

# ミリ波領域における複素誘電率測定のためのオーバーサイズ円筒空洞共振器の設計

二 川 佳 央\*

## Design of Oversized Cylindrical Cavity to Measure Complex Permittivity in Millimeter Waves

Yoshio Nikawa\*

**Abstract:** Recent development of large capacity and high speed communication technologies push up the operating frequency of communication devices at least gigabit class. To transmit the large capacity and high speed signal in the devices without distortion, it is very important to apply the composed material with low loss and frequency independent characteristics. For this objective, the development of thin dielectric material is very important of which characteristic is low loss through millimeter wave frequencies. Nevertheless, the appropriate techniques to measure the characteristics of such the material in millimeter waves have not been developed yet. In this study, oversized cylindrical cavity is designed and simulations with experiments are performed to measure complex permittivity of thin dielectric material in millimeter waves. The electromagnetic field distribution in the developed oversized cylindrical cavity is examined from 20 to 40 GHz. The presence of whispering gallery mode in the oversized cavity turn out to be very important to measure the complex permittivity of thin dielectric material with high accuracy.

**Key words:** Oversized cylindrical cavity, Complex permittivity, Whispering gallery mode, Millimeter wave measurement

### 1. ま え が き

近年の通信機器の高速化，大容量化に伴い，通信用デバイスの更なる高周波化が進んでいる。特に，通信デバイスのミリ波に至る高周波化に対して，素子を構成する材料特性として，ミリ波領域に至る広帯域低損失化が必須である。従ってミリ波に至る周波数領域で新しい素子を開発する上で，素子を構成する材料の高精度複素誘電率の特性評価が必要となる<sup>1), 2)</sup>。一方，材料特性の高精度測定法では，単一モードの空洞共振器を用いることが一般的であるが，ミリ波領域に至る周波数では空洞共振器の寸法が縮小化し，これに伴い測定試料の寸法も制限されてしまう。また，共振器自体の加工精度および試料の寸法精度についても，より高精度化が要求され，測定実施が困難となる。

本論文ではミリ波における試料寸法の縮小化による加工精度の限界を改善するために，オーバーサイズの共振

器<sup>3)-5)</sup>を材料の複素誘電率測定に用いることを新たに提案し，ミリ波において材料の高精度複素誘電率の測定が可能となることを示す。オーバーサイズ円筒空洞共振器として，ミリ波周波数で簡便なループ励振によって，TM<sub>810</sub>モードを励振し誘電率測定を行い，加えて2つの導波管と共振器を結合させた，ウィスパーリングギャラリーモードを用いたモデルを作成し，理論および実験により，高精度測定の可能性について検討を行った。

### 2. 理 論

空洞共振器を用いた誘電体材料の複素誘電率測定では広く式(1), (2)に示される摂動法が用いられる。試料の複素誘電率を $\epsilon^* = \epsilon_0(\epsilon_r' - j\epsilon_r'')$ とすると，比誘電率 $\epsilon_r'$ および比誘電損率 $\epsilon_r''$ は以下の式(1), (2)によって表される。但し $\epsilon_0$ は真空の誘電率とする。

$$\epsilon_r' = 1 - \frac{1}{\alpha_\epsilon} \frac{f_L - f_0}{f_L} \frac{V}{\Delta V} \quad (1)$$

$$\epsilon_r'' = 1 - \frac{1}{2\alpha_\epsilon} \left( \frac{1}{Q_L} - \frac{1}{Q_0} \right) \frac{V}{\Delta V} \quad (2)$$

\* 国土舘大学理工学部理工学科健康医学系 教授  
Professor, Department of Health and Medical Engineering,  
Department of Science and Engineering, Kokushikan  
University

$f_0$ は試料を含まないときの共振周波数,  $f_L$ は試料を挿入したときの共振周波数,  $Q_0$ は試料を含まないときの $Q$ 値 (Quality factor),  $Q_L$ は試料を挿入したときの $Q$ 値,  $\alpha_c$ は共振モードや試料の形状による定数,  $V$ は共振器の体積,  $\Delta V$ は試料の体積である。一般に摂動法は空洞共振器の体積に対して試料の体積が無視できる程度に小さく, かつ試料の挿入により電磁界が擾乱されないことが条件となるが, ミリ波においては空洞共振器の体積に対して試料の体積が必ずしも無視できず, また試料の存在による共振器内部の電磁界の変化も考慮する必要がある。そこで, 共振器内部の電磁界の厳密計算が必要となる。

図1, 2には空洞共振器内の電磁界分布を求めるための円筒座標上に配置した共振器モデルを示す。本研究では $TM_{m10}$ モードを用いるため, 電磁界分布は $z$ 方向の電界 $E_z$ ,  $r$ 方向の磁界 $H_r$ および $\theta$ 方向の磁界 $H_\theta$ のみを考える。 $TM_{m10}$ の電磁界は式(3)~(5)に示される。

$$E_z = A' J'_m \left( \frac{\rho_{mn}}{a} r \right) \cos m\theta \quad (3)$$

$$H_r = -jA' \frac{m\omega\epsilon}{k_c^2 r} J'_m(k_c r) \sin m\theta \quad (4)$$

$$H_\theta = -jA' \frac{\omega\epsilon}{k_c} J'_m(k_c r) \cos m\theta \quad (5)$$

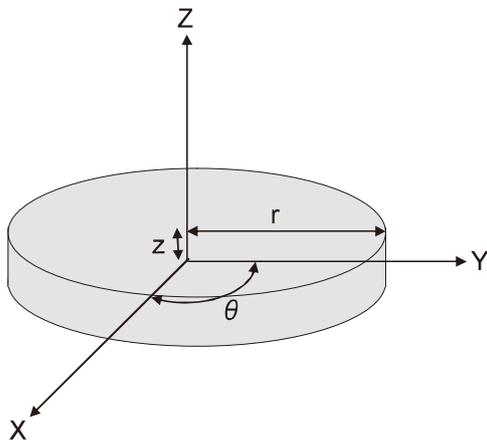


図1 空洞共振器内部の電磁界分布を求めるための軸配置

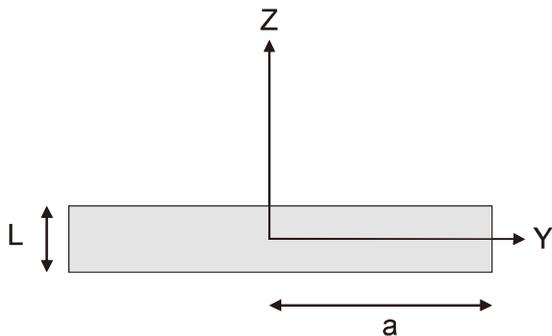


図2 空洞共振器のy-z断面

但し $k_c$ は式(6)で示される。

$$k_c = \left( \frac{\rho_{mn}}{a} \right) \quad (6)$$

$\omega$ は角周波数,  $\epsilon$ は誘電率,  $J_m$ はベッセル関数,  $\rho_{mn}$ は $m$ 次のベッセル関数の $n$ 番目の根である。

$TM_{m10}$ モード円筒共振器の共振波長 $\lambda$ は式(7)に示される。

$$\frac{1}{\lambda^2} = \left( \frac{\rho_{mn}}{2\pi a} \right)^2 \quad (7)$$

$TM_{m10}$ モード円筒共振器の $Q$ 値は式(8)によって示される。

$$Q = \frac{\lambda}{\delta} \frac{\rho_{mn}}{2\pi \left( 1 + \frac{a}{L} \right)} \quad (8)$$

但し, このときの表皮深度 $\delta$ は式(9)で示される。

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (9)$$

ここで $\mu$ は透磁率,  $\sigma$ は導電率である。尚, 使用するモードは,  $TM_{810}$ モードとする。

$TM_{810}$ モード空洞共振器を用いて図3に示す試料の配置で誘電率測定を行うとき, 空洞共振器内部の電磁界分布の厳密解は, 式(10)で示される。

図3における $z < d$ の領域1において電磁界分布は以下の式(10)~(12)で示される。

$$E_{z1} = A J_8(k_{c1} r) \cos 8\theta \quad (10)$$

$$H_{r1} = -jA \frac{8\omega\epsilon_0\epsilon'_r}{k_{c1}^2 r} J_8(k_{c1} r) \sin 8\theta \quad (11)$$

$$H_{\theta1} = -jA \frac{\omega\epsilon_0\epsilon'_r}{k_{c1}} J_8(k_{c1} r) \cos 8\theta \quad (12)$$

自由空間における電磁波速度を $c$ とすると, 誘電体中での $r$ 方向の伝播定数 $k_{c1}$ は

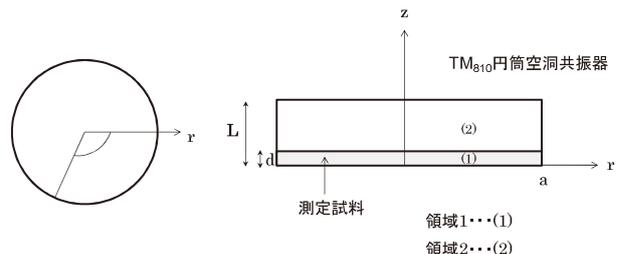


図3  $TM_{810}$ 厳密解モデル

$$k_{c1} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu_0} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_r} \quad (13)$$

と表される。

図3における  $d < z < L$  の領域2において電磁界分布は以下の式(14)～(16)で示される。

$$E_{z2} = BJ_8(k_{c2}r) \cos 8\theta \quad (14)$$

$$H_{r2} = -jB \frac{8\omega\varepsilon_0}{k_{c2}^2 r} J_8'(k_{c2}r) \sin 8\theta \quad (15)$$

$$H_{\theta2} = -jB \frac{\omega\varepsilon_0}{k_{c2}} J_8'(k_{c2}r) \cos 8\theta \quad (16)$$

但し、 $r$ 方向の伝播定数  $k_{c2}$  は

$$k_{c2} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega}{c} \quad (17)$$

と表される。

このとき電磁界に対する境界条件は  $z = d$  において

$$E_{z1} = E_{z2}, \quad H_{r1} = H_{r2}, \quad H_{\theta1} = H_{\theta2} \quad (18)$$

となる。これより以下の式(19)～(21)が成り立つ。

$$E_{z1} = E_{z2} = AJ_8(k_{c1}r) \cos 8\theta = BJ_8(k_{c2}r) \cos 8\theta \quad (19)$$

$$\begin{aligned} H_{r1} = H_{r2} &= -jA \frac{8\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}{k_{c1}^2 r} J_8'(k_{c1}r) \sin 8\theta \\ &= -jB \frac{8\omega\varepsilon_0}{k_{c2}^2 r} J_8'(k_{c2}r) \sin 8\theta \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} H_{\theta1} = H_{\theta2} &= -jA \frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}{k_{c1}} J_8'(k_{c1}r) \cos 8\theta \\ &= -jB \frac{\omega\varepsilon_0}{k_{c2}} J_8'(k_{c2}r) \cos 8\theta \end{aligned} \quad (21)$$

従って誘電率は式(22)から求めることができる。

$$\varepsilon_r \frac{k_{c2}}{k_{c1}} \frac{J_8'(k_{c1}r)}{J_8(k_{c1}r)} = \frac{J_8'(k_{c2}r)}{J_8(k_{c2}r)} \quad (22)$$

次に、TM<sub>810</sub>モード空洞共振器の厳密解による誘電正接 ( $\tan\delta$ ) について式(23)のように求めることができる。

$$\tan\delta = \frac{W^e}{W_1} \frac{1}{Q_u} - \frac{P_c}{\omega W_1} \quad (23)$$

但し、式(23)における各項は図4の共振器壁面モデルを用い、以下のように求められる。

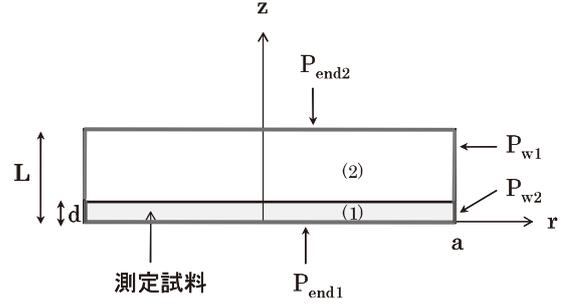


図4 TM<sub>810</sub>共振器壁面モデル

$$W_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{2} \int_0^d \left( \int_0^a |E_{z1}|^2 r dr \right) d\theta dz \quad (24)$$

$$W_2 = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_d^L \left( \int_0^a |E_{z2}|^2 r dr \right) d\theta dz \quad (25)$$

$$W_e = W_1 + W_2 \quad (26)$$

$$P_c = P_{end1} + P_{end2} + P_{w1} + P_{w2} \quad (27)$$

$$P_{end1} = \frac{1}{2} R_s \int_0^{2\pi} \left( \int_0^a |H_{r1}|^2 + |H_{\theta1}|^2 r dr \right) d\theta \Big|_{z=0} \quad (28)$$

$$P_{end1} = \frac{1}{2} R_s \int_0^{2\pi} \left( \int_0^a |H_{r2}|^2 + |H_{\theta2}|^2 r dr \right) d\theta \Big|_{z=L} \quad (29)$$

$$P_{w1} = \frac{1}{2} R_s \int_0^d \left( \int_0^{2\pi} |H_{\theta1}|^2 a d\theta \right) dz \Big|_{r=a} \quad (30)$$

$$P_{w2} = \frac{1}{2} R_s \int_d^L \left( \int_0^{2\pi} |H_{\theta2}|^2 a d\theta \right) dz \Big|_{r=a} \quad (31)$$

### 3. ループ励振によるTM<sub>810</sub>共振器

TM<sub>810</sub>円筒共振器の共振波長は式(32)によって求められる。

$$\frac{1}{\lambda^2} = \left( \frac{\rho_{81}}{2\pi a} \right)^2 \quad (32)$$

$\rho_{81}$ は8次のベッセル関数の1番目の根、 $a$ は共振器の半径である。共振周波数は式(33)のようになる。

$$f = \frac{\rho_{81} c}{2\pi a} \quad (33)$$

TM<sub>810</sub>共振器の寸法は共振周波数が30 GHzになるように設計した。図5は設計したTM<sub>810</sub>共振器を示す。

図6にTM<sub>810</sub>共振器の写真を示す。ループ励振によるTM<sub>810</sub>共振器を用いS<sub>21</sub>を測定した。図7には共振器から測定したS<sub>21</sub>を示す。確認のために摂動法による誘電率と誘電正接を測定した。測定試料はポリイミドの厚さ

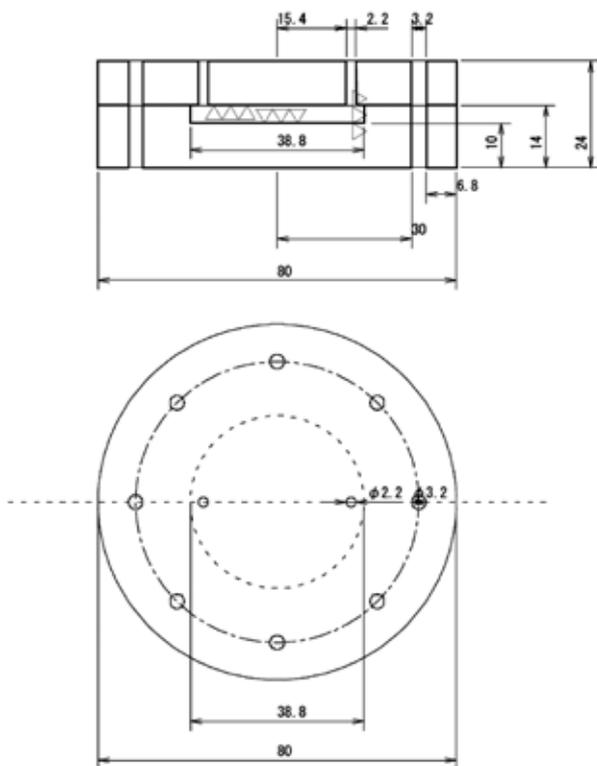
図5 TM<sub>810</sub>モード円筒空洞共振器のサイズ

図6 円筒空洞共振器と励振部の写真

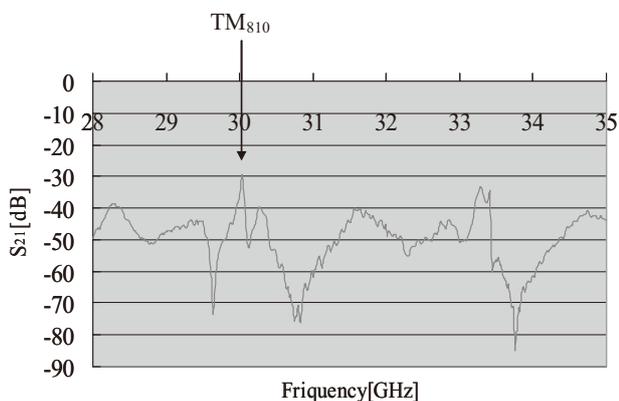


図7 ループ結合されたオーバーサイズ空洞共振器の周波数特性

表1 ポリイミドの評価特性

Sample	Permittivity		tan $\delta$	
	Rigorous method	Perturbation method	Rigorous method	Perturbation method
Polyimide 0.1250mm	2.56	2.32	0.027	0.0031
Polyimide 0.0500mm	2.56	2.36	0.070	0.0070
Polyimide 0.0125mm	2.56	2.51	0.26	0.012

0.125mm, 0.05mm, 0.0125mmのものを測定した。表1に実験で得られたポリイミド試料の厚さに対する測定結果を示す。

### 3. ウィスパーリングギャラリモードのシミュレーション

ウィスパーリングギャラリモードを励振するために図8に示す導波管ポート1から共振器を通り、ポート4に出力される信号を解析した。不要な共振を低減するためにオーバーサイズ円筒共振器の高さを小さくした。これにより、TM<sub>m10</sub>モードが得られる。TM<sub>m10</sub>モードを用い共振器内に比誘電率3.0、高さ0.1mmの誘電体試料共振器の底に挿入したときの周波数変化を比較した。

オーバーサイズ円筒共振器の直径は40mm、高さは4.0mmである。導波管サイズはWR-28 (7.112mm × 3.556mm)である。結合部直径は3.0mm、高さは0.1mmである。図9、10はオーバーサイズ円筒共振器と2つの導波管を結合させたモデルの詳細を示す。

### 4. 結果

オーバーサイズ円筒共振器内の共振数を減らすために共振器の高さを減らし、そのシミュレーション結果を

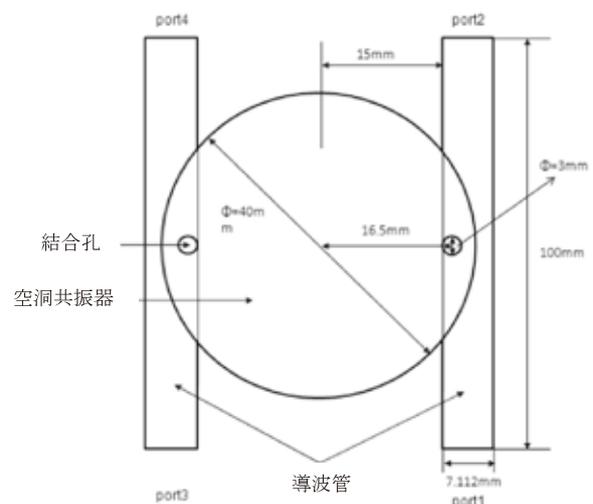


図8 導波管結合されたオーバーサイズ円筒空洞共振器の上面図

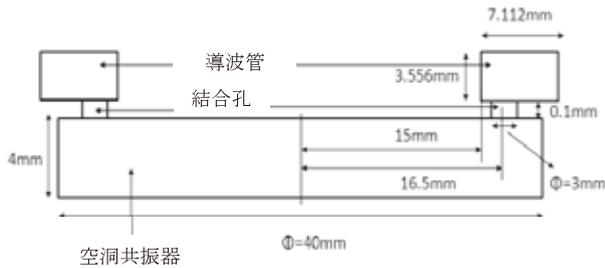


図9 導波管結合されたオーバーサイズ円筒空洞共振器のサイズ

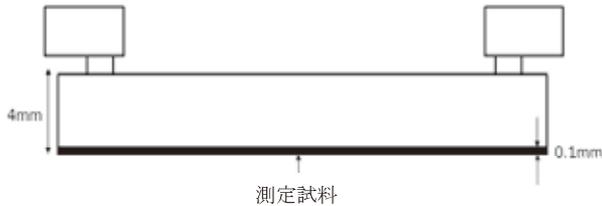


図10 誘電体試料が装荷されたオーバーサイズ円筒空洞共振器

図11, 12に示す。図11, 12は20 GHzから40 GHzまでの $S_{41}$ を示し,  $TM_{m10}$ モードだけを出現させることができた。図11は共振器内に誘電体を含まない場合の $S_{41}$ を示し, 図12は比誘電率3.0の試料を挿入した場合の $S_{41}$ を示す。図13には29 GHz付近の図11と図12の結果を重畳して比較した。共振器内に誘電体を含まない共振周波数は29.114 GHz, 比誘電率3.0を含む共振周波数は28.864 GHzとなり250 MHzの周波数変位が確認できた。

図14, 15は共振周波数29.114 GHzにおける磁界分布と電界分布を示し, 共振器内の縁に共振が現れている。 $TM_{810}$ の共振周波数は29.114 GHz,  $TM_{710}$ 共振周波数は26.438 GHz,  $TM_{910}$ 共振周波数は31.764 GHzとなり, 周波数が高くなると共振モードは増加した。

図16は2本の励振用導波管と共振器を結合させた状態を示す写真である。図17は $S_{41}$ のシミュレーションと実験結果の比較を示す。実験結果はシミュレーション結果とほぼ一致した。表2には1.0mm厚PTFEを共振器内に挿入したときの摂動法による測定結果を示す。

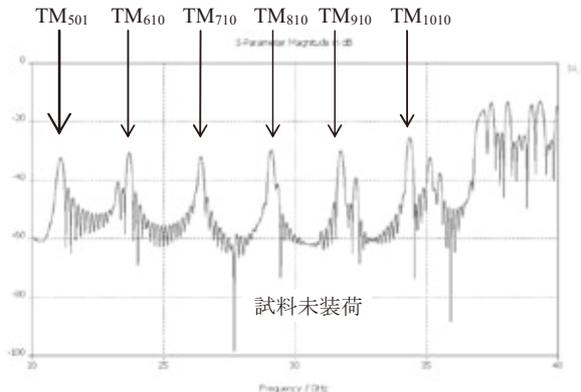


図11 未装荷時のオーバーサイズ円筒空洞共振器

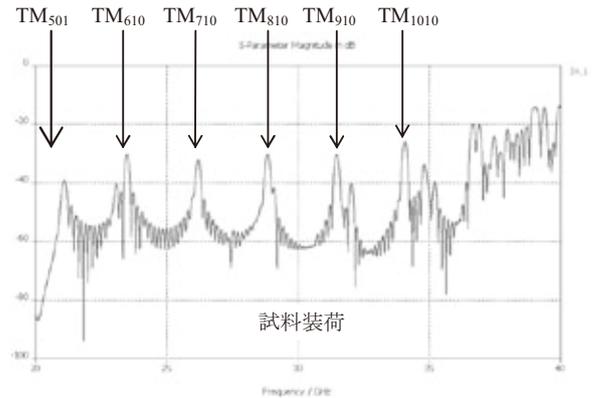


図12 比誘電率3.0が装荷されたオーバーサイズ円筒空洞共振器の20~40 GHzにおける $S_{41}$

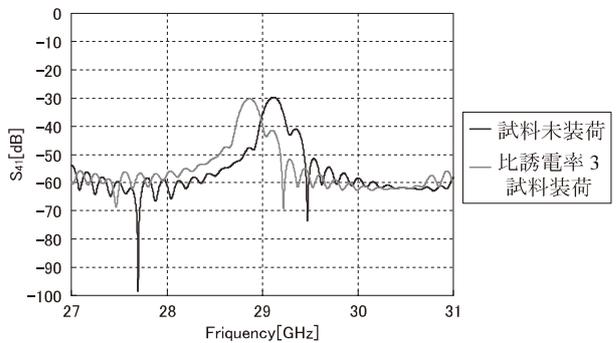


図13 比誘電率3.0が装荷されたオーバーサイズ円筒空洞共振器の29 ± 2 GHzにおける $S_{41}$

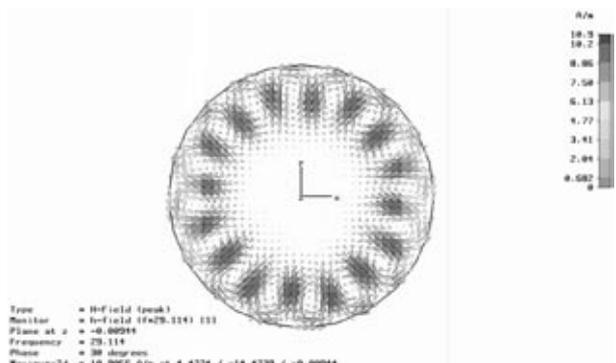


図14 29.114 GHzの共振周波数における空洞共振器内部磁界分布

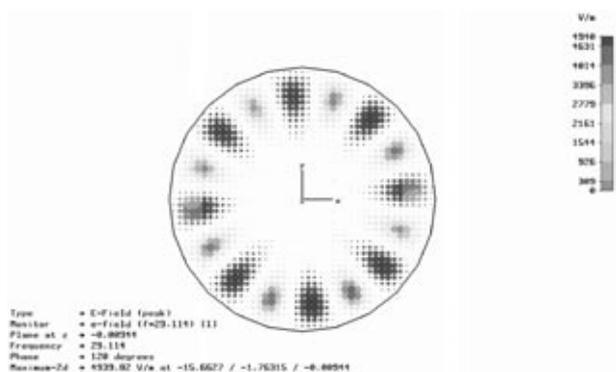


図15 29.114 GHzの共振周波数における空洞共振器内部電界分布

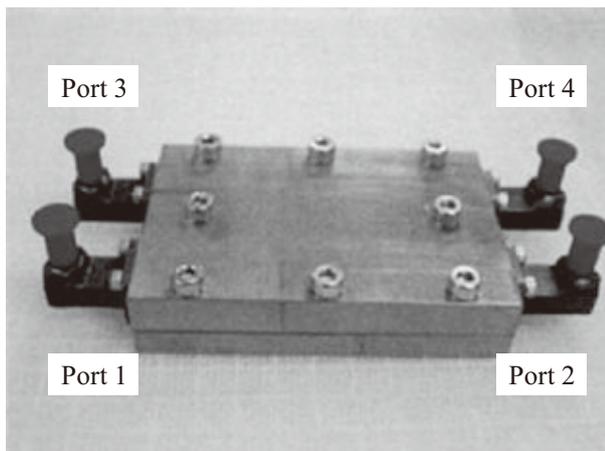


図16 励振用導波管が結合された空洞共振器

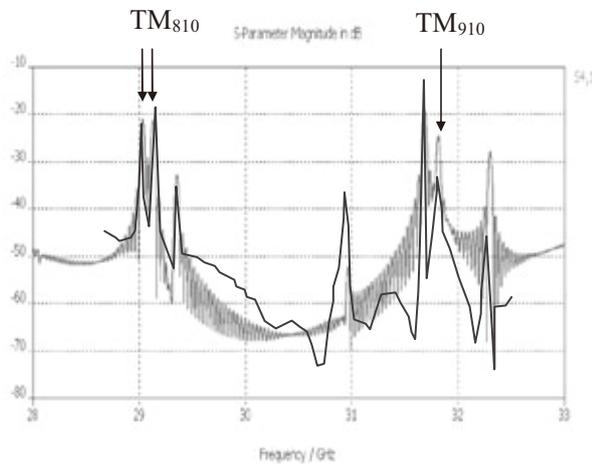
図17 誘電体非装荷時 $S_{11}$ の周波数特性

表2 PTFEの複素誘電率測定結果

Sample	Permittivity		$\tan\delta$	
	Rigorous method	Perturbation method	Rigorous method	Perturbation method
Teflon 1 mm	2.66	2.16	$4.90 \times 10^{-4}$	$0.65 \times 10^{-4}$

## 5. 結 論

本研究ではミリ波の複素誘電率測定のため簡便なループ励振によるオーバーサイズ円筒共振器を開発した。そしてミリ波で誘電率測定が最適な $TM_{810}$ モードを用い、薄膜のポリイミドの複素誘電率を求め厳密解と摂動解の比較を行った。摂動法を用いたポリイミドの測定結果はポリイミドの厚さが薄くなるほど誘電率も $\tan\delta$ も大きくなった。しかし $Q$ は低くそのため高精度測定を行うために共振器の高さを他のモードの影響をうけない程度高くする必要がある。さらに、本論文ではウイスパーリングギャラリモードのシミュレーションにより共振器内の電磁界分布を確認し、測定試料挿入による共振周波数の変位から誘電率測定が実現することを確認した。摂動法を用い1.0mm厚のPTFEを測定し、 $\tan\delta$ は試料の厚さ1.0mmで $10^4$ 程度の測定が可能であった。これによりオーバーサイズ共振器内の縁に現れるウイスパーリングギャラリモードを用いた複素誘電率測定は有用であることが示された。

## 参 考 文 献

- 1) F. Okada, "Microwave Engineering - Principles & Applications - ", Gakken-Sha Japan, 1993.
- 2) O. Hashimoto, "Measurement Method of Material Constant in High Frequency Band, Morikita Publication, Japan, 2003.
- 3) Hiroshi Obata, Yoshinori Kogami, "Evaluation of the Complex Permittivity in Millimeter-Wave Region for Uniaxial-Anisotropic Dielectric Material," IEICE Transactions on Electronics, vol. J88-C, no. 12, pp. 1106-1113, 2005.
- 4) Michael Daniel Janezic, Nondestructive Relative Permittivity and Loss Tangent Measurements Using a Split-Cylinder Resonator, A thesis submitted to the Faculty of the Graduate School of the University of Colorado in partial fulfillment of the requirements for the Doctor of Philosophy 2003.
- 5) 関勇, 二川佳央, "円筒空洞共振器を用いた材料の複素誘電率のマイクロ波照射による温度依存特性測", 電子情報通信学会論文誌C, Vol. J89-C, No. 12, pp. 1032-1038, 2006.