

電子回路の解曲線追跡法における可変刻み幅による求解法

森 岡 望*

Varied Interval method in Tracing Solution Curves
of Electronic Circuits

Nozomi MORIOKA*

Abstract: In this paper, we present a new algorithm of the solution curve tracing never to fail. It is very important to calculate the tracing solution curve of nonlinear equations which have D.C. resistive circuits. The Newton-Raphson methods are applied to calculate the solution curve of nonlinear equations. They can efficiently find the solution curve by proper interval, however, whether or not they get all the solutions.

Keywords: nonlinear algebraic equation, Newton-Raphson method, tracing solution curve, varied interval

要 旨: 本論文では可変刻み幅を導入して、連続的に必ず解曲線を追跡できる求解法を提案する。電子回路の直流解析は、動作点を求める問題に帰着し、回路設計における重要な一つのステップである。解曲線が存在するような回路に対して、ニュートン・ラフソン法を用いて連続的に解曲線を探索する解法がある。このとき、刻み幅が不適当な場合には連続的に全ての解を追跡することが出来ないことがある。

1. はじめに

電子回路の設計では、回路に含まれているキャパシタを開放除去し、インダクタを短絡除去することによって得られた直流抵抗回路を解いて直流動作点を求めることは重要な問題の一つである。この場合、ダイオードやトランジスタなどの非線形素子が含まれているならば回路方程式は非線形連立代数方程式で記述され、解析的に解くことは一般に困難となり、ニュートン・ラフソン法などの数値解法によって解かれる。さらに直流動作点を連続的にもとめるために入力電圧、入力電流も変数と仮定して回路方程式を作り、ニュートン・ラフソン法で解くと、この解は解曲線となり効率よく追跡することができる^{1),2)}。

このとき、解曲線の方が急変することがあり、このような性質を有するスティフ (stiff) な系に対しても安定に解曲線を追跡できるアルゴリズムを提案する。また、その数値計算の結果を示し有効性を確認した。

2. 解曲線追跡法

一般に、回路中に素子が n 個含まれ、入力電圧源を $n+1$ 個目、入力電流を $n+2$ 個目の変数と考え、タブ

ロー法を用いて回路方程式を立てると、

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) = 0 \\ f_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

のように表すことができる。なお、方程式 f_{n+1} は入力電流を定義したために増加した式である

式(1)を微分して、ヤコビ行列を用いて示すと、

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+2}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{n+1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{n+2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_{n+1}} & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_{n+2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

となる。式(2)は、方程式の数が $(n+1)$ 個で、変数の個数が $(n+2)$ 個であり、解くために変数を1つ消去することを考える。

今、消去する変数を x_i としたとき、式(2)のヤコビ行列を A とし、その i 列を消去した行列を $A(x_i)$ と表現することにする。式(2)をクラメルの公式で解くために消去変数 x_i の項を移項すると、

* 工学部電気電子工学科 教授
Professor, Department of Electrical and Electronics
Engineering, Faculty of Engineering

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i+1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+2}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{i+1}} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{n+1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{n+2}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_{i+1}} & \dots & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_{n+1}} & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_{n+2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_{i-1} \\ dx_{i+1} \\ \vdots \\ dx_{n+1} \\ dx_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial x_i} dx_i \\ -\frac{\partial f_2}{\partial x_i} dx_i \\ \vdots \\ -\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_i} dx_i \end{bmatrix}$$

となる。

上式を具体的に解くと

$$\Delta = \det A(x_i)$$

また

$$\Delta_1 = (-1)^{1-1} dx_i \cdot \det A(x_1)$$

以下同様にして、

$$\Delta_2 = (-1)^{2-1} dx_i \cdot \det A(x_2)$$

⋮

$$\Delta_n = (-1)^{n-1} dx_i \cdot \det A(x_n)$$

$$\Delta_{n+1} = (-1)^n dx_i \cdot \det A(x_{n+1})$$

$$\Delta_{n+2} = (-1)^{n+1} dx_i \cdot \det A(x_{n+2})$$

従って、

$$dx_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\det A(x_1) \cdot dx_i}{\det A(x_i)}$$

$$\therefore \frac{dx_i}{\det A(x_i)} = \frac{dx_1}{\det A(x_1)}$$

同様に

$$\frac{dx_i}{\det A(x_i)} = \frac{1}{-1} \frac{dx_2}{\det A(x_2)}$$

⋮

$$\frac{dx_i}{\det A(x_i)} = \frac{1}{(-1)^{n-1}} \frac{dx_n}{\det A(x_n)}$$

$$\frac{dx_i}{\det A(x_i)} = \frac{1}{(-1)^n} \frac{dx_{n+1}}{\det A(x_{n+1})}$$

$$\frac{dx_i}{\det A(x_i)} = \frac{1}{(-1)^{n+1}} \frac{dx_{n+2}}{\det A(x_{n+2})}$$

となる

解曲線 s 上の微小変化分を ds とすれば、

$$\begin{aligned} ds &= \frac{dx_i}{\det A(x_i)} = \frac{dx_1}{\det A(x_1)} = \frac{dx_2}{-\det A(x_2)} = \dots \\ &= \frac{dx_{n+1}}{(-1)^n \det A(x_{n+1})} = \frac{dx_{n+2}}{(-1)^{n+1} \det A(x_{n+2})} \end{aligned}$$

となる。

上式は、解曲線 s に沿ったベクトル場の方程式とすれば、

$$\frac{dx_i}{ds} = (-1)^{i-1} \det A(x_i) \quad (i=1, 2, \dots, n+2) \quad (3)$$

となる。

式(3)の微分方程式を直接解くことが困難であるため、微分のかわりにオイラー差分商を用いて近似的に解く。ここで刻み幅を Δs とすれば

$$\frac{dx_i}{ds} \approx \frac{x_i(s+\Delta s) - x_i(s)}{\Delta s}$$

となり、式(4)が得られる。

$$x_i(s+\Delta s) = x_i(s) + \Delta s \cdot \{(-1)^{i-1} \det A(x_i(s))\} \quad (i=1, 2, \dots, n+2) \quad (4)$$

このアルゴリズムは、次の(手順1)～(手順5)のように使用する。

(手順1) 適当な出発値を与える。

(手順2) オイラー法で1ステップ進めるために、式(4)を計算する。

式(4)によって、新しい曲線上の点を求めるが、簡単な差分近似であるため、式(3)の解に対して誤差が大きい場合、次の手順を行う。

(手順3) (手順2)のオイラー法1ステップ計算値を出発値として、ニュートン・ラフソン法により高精度の解に収束させる。

(手順4) 解の計算領域判定を行い、領域内であれば(手順2)へ、領域外であれば、次の手順へ行く。

(手順5) 解データをグラフ作成用ファイルに転送して計算を終了する。

3. 提案手法

数値計算では $\det A(x_i)$ ($i=1, 2, \dots, n+2$) の中で絶対値最大で割って正規化計算を行った後に、消去変数の選定は、 $\det A(x_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$) の中で絶対値最大の x_i を選定する。ここで、新しい提案を2つ述べる。

(1) 固定消去変数の導入

式(2)のヤコビ行列を求めるとき、数値偏微分用微小変化分 Δ と、その2倍を用いてヤコビ行列を2回求め、その間で変化している行列要素は0として、定数のみのヤコビ行列 A_c を作成し、 $\det A_c(x_i)$ を計算して、絶対値最大の x_i ($i=1, 2, \dots, n$) を固定消去変数とすれば数値解法中で消去変数を固定できる。固定消去変数の場合は、オイラー法1ステップ計算の直前に反復範囲を定められるので処理時間を短縮できる。

(2) 可変 Δs の採用

オイラー法1ステップ計算で用いる Δs を固定した値で計算すると、その値が不適当な場合求めている解曲線の途中で跳躍が発生して完全な追跡ができないことが起きる。これを防止し、一度の実行で必ず解曲線が得られるように Δs を可変にする。 Δs 変更の考え方は(手順3)のニュートンラフソン法により高精度の解に収束させる

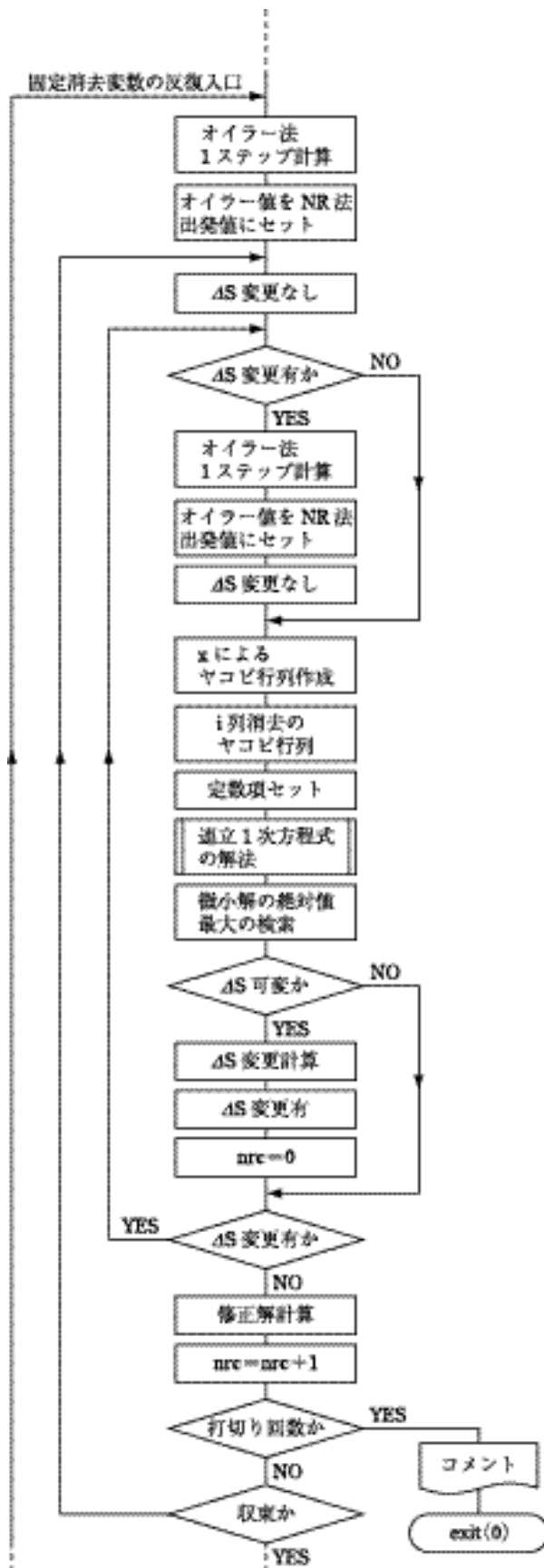


図1 部分流れ図

部分に組み込まれている。これを中心にした部分流れ図を図1に示す。重要な点は、 Δs 変更の条件と Δs 変更計算である。

Δs 変更の条件は、次に示す計算例の場合では収束反復回数が2回以上または微小解の絶対値最大が Δs の3倍以上のときに発生する。反復回数は Δs が適当であれば4回以内で収束するので、ここでは2回以上に設定している。微小解の条件はオイラー値が離れすぎているのを防いでいる。

次に、 Δs 変更計算の計算式は

$$\Delta s = \Delta s(1 - \alpha) \quad (0 < \alpha < 1)$$

で、比率 α が1に近い値だと急激に減少し、解の個数が非常に多くなり処理時間が増すので $\alpha = 0.2$ に設定している。なお、過度に Δs が微小値になるのを防止するために最小 Δs を設定しておく。

4. 計算例

具体的な回路例として、図2に示す回路を用いた。図2の回路方程式は、次のように求まる。

$$\begin{cases} f(1) = v_1 + v_2 + v_3 - v_{in} \\ f(2) = g_1(v_1) - i_{in} \\ f(3) = -g_1(v_1) + g_2(v_2) \\ f(4) = -g_2(v_2) + g_3(v_3) \end{cases} \quad (5)$$

式(5)の関数 $g(v)$ は、電圧制御型非線形素子で3次

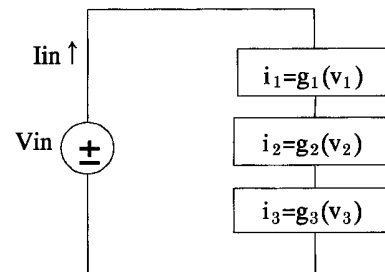


図2 例題回路

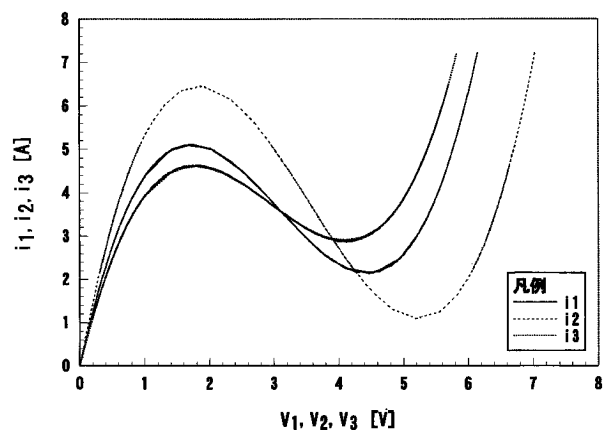


図3 素子特性

関数である。ここでは次の関数形を用いた。

$$i_1 = g_1(v_1) = 0.299v_1^3 - 2.76v_1^2 + 6.84v_1$$

$$i_2 = g_2(v_2) = 0.275v_2^3 - 2.92v_2^2 + 7.96v_2$$

$$i_3 = g_3(v_3) = 0.28v_3^3 - 2.47v_3^2 + 6.12v_3$$

これらの素子特性を図3に示した。

主な入力データ値は

全変数の出発値 0.0

偏微分用微小変化 0.01

電圧源の計算上限値 19.0

ニュートンラフソン法の収束判定値 0.0001

である。

5. 結果及び考察

図4(a)は、式(5)を固定 $\Delta s = 0.7$ で解いた場合の入力特性すなわち $v_{in} - i_{in}$ 特性で、図4(b)はその時の $v_{in} -$ 反復回数特性を示している。これらの結果から解曲線の追跡中に一ヶ所跳躍が発生して、完全な解曲線が得られていないことがわかる。そこで、可変 Δs を採用してスタート値 $\Delta s = 0.7$ として解いた $v_{in} - i_{in}$ 特性が図5(a)で、そのときの Δs の変化を示す $v_{in} - \Delta s$ 特性を示した

グラフが図5(b)である。図5(b)の $v_{in} - \Delta s$ 特性で、横線はその Δs 値で解を求めたことを示し、斜線で下に向かっていく間は Δs の変更計算を行っていることを示している。このとき、 Δs は $0.7 \rightarrow 0.448 \rightarrow 0.3584$ と変化している。これらの結果から可変 Δs で追跡すると必ず完全な解曲線が求められることがわかる。また、図6は

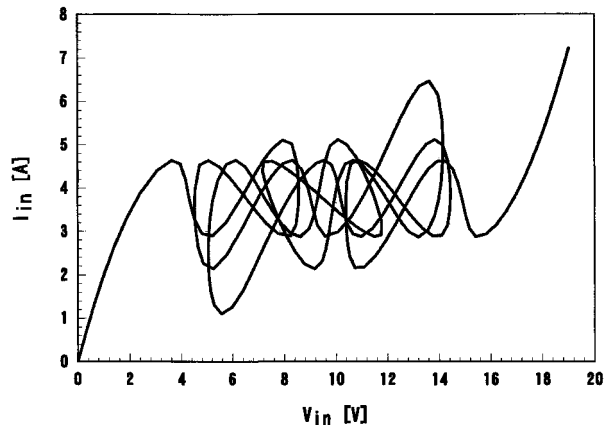


図5(a) $v_{in} - i_{in}$ 特性 (可変 Δs (スタート値 $\Delta s = 0.7$))

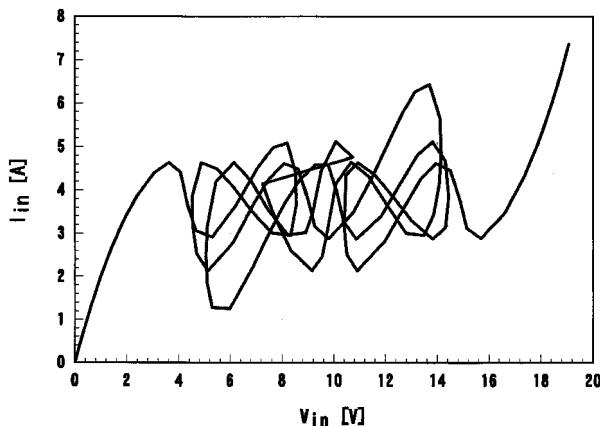


図4(a) $v_{in} - i_{in}$ 特性 (固定 $\Delta s = 0.7$)

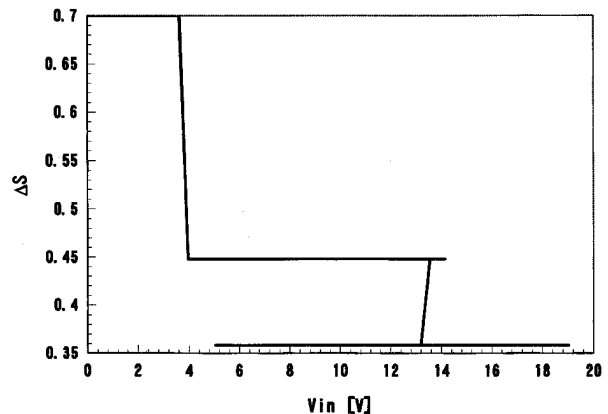


図5(b) $v_{in} - \Delta s$ 特性 (可変 Δs (スタート値 $\Delta s = 0.7$))

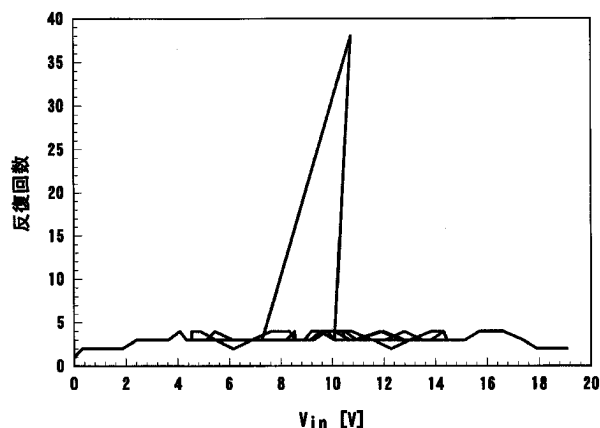


図4(b) v_{in} 反復回数特性 (固定 $\Delta s = 0.7$)

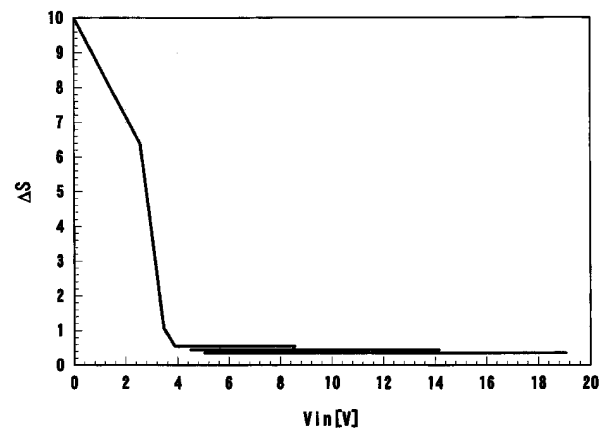


図6 $v_{in} - \Delta s$ 特性 (スタート値 $\Delta s = 10.0$)

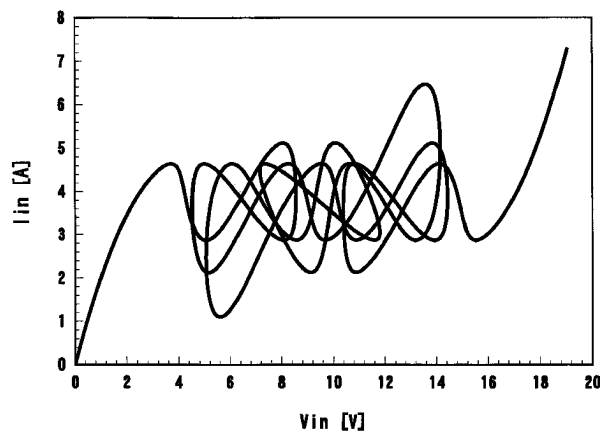


図7 $v_{in}-i_{in}$ 特性 (スタート値 $\Delta s=0.1$)

スタート値 $\Delta s=10.0$ で解いたときの $v_{in}-\Delta s$ 特性のみを示している。このときの Δs の変化は $10.0 \rightarrow 6.4 \rightarrow 1.0733 \rightarrow 0.54976 \rightarrow 0.4393 \rightarrow 0.35184$ である。高精度の結果は Δs の最小値以下の Δs を設定して、もう一度実行する必要がある。図7はスタート値 $\Delta s=0.1$ で実行したときの

$v_{in}-i_{in}$ 特性である。このときは、 Δs の変更は発生せず、最後まで同じ Δs の値で実行した。

6. ま と め

電子回路の直流解析において、可変 Δs を採用することによって、必ず完全な解曲線が追跡できることを示した。

また、伝達特性を求めるには、出力電圧を定義する方程式を式(1)に追加すれば、入力特性と伝達特性が同時に求まる。終りに、コンピュータ処理を手伝っていただいた遠藤克彦技術職員にお礼申し上げます。

参 考 文 献

- 1) 北島博之, 川上 博: “接線分岐現象を自動追跡できるアルゴリズムとその Duffing 方程式への応用”, 信学技法, NLP94-1, pp. 1-7 (1994).
- 2) 牛田明夫, 森 真作: “非線形回路の数値解析法”, pp. 61-70, 森北出版 (1990).
- 3) 松原徳道: “直流非線形回路の解曲線追跡法”, 国土舘大学工学部電気工学科卒業研究論文 (1997).