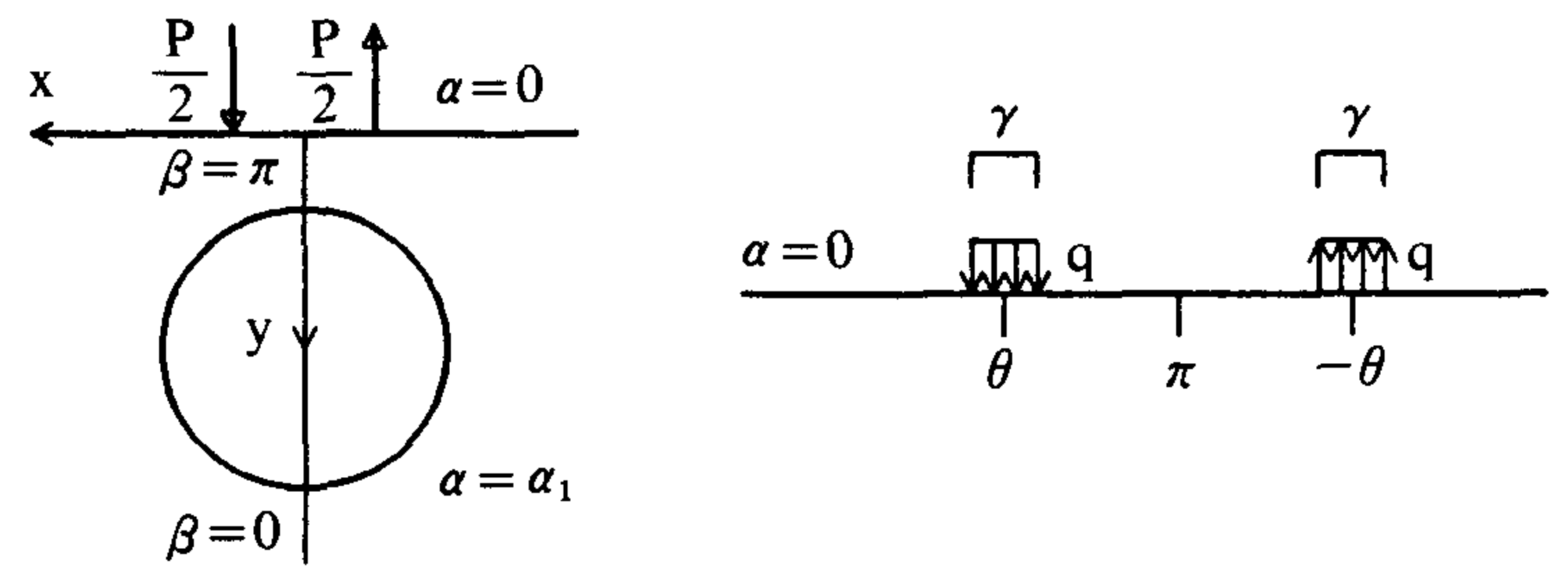


図-5 2点集中荷重時の境界荷重分布

$$\begin{aligned} a\sigma_{\alpha 0} &= \sum_{n=2}^{\infty} [n^2 \cos \beta - (n^2 - 1)] \phi_n(0) \sin n\beta \\ &\quad - \sin \beta \sum_{n=2}^{\infty} n \phi_n(0) \cos n\beta \\ &= - \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 1) \phi_n(0) \sin n\beta \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n+1) \phi_n(0) \sin (n-1)\beta \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \phi_n(0) \sin (n+1)\beta \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、式(15)と(17)の各項の係数を等置することによって次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} &-(n^2 - 1) \phi_n(0) + \frac{1}{2} (n+1)(n+2) \phi_{n+1}(0) \\ &+ \frac{1}{2} (n-1)(n-2) \phi_{n-1}(0) = C_n \end{aligned}$$

すなわち、

$$\phi_{n+1}(0) = \frac{2C_n + 2(n^2 - 1) \phi_n(0) - (n-1)(n-2) \phi_{n-1}(0)}{(n+1)(n+2)}, \quad (n \geq 1) \quad (18)$$

となる。

式(7)より $\phi_n(0) = -2E_n$ および式(16)で集中荷重時は $q\gamma = P/2$ とおき、式(18)に代入して次式を得る。

$$E_{n+1} = \frac{-\frac{2P}{\pi} \sin n\theta + 2(n^2 - 1) E_n - (n-1)(n-2) E_{n-1}}{(n+1)(n+2)}, \quad (n \geq 1) \quad (19)$$

この係数を式(13)に代入して式(13)と(14)より2点集中荷重時の応力が求まる。

さらに鉛直対称荷重の解に、この解を加えることにより、片側集中荷重の解が求まる。

3.2 等分布荷重⁹⁾

直線境界上の荷重分布を Fourier 級数に展開し、応力関数 χ_0 の係数 E_n を決定する。

直線境界 $\alpha=0$ で $\beta=\pi$ での分布幅 $2(\pi-\theta)$ に等分布荷重 q が働く場合（図-6），この荷重を式(15)で表す。Fourier 係数 C_n を求めると次式になる。

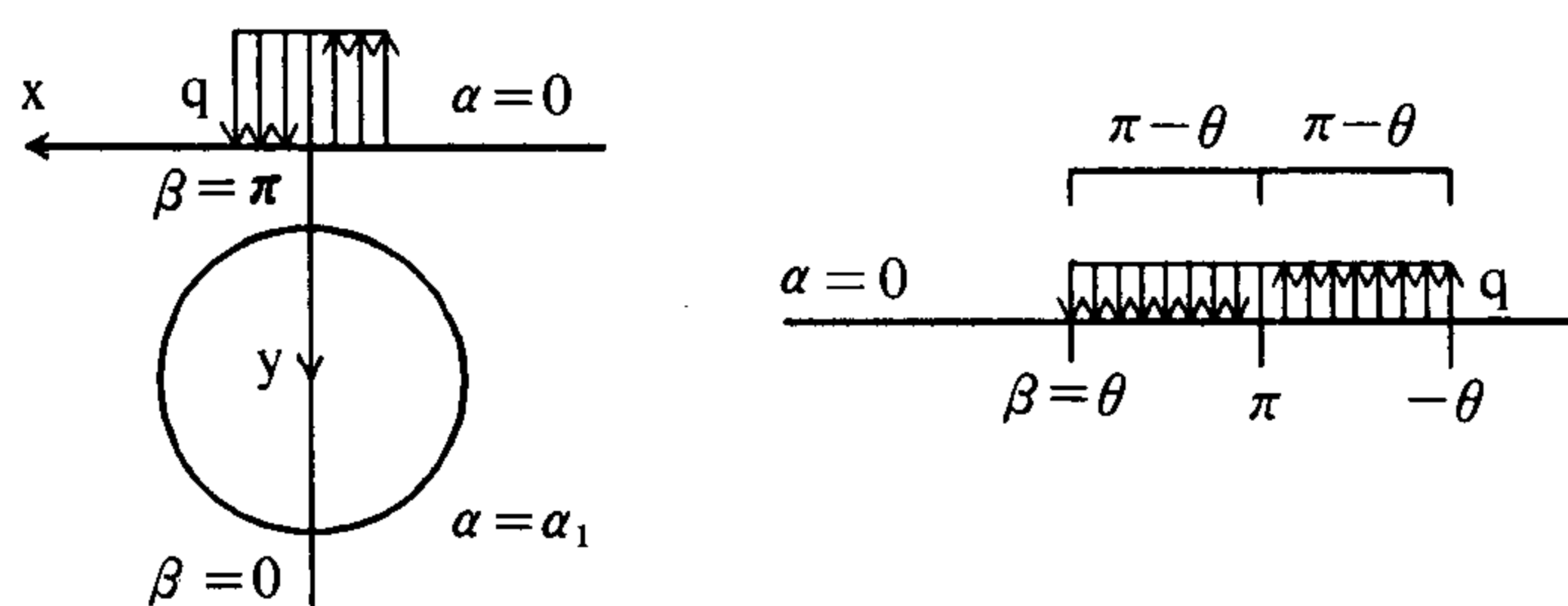


図-6 等分布荷重時の境界荷重分布

$$C_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\beta) \sin n\beta d\beta = \frac{4}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} q \sin n\beta d\beta$$

$$= -\frac{4q}{n\pi} (\cos n\pi - \cos n\theta) \quad (20)$$

次に、式(15)と(17)を等置することにより、係数 E_n を決定する。 $\phi_n(0) = -2E_n$ および式(20)を式(18)に代入して次式を得る。

$$E_{n+1} = \frac{\frac{4q}{n\pi} (\cos n\pi - \cos n\theta) + 2(n^2 - 1)E_n}{(n+1)(n+2)}, \quad (n \geq 1) \quad (21)$$

この係数を式(13)に代入して式(13)と(14)より等分布荷重時の応力が求まる。

さらに鉛直対称荷重の解に、この解を加えることにより、片側等分布荷重の解が求まる。

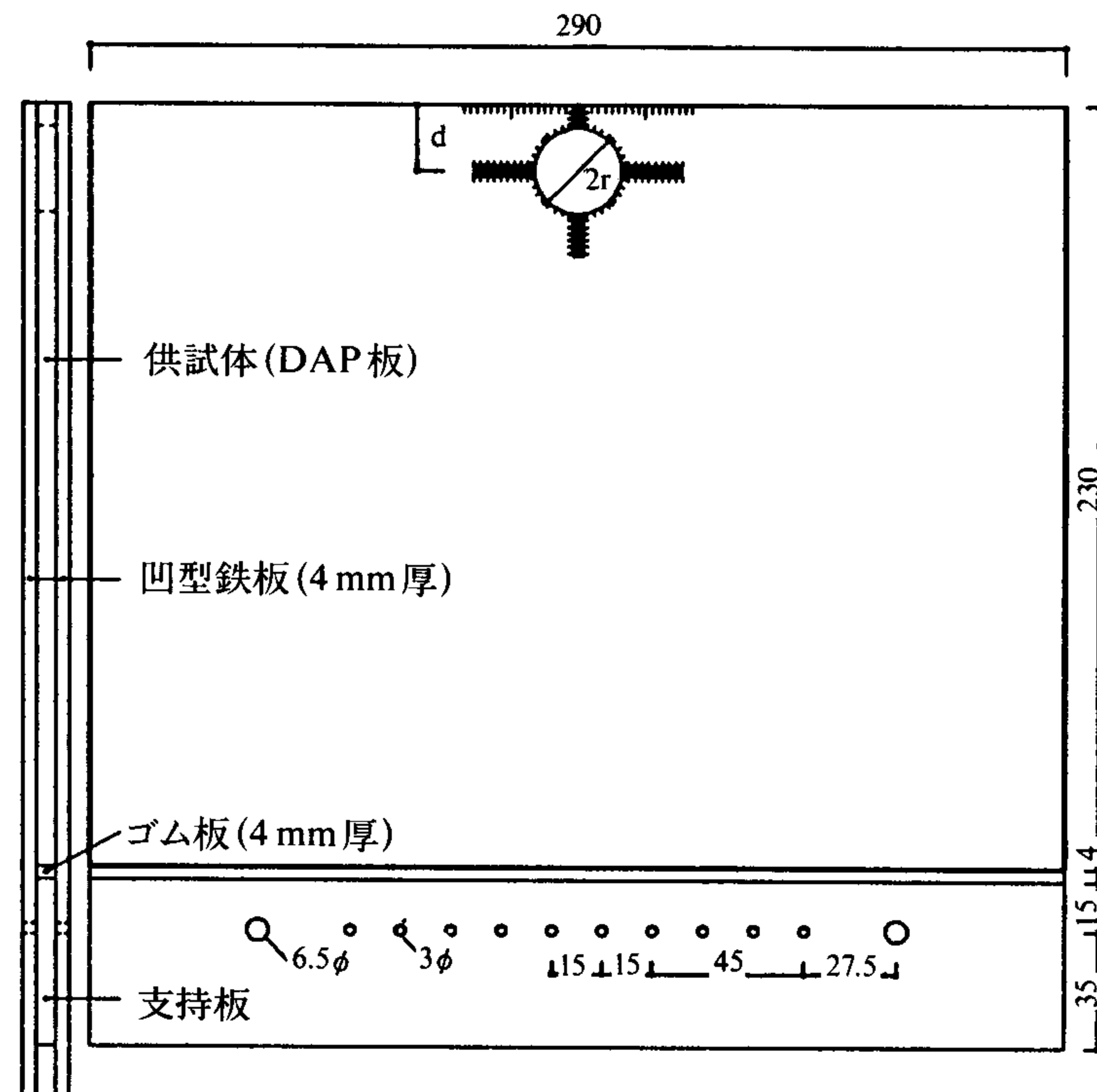
4. 片側荷重時の応力分布と光弾性実験

3章の理論の検討のため光弾性実験を行った。供試体はDAP板、厚さ6mmを用い、29cm×23cmの板に円形開口をあけ作成した。 r を円の半径、 d を直線境界より円中心までの距離とし、 $\lambda = r/d$ を0.5以上とし、0.50, 0.65, 0.80の3タイプについて理論と比較する。図-7にその形状、測定線およびボルトの固定位置を示す。理論は開口壁のその周囲を無限板としており、鉛直荷重下で横方向の拘束を受けている。

本実験は直線境界上で極めて荷重幅が狭く、しかも変形がその境界近くの開口付近に限られ、開口から両側面と底面の境界までの距離が大きいため、その境界の影響は少ないと思われる。

そこで、底面の拘束の影響をなくすために、ゴム板(厚さ4mm)の上に供試体を置き、底面での横方向の変形を可能にし、供試体両面を鉄板で支え、横拘束力は省き側面はまったく自由とし、鉛直力を載荷した。また鉄板の下部は鉄骨アングルに固定支持した。

計算では境界荷重の Fourier 級数は40項までとった。

図-7 供試体形状と測定線位置 (単位: mm)
実線 (供試体), $r=13$

境界の波形は正確な形状とはなりえないが、応力の級数は収束が良く、充分正確である⁶⁾。

4.1 集中荷重時の応力分布

λ の各場合についての理論解の応力分布を図-8に示す。中央からの距離が $r/2$ で、境界の片側に集中荷重が働くときの載荷装置の概要を図-9に示す。この場合の光弾性実験の等色線写真を示す(写真-1)。これによる応力を図-8に黒い点で示す。理論値とよく一致している。

同図左の円上部断面 (y 軸上) の垂直応力 $\sigma_{\beta=\pi}$ は λ の増加とともに引張応力が減少する。その結果 $\lambda=0.80$ の円周ではその頂点で圧縮応力を生じる。円周上部の引張応力の最大は中央から離れて荷重側に生じ、開口が直線境界に近づくに従って急激に大きくなる。 $\lambda=0.80$ のその理論値は $\lambda=0.50$ の場合の約5.8倍になる。最大圧縮応力は同様に荷重側に生じ、その頂点からの位置は $\lambda=0.50$ で約68度、 $\lambda=0.80$ で50度になる。

同図右の円上部断面のせん断応力 $\tau_{\alpha\beta}$ は λ の増加とともに放物線分布に近づく。 $\lambda=0.80$ のその最大値は $\lambda=0.50$ の場合の約2.7倍になる。実験値の直線境界 (x 軸上) の応力 σ_x は載荷点付近で圧縮応力を生じ、その位置から遠ざかるにつれて、引張応力を生じる。引張応力の生じる範囲は λ の増加とともに載荷点に近づく。円側部断面の圧縮応力 σ_y は載荷点側が大きく、境界から遠ざかるにつれて減少する。円下部断面の引張応力 σ_x も同様に減少する。

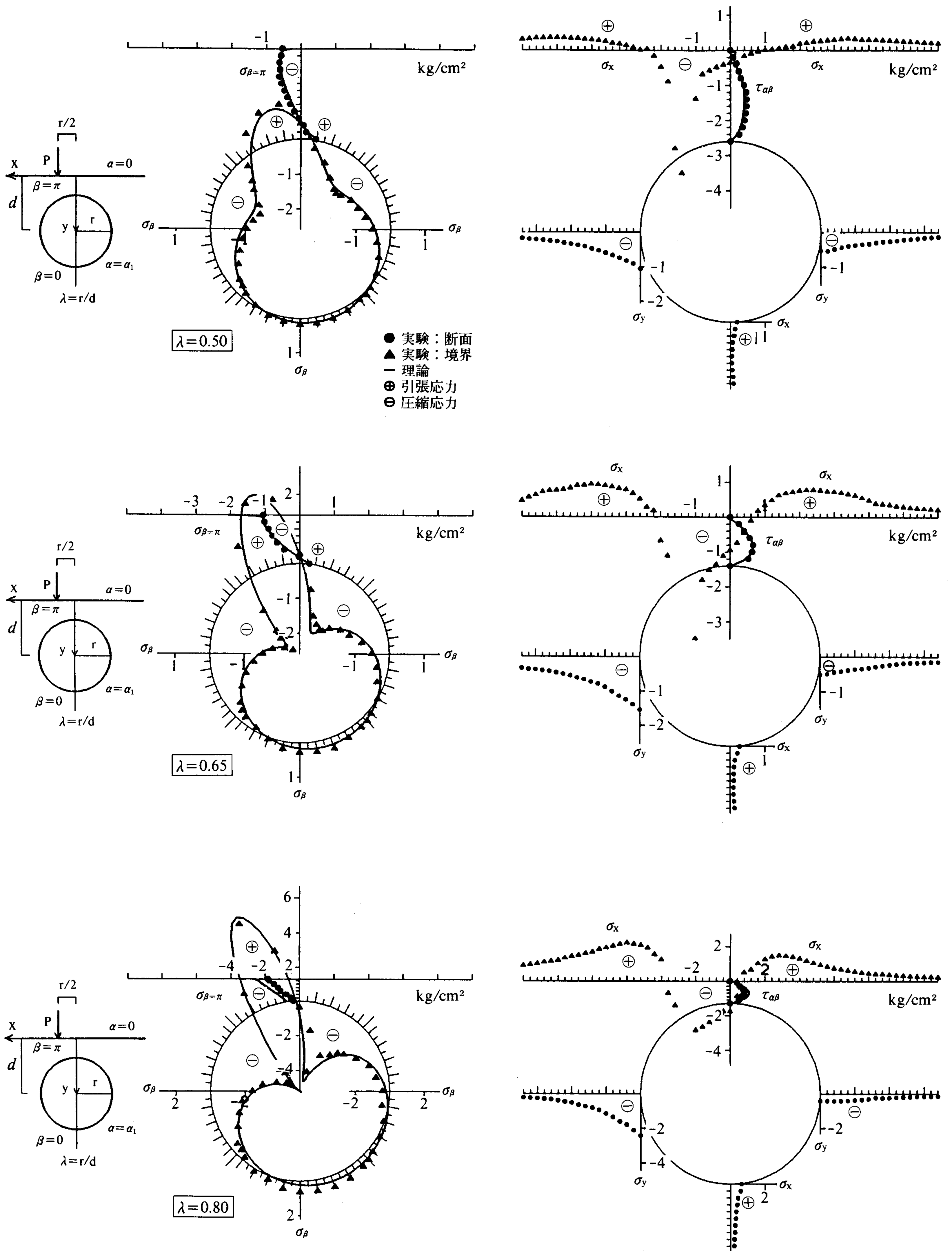


図-8 集中荷重時の応力分布

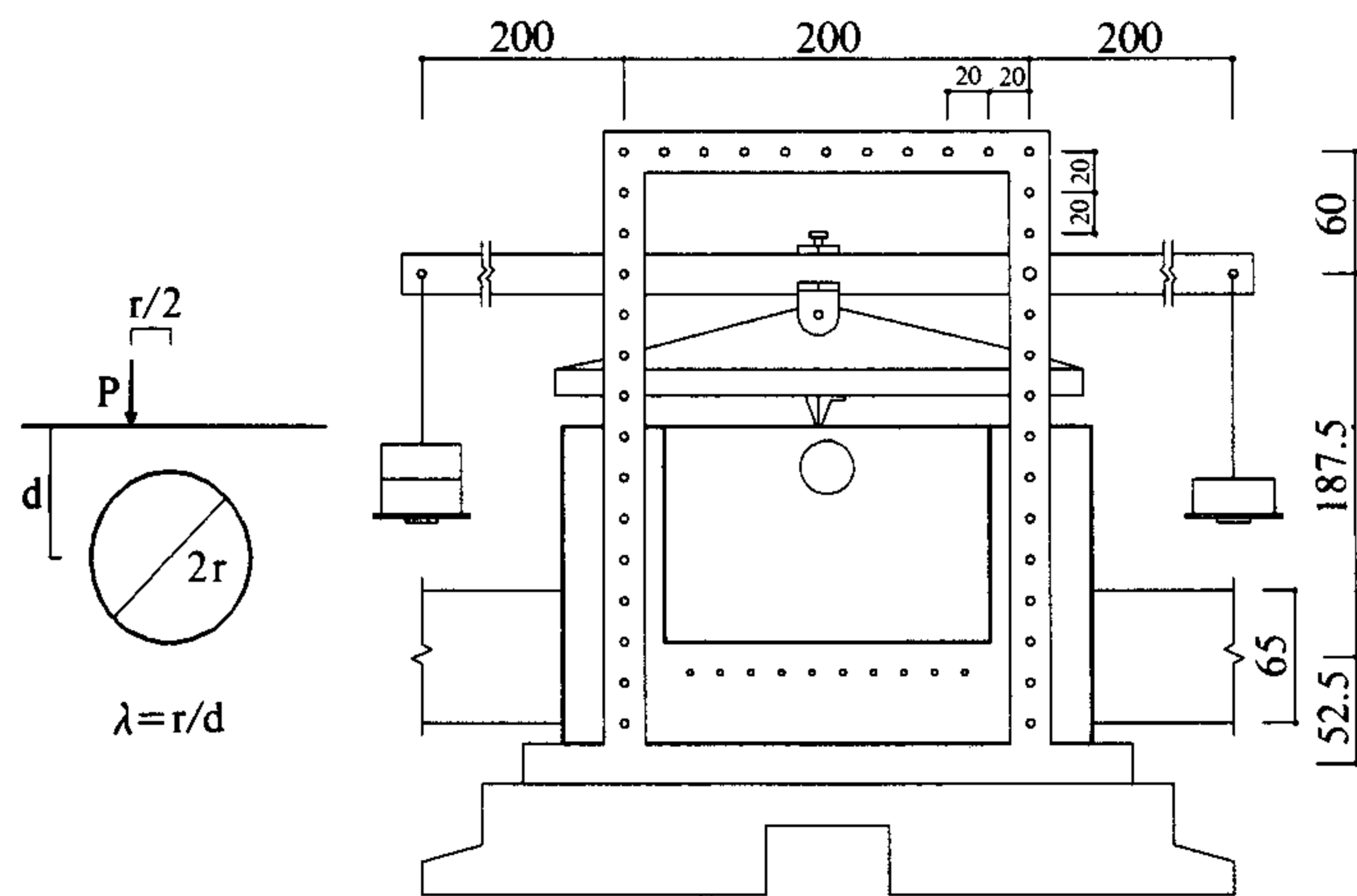


図-9 集中荷重装置 (単位: mm)

4.2 等分布荷重時の応力分布

λ の各場合についての理論解の応力分布を図-10に示す。中央からの分布幅が $r/2$ で、境界の片側に等分布荷重が働くときの载荷装置の概要を図-11に示す。なお、载荷は集中荷重を等分布にするために、薄い平板を重ねた支持台を通して行い、集中力が载荷点から45度方向に等分布に伝達すると想定し、その形状を決定した。この場合の光弾性実験の等色線写真を示す (写真-2)。これによる応力を図-10に黒い点で示す。理論値とよく一致している。応力分布は集中荷重の場合に似ている。

同図左の円上部断面 (y 軸上) の垂直応力 $\sigma_{\beta=\pi}$ は λ

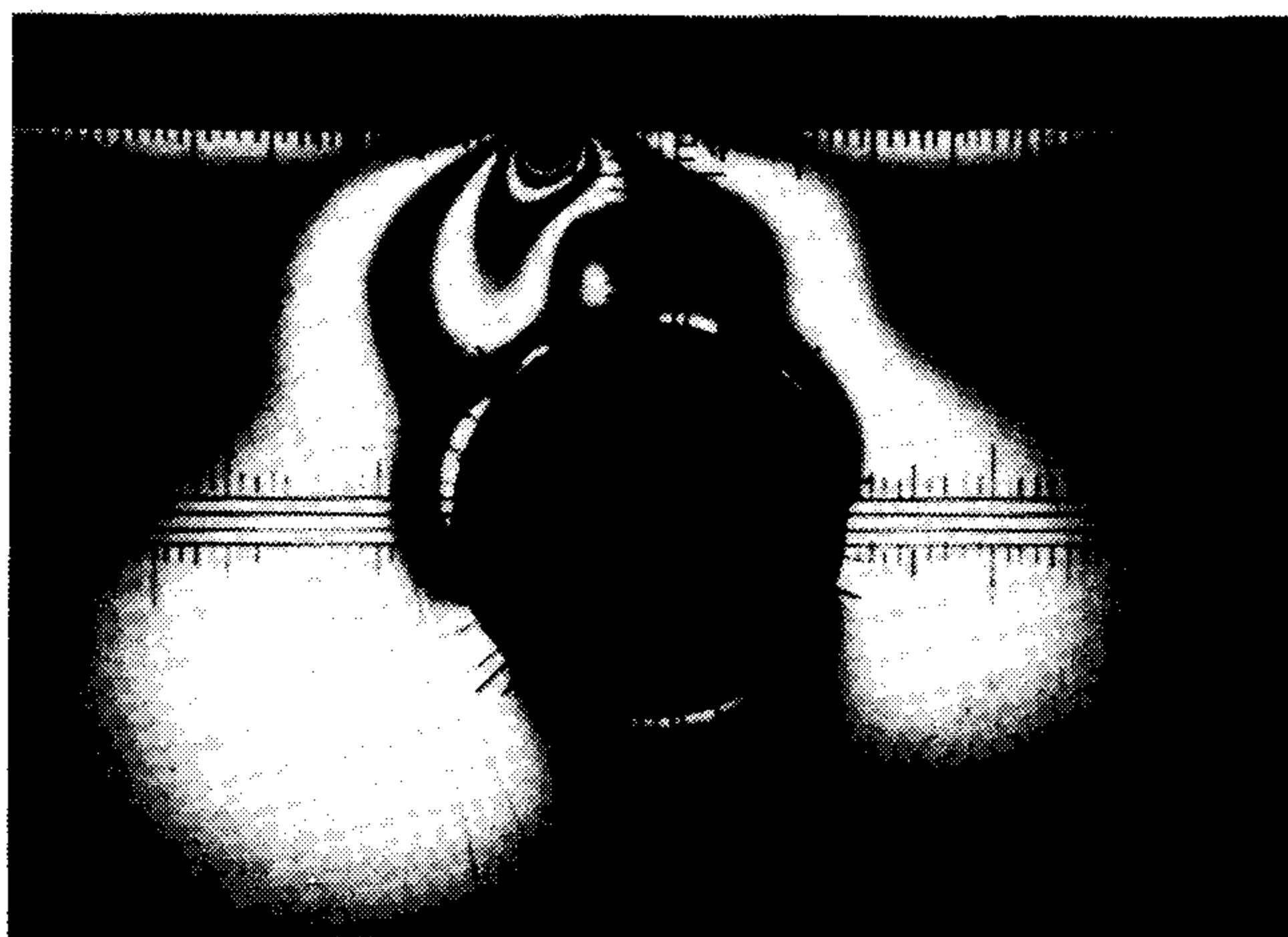
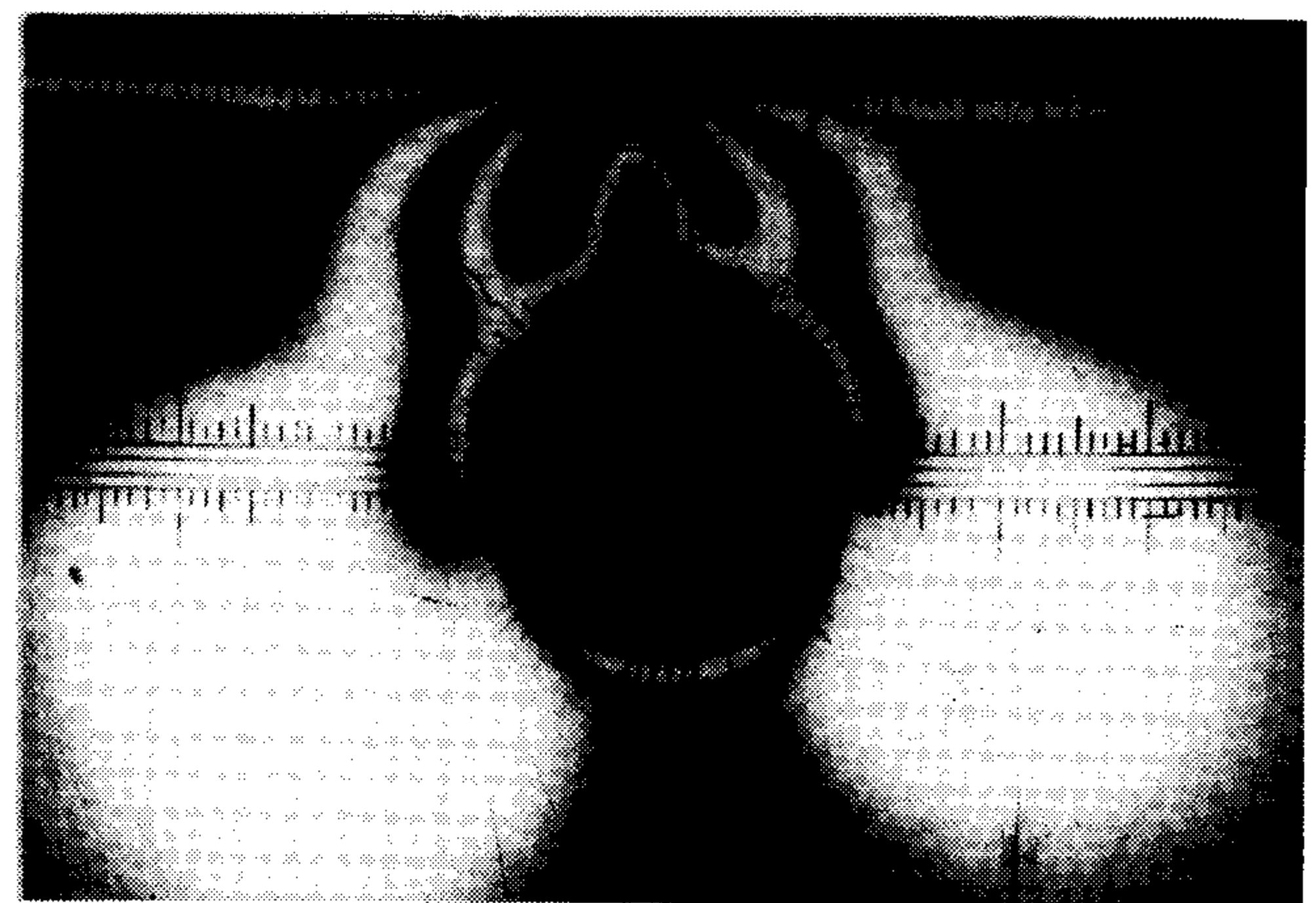
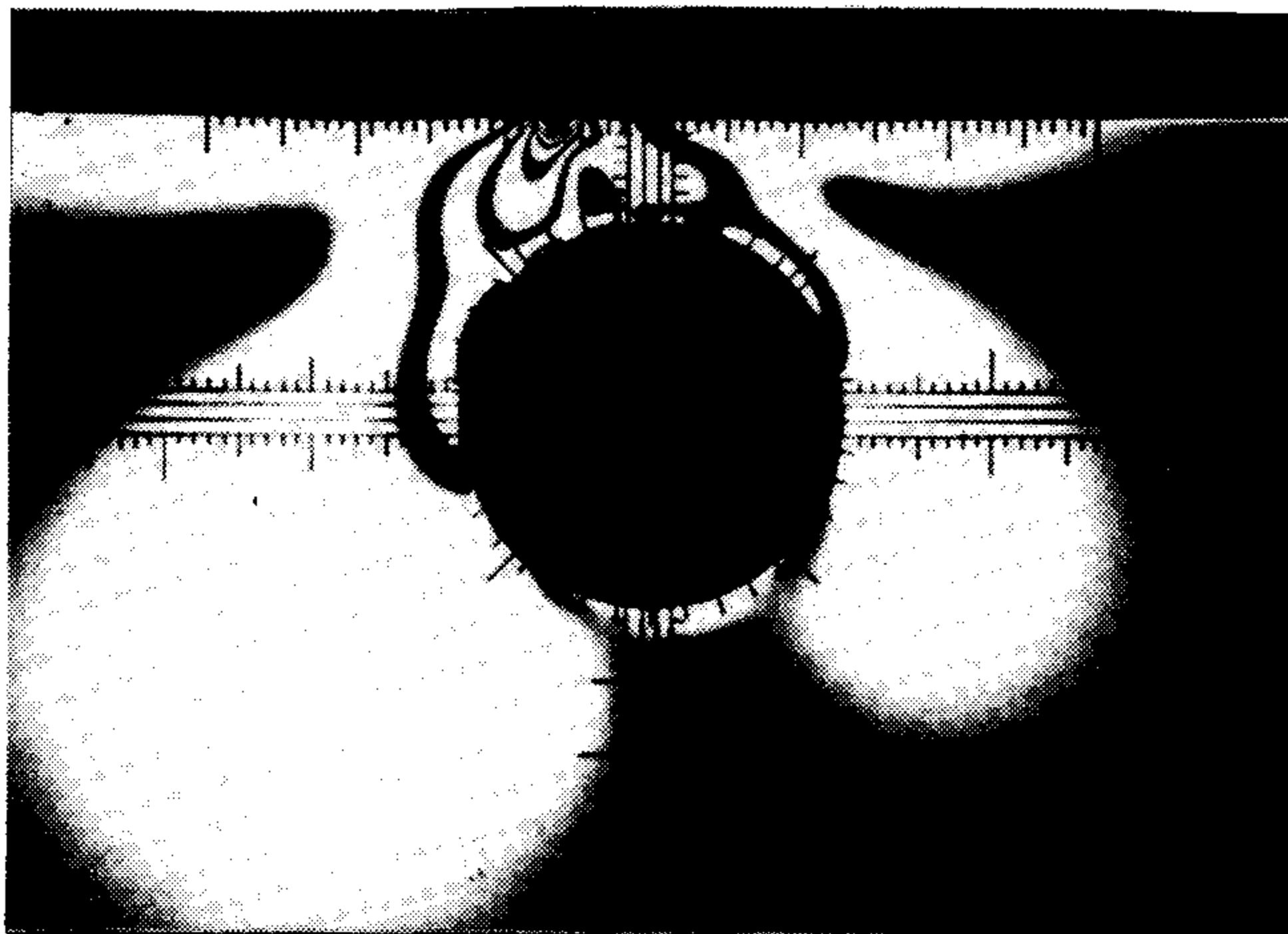
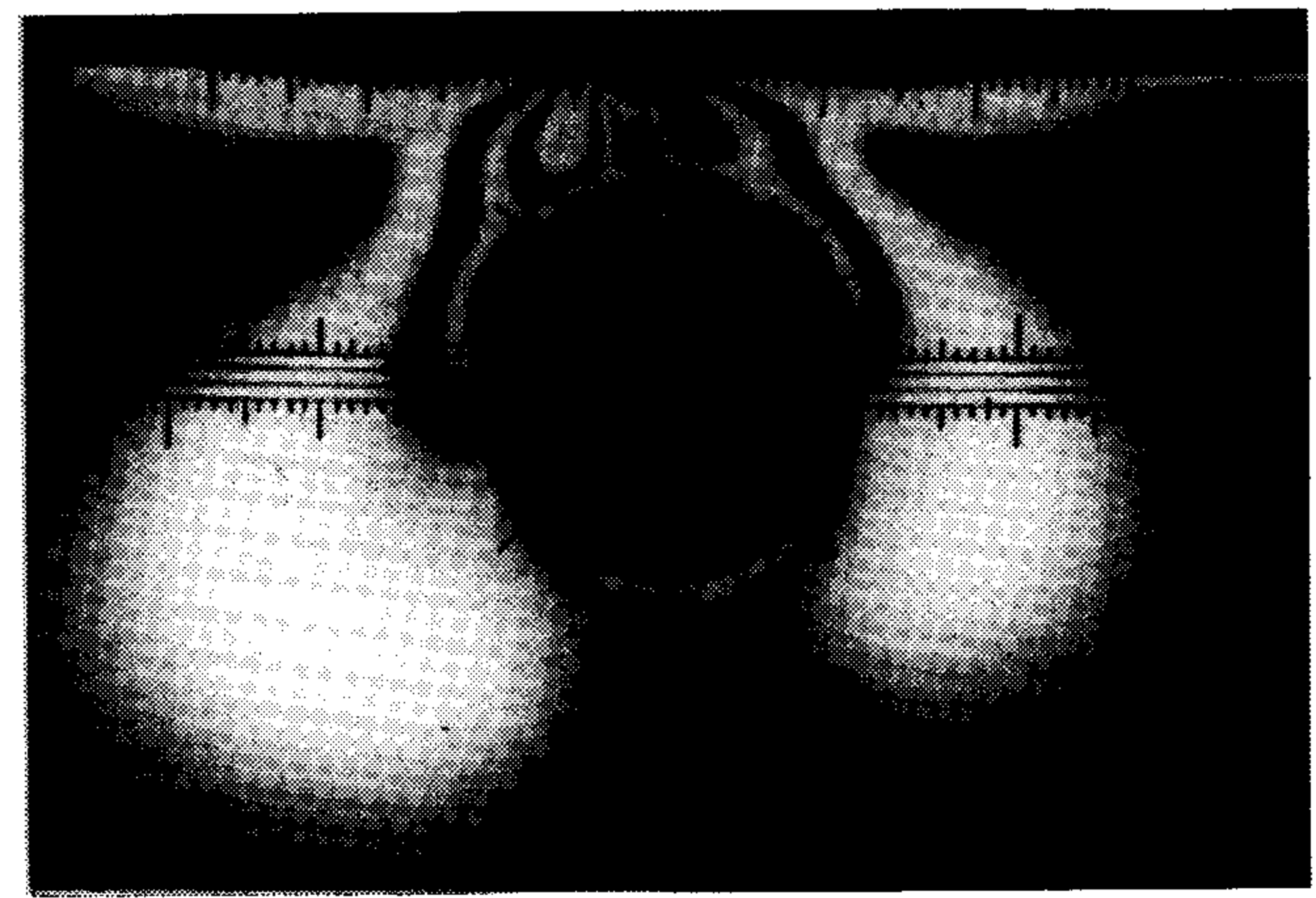
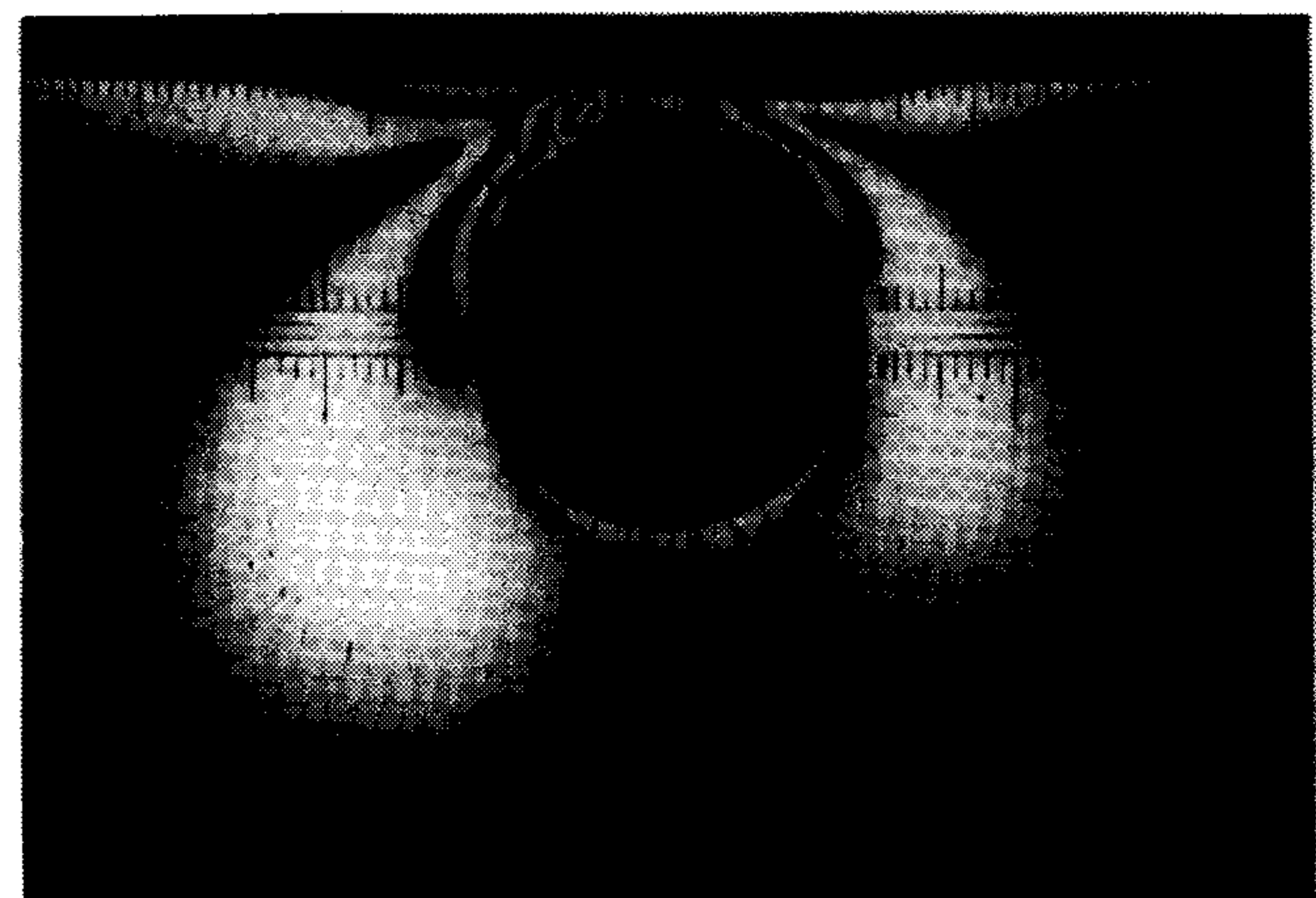
 $\lambda = 0.50$  $\lambda = 0.50$  $\lambda = 0.65$  $\lambda = 0.65$  $\lambda = 0.80$  $\lambda = 0.80$

写真-1 集中荷重時の光弾性等色線

写真-2 等分布荷重時の光弾性等色線

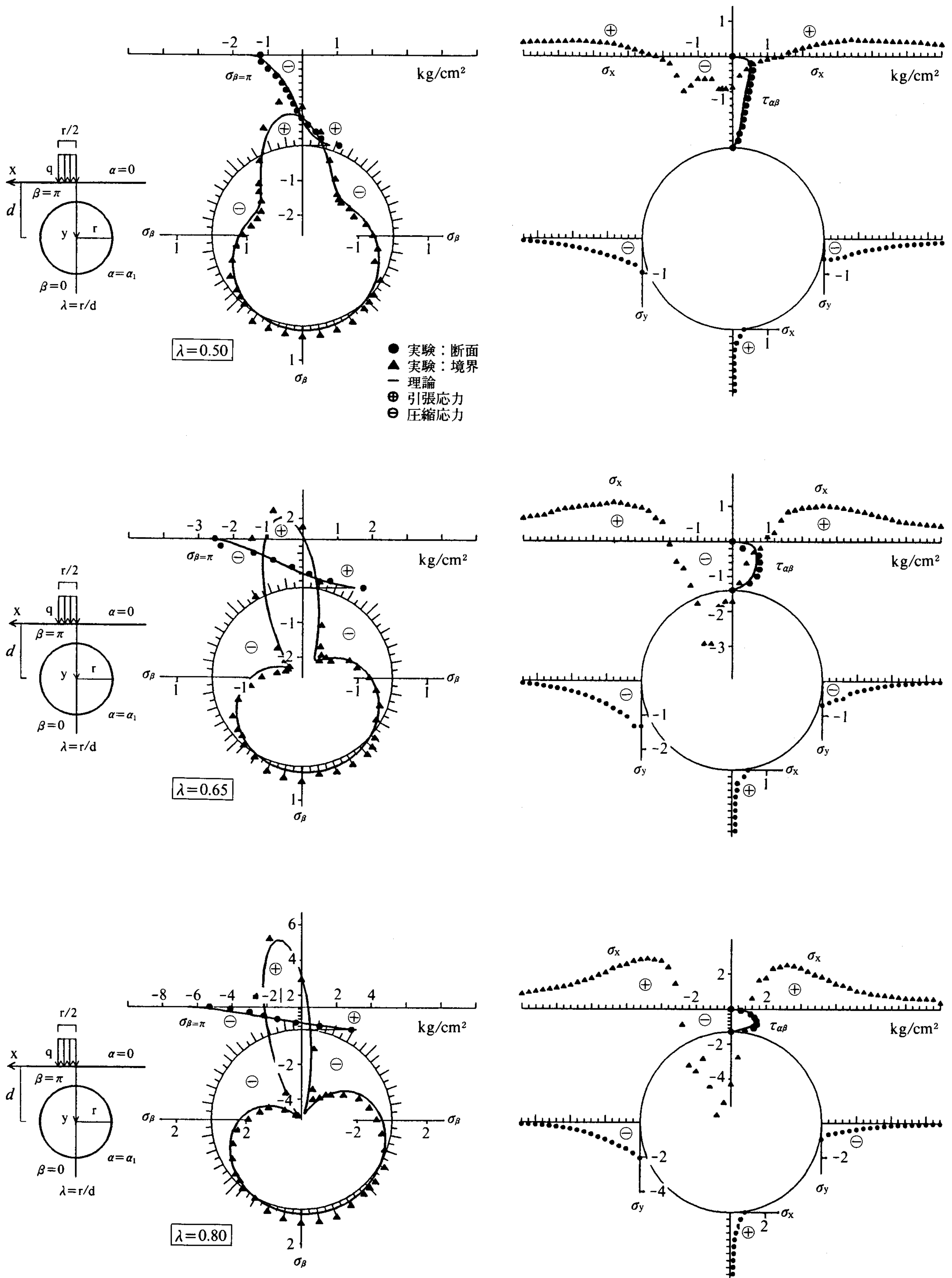


図-10 等分布荷重時の応力分布

の増加とともに直線分布に近づき、引張応力は大きくなるが、その変化は少い。円周上部の引張応力の最大は中央から少し荷重側に生じ、開口が直線境界に近づくに従って急激に大きくなる。 $\lambda=0.80$ のその理論値は $\lambda=0.50$ の場合の約5.7倍になる。最大圧縮応力は同様に荷重側に生じ、その頂点からの位置は $\lambda=0.50$ で約60度、 $\lambda=0.80$ で40度になる。

同図右の円上部断面のせん断応力 $\tau_{\alpha\beta}$ は λ の増加とともに放物線分布に近づく。 $\lambda=0.80$ のその最大値は $\lambda=0.50$ の場合の約2.9倍になる。実験値の直線境界（ x 軸上）の応力 σ_x は載荷点付近で圧縮応力を生じ、その位置から遠ざかるにつれて、引張応力を生じる。引張応力の生じる範囲は λ の増加とともに載荷点に近づく。円側部断面の圧縮応力 σ_y は載荷点側が大きく、境界から遠ざかるにつれて減少する。円下部断面の引張応力 σ_x も同様に減少する。

4.3 円周上部の応力値の検討

円形開口で最も重要なのは円周上部の応力である。この最大引張応力について検討する。

各荷重時の荷重の合計を一定としたときの、円周上部の各応力の最大値を図-12に示す。 θ はその最大値の生じている位置で、頂点よりの角度を示す。

各荷重とも λ の増加とともに引張応力は増大し、その変化はほぼ一致している。その位置は、集中荷重では λ の増加とともに頂点より離れ、等分布荷重では頂点に近く、ほぼ一定である。

5. 結 語

本論文では応力関数を直接双極座標で示し、直線境界の荷重をFourier級数に展開できることに着目し、その荷重条件を満足するように未知係数を決定する方法を提案している。この方法によれば計算が容易で、また荷重分布を直接Fourier級数に展開することから、任意の荷重状態について解析が可能である。そこで、対称荷重時の解に、本論文の解を加え合わせて、境界の片側に鉛直荷重を受ける場合の解を求めた。

計算例として、直線境界の中央から距離 r （円の半径）/2に集中荷重、およびその幅に等分布荷重の場合を解き、その応力分布を求めた。その結果は光弾性実験とよく一致した。その結果を要約すると、

直線境界の片側に荷重が集中、あるいは分布する場合対称荷重時に比較して円周上部の荷重側に大きな引張応力を生じるが、その最大値はほぼ等しく、その応力の生じる位置は異なる。

また、集中と分布荷重時の円上部断面の垂直応力の分

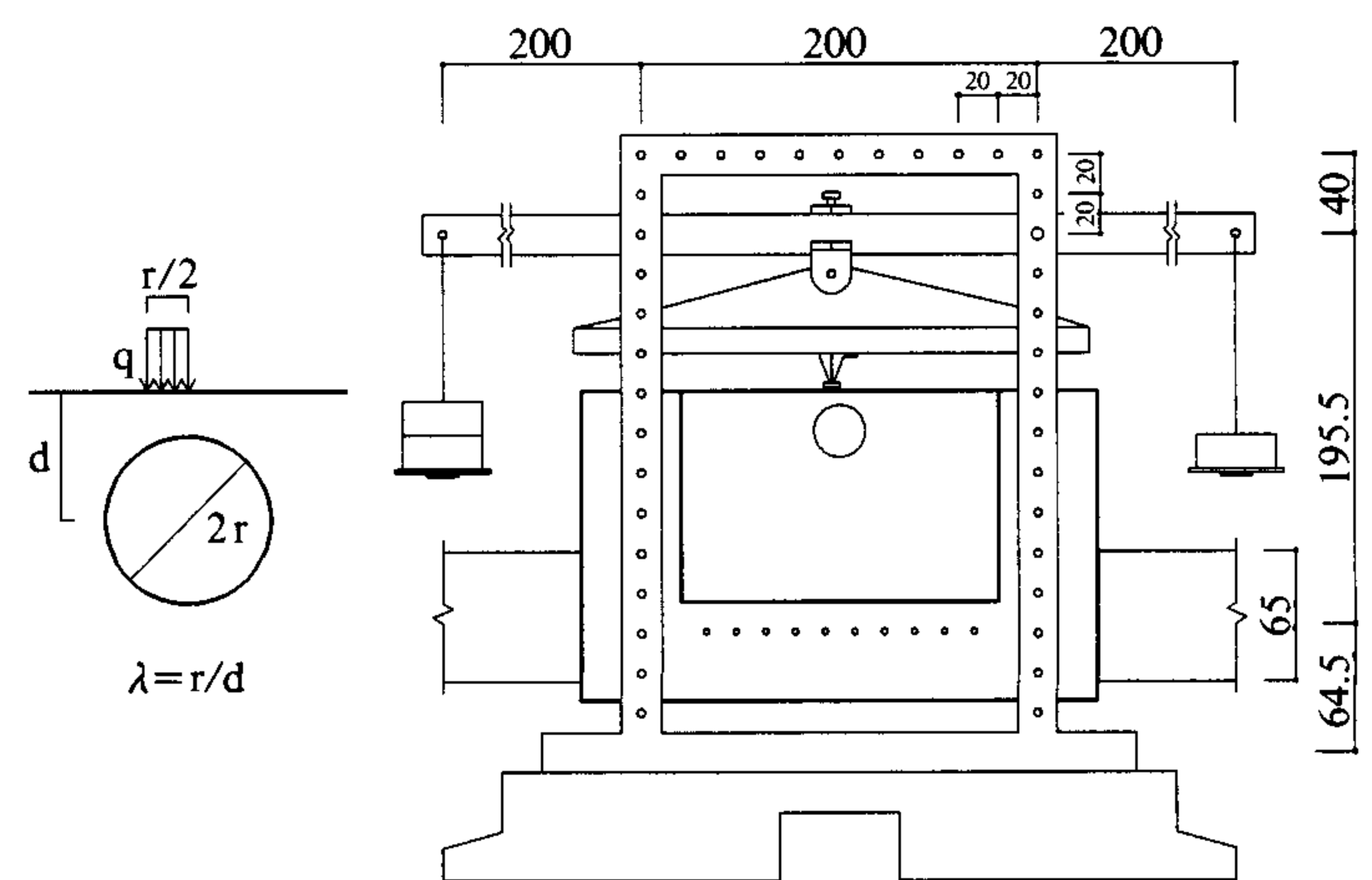


図-11 等分布荷重載荷装置（単位：mm）

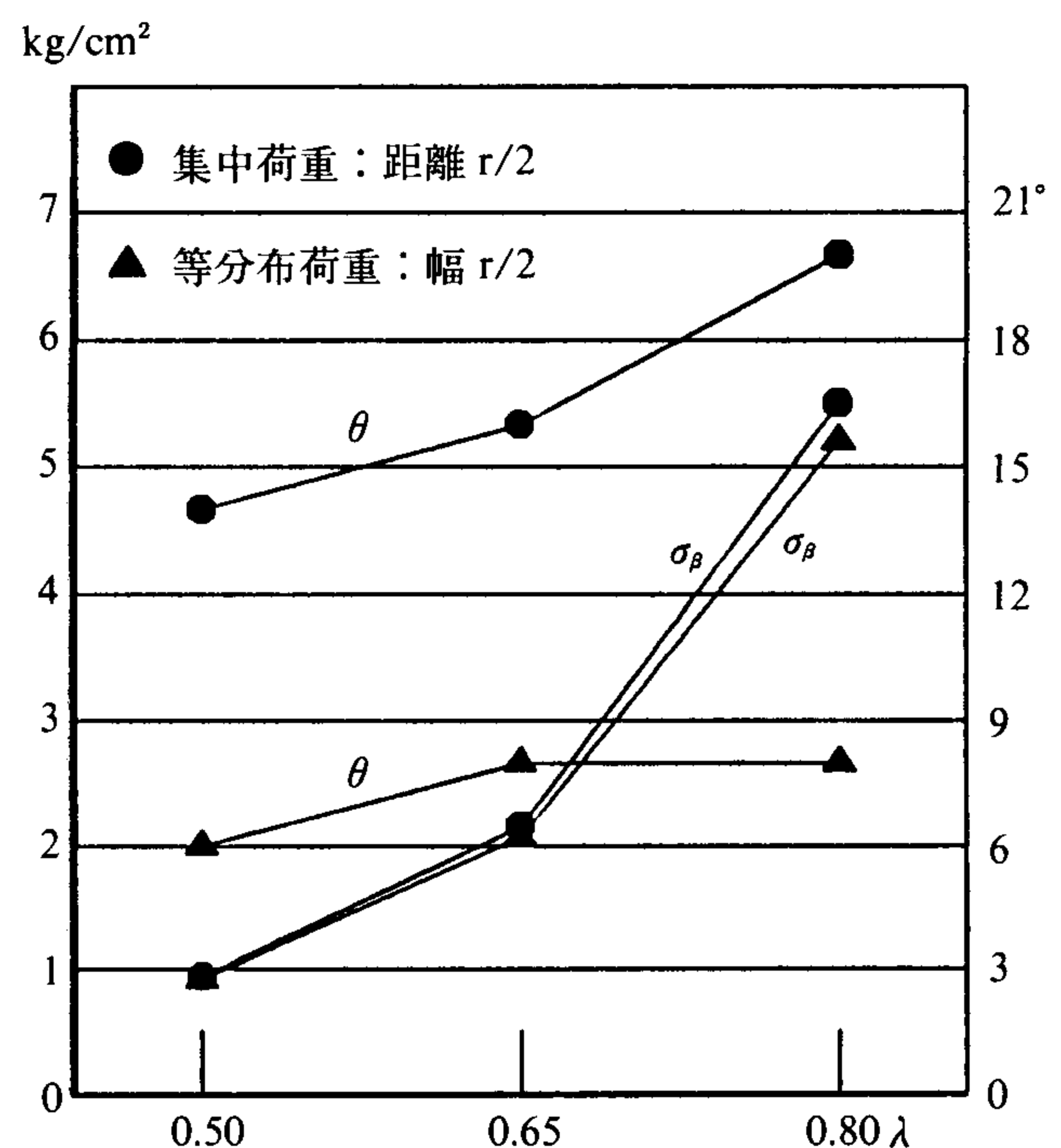


図-12 荷重側の円周の最大引張応力の値 σ_β とその位置 θ （ r ：半径）

布は異なる。せん断応力の分布はほぼ類似している。

謝 辞：本研究を進めるにあたり、絶えず有益なご指導を賜りました早稲田大学、松井源吾教授に深く感謝します。

また、懇切なご助力をいただきました東京工芸大学、田村幸雄教授、実験および計算にご協力をいただいた当時の同大学学生、三村幸弘君、清水勝利君、竹内茂君および金子英樹君に深く感謝します。

参 考 文 献

- 1) G. B. Jeffery: Plane stress and plane strain in bipolar co-ordinates, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Vol. A221, pp. 265~293, 1921
- 2) 鵜戸口英善：双極座標による二三の平面弾性問題の解（その1）、日本機械学会誌、13巻44号、pp. 17~

- 41, 昭和22年5月, 同上(その3), 15巻50号, pp. 76~97, 昭和24年
- 3) A. Barjansky: The distortion of the Boussinesq field due to a circular hole, *Quart. Appl. Math.* Vol. 2, No. 1, pp. 16~30, 1944
- 4) 大川秀雄: 双極座標による Boussinesq の応力関数について, 新潟大学工学部研究報告, 第29号, pp. 41~44, 1980
- 5) 大川秀雄: 集中荷重によるたわみ性埋設管の挙動, 土質工学論文報告集, Vol. 24, No. 2, pp. 153~160, June, 1984
- 6) 榎田寛治: 円形開口のある壁の鉛直荷重時応力について, 日本建築学会構造系論文報告集, 第375号, pp. 83~93, 昭和62年5月
- 7) Timoshenko & Goodier: *Theory of Elasticity*, (Third Ed.), McGraw-Hill, pp. 196~198, 1970
- 8) 榎田寛治: 円形開口のある壁体の鉛直荷重時応力について 一片側集中荷重の場合, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 901~902, 昭和63年10月
- 9) 榎田寛治: 円形開口のある壁体の鉛直荷重時応力について 一片側等分布荷重の場合, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 45~46, 昭和62年10月

(原稿受理 平成元年9月30日)