【論　説】

Walras的労働市場に注目したマクロ動学モデルのミクロ的基礎付けに関する一考察

石　山　健　一

目　次

1. はじめに

まともな仕事がないこと，給料が上がらないことは，当人だけでなくその家族や地域・社会にとっても大きな問題である[1)]。もしも，完全雇用といってもよいほど労働市場が逼迫していれば，理論上，賃金が上昇しないということはないだろう。財またはサービスに対する需要が供給を超過する場合，その程度が大きいほど価格が急激に上昇するという経済学の基本的な原理から出発したPhillips（1958）は，労働市場における名目賃金上昇率と失業率の間の非線形関数関係に着目してイギリスの長期時系列データを分析し，マクロ経済政策にとって重要な意味をもつPhillips曲線[2)]を顕在化させた[3)]。その直後からPhillips曲線を理論的に導出することに関する活発な議論がLipsey（1960），Corry and Laidler（1967），Holmes and Smyth（1970），Lipsey（1974），Holmes and Smyth（1979）によって行われた。他方，Samuelson and Solow（1960）はアメリカ合衆国の過去25年間のデータを用いて失業率とインフレ率の間のトレードオフ関係を修正Phillips曲線として推定してい

る。多くの文献において，Phillips 曲線の推定は Phillips（1958）とは異なり，賃金と物価，短期と長期をそれぞれ明確に分離して行われ[4)]，また，様々なデータを用いた検証があり，マクロ経済政策への応用，Phillips 曲線の修正，新しい Phillips 曲線の提案[5)] などの充実した研究成果を考慮すると，1970 年代のスタグフレーション[6)] を越えて今日に至るまで Phillips（1958）は経済学に多大な影響を与えているということができるだろう[7)]。

ところで，Phillips（1958）同様，需要が供給を超過する場合，その程度が大きいほど価格が急激に上昇するという経済学の基本的な原理から出発し，Walras 的調整が行われる労働市場において価格や生産性に対する負のショックがカオス的振る舞いを引き起こし得るという興味深い事実を簡単なマクロ経済動学モデルで例証した研究がある[8)]。それが，Fanti（2012）である。ただ，残念ながら，著者の知る限り Fanti（2012）のミクロ的基礎付けについて再考した文献はこれまでのところ存在しない[9)]。本稿では，第一に Fanti（2012）の Walras 的労働市場に注目したマクロ動学モデルのミクロ的基礎付けを再考することを通じて Lipsey（1960）他のように短期の Phillips 曲線を理論的に導出することを試みる[10)]。第二に，パラメータを経済学的に意味のある設定とした場合に，Fanti（2012）モデルから理論的に導出された Phillips 曲線が，カオス的振る舞いのなかで実際にどのように描かれるのかを数値シミュレーションによって明らかにする[11)]。この二つが本研究の主たる目的である。

本論文の構成は次の通り。次節では，Fanti（2012）モデルを紹介し，その静学的および動学的特性について定性的に分析する。第 3 節では，Fanti（2012）の非線形差分方程式の解を数値シミュレーションによって定量的に分析する。本研究の二つの主目的を達成するための考察については第 4 節で行う。本研究で得られた結果および今後の課題については第 5 節にまとめられる。

2. Fanti（2012）モデル

本節では賃金調整がカオス的振る舞いを示す Fanti（2012）の非線形差分方程式モデルを紹介しよう。ただし，記号表記に関しては，本稿での議論を円滑にするために Fanti（2012）から一部変更，追加している[12)]。以下で Fanti（2012）の教科書的なアプローチに沿ってマクロ経済モデルを構築しつつ，簡単な比較静学分析，動学分析を行う[13)]。

Fanti（2012）の描いた架空の世界には，といってもこれは既に述べた通り標準的なアプローチであるが，代表的経済主体としての一人の個人と一つの企業が存在する。個人は各期間に消費 C と余暇 R から効用を得る。当該期間の個人の労働供給を L で表すと，彼または彼女の時間に関する制約は次のようになる。

$$L+R=T, \qquad L\geq 0, R\geq 0 \tag{1}$$

ここで，T は現存する個人が労働または余暇に費やすことのできる時間の合計，すなわち当該期間の長さであり，その長さは各期間で均一とする[14)]。他方，単位時間の労働に対する名目賃金を W で表すと，当該期間中に個人が稼得する名目賃金所得 Y は

$$Y=WL \tag{2}$$

となる。さらに，企業が生産する財の価格を p で表し，この水準を当該期間中一定であると仮定すると，個人の支出に関する制約は次のようになる。

$$pC=Y \tag{3}$$

ここで，C は当該期間における個人の実質消費水準を表す。式 (1)，(2)，(3) から

$$\frac{pC}{W}+R=T \tag{4}$$

が得られる。

ところで，Fanti（2012）では，経済理論モデルから得られる知見を深めるために個人の効用関数の特定化を行っており，その際，主として数学的に扱いやすいという理由から，Cobb Douglas 型の効用関数を仮定している[15]。それが式 (5) である。

$$U(C,R)=C^{\alpha}R^{1-\alpha}, \quad 0<\alpha<1 \tag{5}$$

ここでパラメータ α は全期間を通じて一定とする。かくして，制約条件下での効用最大化のための一階の必要条件から

$$\frac{\alpha}{C}=\frac{(1-\alpha)p}{WR}=\frac{1-\alpha}{\omega R} \tag{6}$$

が得られる。ただし，記号 ω は実質賃金を表す。さらに，式 (1)，(4)，(6) から，名目賃金 W および実質賃金 ω に対して完全に非弾力的な供給関数

$$L=\alpha T \tag{7}$$

が導かれる。

Fanti（2012）の世界に存在する唯一の企業は，当該期間中に最大利潤を達成するため，労働力 D を投入して財を生産する。企業についても，Fanti（2012）は数学的扱いやすさを考慮して次のような簡単な生産関数を仮定する[16]。

$$F(D)=AD^{\beta}, \qquad A>0,\ 0<\beta<1 \tag{8}$$

ここで，A は企業の生産技術の水準を表す指標であり，効用関数と同様に，A および β は全期間を通じて一定とする。当該期間に，規模に関して収穫逓減の生産技術を持ったこの企業が獲得する実質利潤 π は

$$\pi = AD^{\beta} - \omega D \tag{9}$$

によって決定されるので，所与の賃金水準に対して利潤最大化するように決定される労働需要は

$$D = \left(\frac{\beta p A}{W}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \tag{10}$$

となる。

労働供給関数 (7) および労働需要関数 (10) から，Fanti（2012）の労働市場において均衡が成立するための条件は

$$\left(\frac{\beta p A}{W}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} = \alpha T \tag{11}$$

となる。方程式 (11) を名目賃金 W あるいは実質賃金 ω について解くことにより，この労働市場を均衡させる唯一の賃金水準

$$W^{*} = \frac{\beta p A}{(\alpha T)^{1-\beta}} \tag{12}$$

$$\omega^{*} = \frac{\beta A}{(\alpha T)^{1-\beta}} \tag{13}$$

が導かれる[17)]。既に Fanti（2012）が指摘している通り，このような労働市場においては生産技術の改善が賃金の均衡水準を向上させる。式 (12) および式 (13) は，もし，均衡が安定であれば，1％の生産技術の上昇は長期的には労働者に 1％の賃金上昇をもたらすことを意味する[18)]。次は，経済が未だ均衡状態に到達していない短期の賃金変動について考察しよう。

Fanti（2012）はよく知られた需要と供給の法則により，名目賃金が以下のように調整されると仮定する[19)]。

$$W_{t+1} = W_t + \mu(D_t - L_t), \qquad \mu > 0 \tag{14}$$

ここで，μ は調整速度を表す正のパラメータであり，他のパラメータと同様に，全期間を通じて一定とする。これもよく知られていることであるが，非

線形差分方程式モデルにこのような調整速度を導入すると，調整速度が十分小さいときに均衡は安定になる傾向がある[20]。労働供給関数 (7) および労働需要関数 (10) を右辺に代入すると，式 (14) は

$$W_{t+1} = W_t + \mu\left[\left(\frac{\beta pA}{W_t}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} - \alpha T\right] \tag{15}$$

となる[21]。この非線形差分方程式がミクロ的に基礎付けられた Fanti（2012）の動学モデルである。以下では名目賃金 W_t が式 (15) に従って時間発展する場合に W^*が局所的に漸近安定となる条件について確認しよう。

式 (15) を，$W_t>0$ を定義域とする関数 $f(W_t)$ とみなして導関数 $f'(W_t)$ を求めると

$$f'(W_t) = 1 - \frac{\mu(\beta pA)^{\frac{1}{1-\beta}}}{1-\beta} W_t^{-\frac{2-\beta}{1-\beta}} \tag{16}$$

となる。さらに，均衡の近傍で関数 $f(W_t)$ を Taylor 展開し，線形近似すると，

$$W_{t+1} = \left(1 - \frac{\mu(\alpha T)^{2-\beta}}{(1-\beta)\beta pA}\right)\left(W_t - \frac{\beta pA}{(\alpha T)^{1-\beta}}\right) + \frac{\beta pA}{(\alpha T)^{1-\beta}} \tag{17}$$

となる。よって，

$$\delta = \frac{\mu(\alpha T)^{2-\beta}}{(1-\beta)\beta pA} \tag{18}$$

とおくと，この非線形動学方程式の均衡は，

$$0 < \delta < 2 \tag{19}$$

のとき局所的に漸近安定となる[22]。式 (18) によれば，均衡の安定性の指標となる δ は，μ, α, T の上昇によって上昇し，p, A の上昇によって低下する[23]。Fanti（2012）では，他の条件を不変とした上で価格 p または生産技術 A を変化させ，式 (12) の示す均衡が不安定化した場合の経済の振る舞いを数値シミュレーションによって分析し，パラメータの広い範囲でカオス的振る舞いが観察されることを例証している。次節では，Fanti（2012）と同

じパラメータ設定で数値シミュレーションを実行し，その結果について吟味するとしよう。

3. Fanti（2012）モデルの数値シミュレーション

前節ではFanti（2012）モデルを紹介し，このモデルの再現する労働市場では生産技術の低下によって経済学的に意味のある唯一の均衡が局所的に不安定になることを確認した。本節では，Fanti（2012）と同様に，数値シミュレーションによって均衡が不安定になる場合の経済の振る舞いがどのようなものであるかを例証する。もちろん，本稿独自の追加的な検証も行う。

図1は，前節の式(15)に関して，パラメータをFanti（2012）と同様，$\alpha=0.5$, $\beta=0.5$, $\mu=0.8$, $p=1$, $T=1$に設定して，生産技術の高さを表す指標Aを0.7から0.3まで0.0005ずつ低下させながら，各パラメータ設定の下でWの初期値W_0を均衡水準W^*の99％として式(15)によるイタレーションを2,500回繰り返した後の(A, W)の一定期間の実現値を散布図としてプロットしたものである[24)]。各パラメータ設定に対して，W_{2500}がアトラクタ（attracting set）に属する点とみなせることは，図2に示すように，この点とそれ以降の点の距離の最小値が時間と共に小さくなっていくこと，すなわちW_{2501}以降の軌道がW_{2500}に計算精度の許す限りいくらでも接近することによって確認している[25)]。条件(19)により，均衡が不安定化するのはδが2を超えるとき，上述のパラメータ設定では$A=0.5655$に達したときである。

図1は，生産技術が$A=0.7$から$A=0.5655$まで低下すると均衡が不安定化して周期2の安定周期軌道が出現し，さらに生産技術が低下していくと周期倍分岐が起こり，何度もの周期倍分岐を経て，差分方程式(15)の再現する賃金の調整過程がカオス的になることを示唆している[26)]。ここで，カオスの重要な特徴の一つである初期値鋭敏性（sensitive dependence on initial conditions[27)]）を確認するために，Lyapunov指数の推移も描写してみよう[28)]。

図 3 は横軸を生産性の指標として Fanti（2012）の分岐図（図 1）に対応する Lyapunov 指数の推移をプロットしたものである。Lyapunov 指数の値がゼロより大きいほど，初期値のわずかな違いは時間を通じて拡大していく。この図を用いて Fanti（2012）の結果を検証すれば，$0.3 \leq A \leq 0.4$ のときに確かにカオスの特徴である初期値鋭敏性が観測されていたことがわかる[29)]。

なお，非線形動学モデル (15) においては価格と生産技術が同じ役割を果たすため，価格に関する分岐図を描いても当然，同じ結果になる。

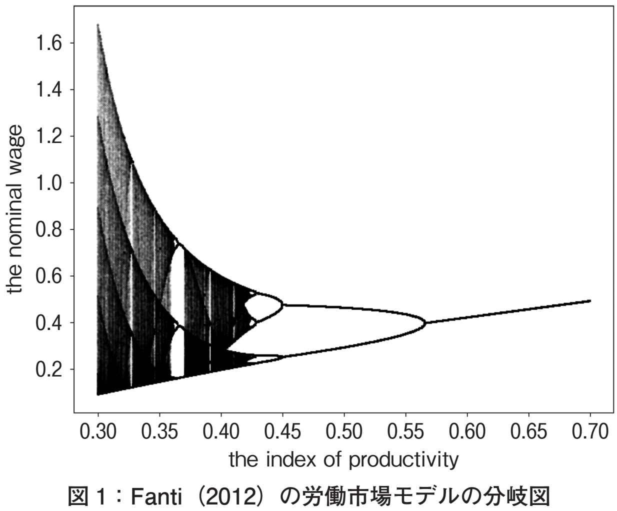

図 1：Fanti（2012）の労働市場モデルの分岐図

（$\alpha=0.5$, $\beta=0.5$, $\mu=0.8$, $p=1$, $T=1$; $A=0.3$, 03005, ⋯, 0.7）

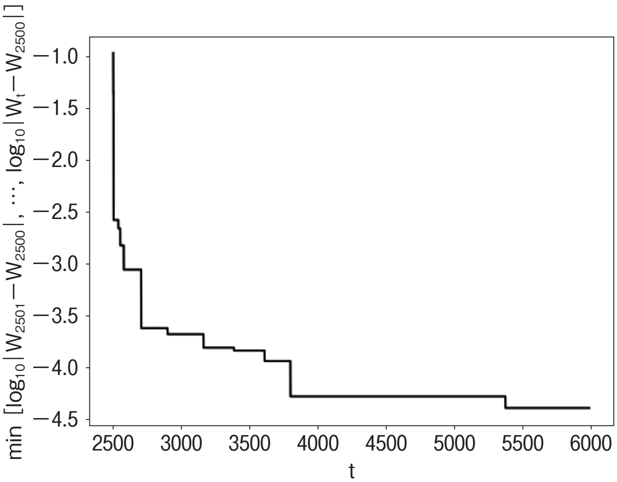

図 2：$\{W_{2501}, \cdots, W_t\}$ と W_{2500} の間の距離

（$\alpha=0.5$, $\beta=0.5$, $\mu=0.8$, $p=1$, $T=1$, $A=0.4$; $t=2501, \cdots, 6000$）

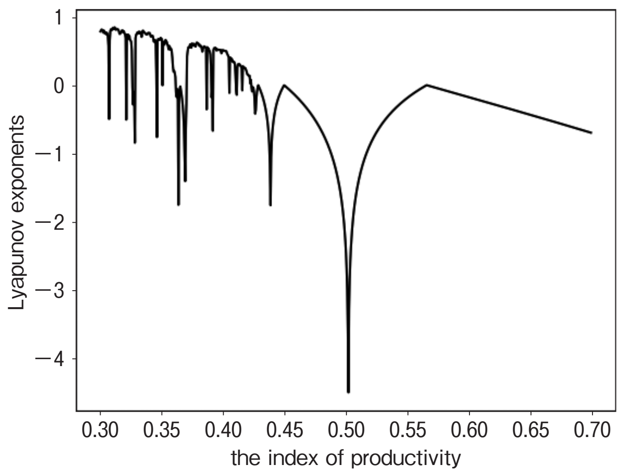

図 3：Fanti（2012）の分岐図に対応するパラメータ設定での Lyapunov 指数

（$\alpha=0.5$, $\beta=0.5$, $\mu=0.8$, $p=1$, $T=1$, $A=0.3$; $0.3005, \cdots, 0.7$）

4. Fanti（2012）モデルのミクロ的基礎付けに関する考察

前節では，Fanti（2012）モデルの動学分析の結果について検証した。本節では，この差分方程式モデルに関するいくつかの疑問点を指摘し，その解釈について議論する。場合によってはモデルの一部を変更することになるが，そのような変更によって，どのような知見が新たに得られるかについても明らかにする。

第一に，企業が式 (9) の右辺を最大にするように生産水準を決定するならば，Fanti（2012）の世界では生産物市場において常に超過供給が発生することになるのではないだろうか。第二に，労働市場において超過供給が発生しているときには，完全雇用所得よりも実際の所得水準が低くなるため，この場合の制約条件下での効用最大化問題の解は完全雇用下のものとは異なるものになるかもしれない。第三に，これが最も重要なことなのであるが，労働市場において超過需要が発生しているときに，労働投入時間が期間の長さを超過している，つまり，式 (15) が経済学的に意味のない変動を描写しているということはないのだろうか。以下では，この三つについて順番に考察するとしよう。

第一の疑問点については，各期間において資本家と労働者が 1 人ずつ存在すると仮定し，次のように補足説明することができる。すなわち，資本家は労働者と同様に，期間中に稼得した利潤を貯蓄するか消費し，貯蓄した分はそのまま投資に充てられるとすると[30)]。その結果，生産物市場および資本市場においては常に需要と供給が一致し，価格 p と利子率 r の水準は安定する。

第二の点について，本稿では，失業率 u を次のように定義し，それをモデルに明示的に組み込むことを通じて，個人の最適化行動を説明することを試みる。

$$u=\frac{L-D}{L}=1-\frac{D}{L} \tag{20}$$

加えて，本稿では，各期間における失業率 u の取り得る範囲は $0 \leq u < 1$ ではなく

$$1-\frac{T}{L}<u<1 \tag{21}$$

であるとする。このことは，労働市場において超過供給だけでなく超過需要も起こり得ることを意味する。また，個人は各期間で1人だけ存在し，世代重複はないものとする。かくして彼または彼女の支出に関する制約は式 (3) ではなく

$$pC=Y=W(1-u)L \tag{22}$$

となる[31]。前期の雇用情勢に基づいて個人と資本家の間で賃金交渉が行われ，個人は交渉の結果によって決定された名目賃金に対し効用最大化するよう労働供給を決定すると仮定すると，その労働供給関数は結局，次のようになる[32]。

$$L=\alpha T \tag{23}$$

第三の疑問点に関しては，式 (23) を不等式 (21) に代入することによって，個人の最適化行動を前提とした失業率 u が経済学的に意味のある値であるための必要十分条件

$$1-\frac{1}{\alpha}<u<1 \tag{24}$$

が得られ，数値シミュレーションの結果が経済学的に意味のあるものであるためには，条件 (24) が成立している必要があることがわかる。

ところで，失業率の定義式 (20) に労働需要関数 (10) および労働供給関数 (23) を代入すると，失業率 u と名目賃金 W の関係を示す式

$$u = 1 - \left(\frac{\beta p A}{W}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}(\alpha T)^{-1} \tag{25}$$

が得られる。式 (25) を条件 (24) に代入し，各パラメータ，外生変数および内生変数である名目賃金 W がすべて正であるという前提で条件 (24) を整理すると，次のようになる。

$$W > \frac{\beta p A}{T^{1-\beta}} \tag{26}$$

既に述べた通り，図 1 を描いた際の A の刻み幅は 0.0005 であるので，図 1 に描かれている均衡が不安定な場合の A の範囲は

$$0.3 \leq A \leq 0.5655 \tag{27}$$

である。他のパラメータを $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$, $\mu = 0.8$, $p = 1$, $T = 1$ に固定して，A をこの範囲で変動させた場合，不等式 (26) の右辺の取り得る値は

$$0.15 \leq \frac{\beta p A}{T^{1-\beta}} \leq 0.28275 \tag{28}$$

である。

式 (28) を念頭にもう一度，図 1 を眺めてみると，不等式 (26) を満たさないところまで名目賃金が低下している状況が描かれていることが分かる。実は，Fanti（2012）においてカオス的振る舞いが観測されていた多くのパラメータ設定，具体的には，$\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$, $\mu = 0.8$, $p = 1$, $T = 1$; $A = 0.3$, 0.3005, …, 0.4 の場合には，労働者の時間制約が満たされないという問題が発生していたのである。図 4 はそのような状況を灰色で色分けして図 1 を再描写したものである。図 4 の下の方をみると，時系列全体に占める割合は僅かであるが，上記のパラメータ設定において労働時間が期間の長さをオーバーするという状況が発生していたことが分かる。経済学的に意味のないこの状況はが小さくなるほど広い範囲で発生している。このような状況が起こらないためのパラメータの条件は何であろうか。

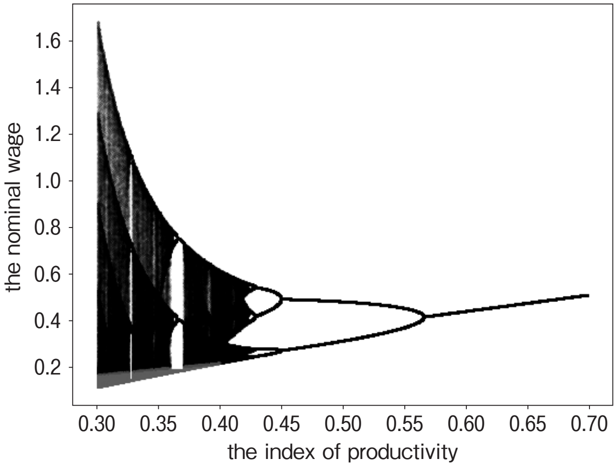

図4：図1において時間制約が満たされていなかった部分（灰色）

（α=0.5, β=0.5, μ=0.8, p=1, T=1, A=0.3; 03005, …, 0.7）

先に均衡が局所的に不安定であるための十分条件 $\delta>2$ を書き改めると

$$\left(\frac{2(1-\beta)\beta pA}{\mu \mathrm{T}^{2-\beta}}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}<\alpha \tag{29}$$

となる。式 (16) によれば，定義域を $W_t>0$ とする関数 $f'(W_t)$ は単調増加関数であり，W_t がゼロに近づくとき $f'(W_t)$ は $-\infty$ に近づき、W_t が $+\infty$ に近づくとき 1 に近づく。よって $W_t>0$ に対し

$$f'(W_t)=0 \tag{30}$$

となる W_t がただ一つ存在する。これを $\bar{W}$ とおくと，W_t が不等式 (26) を満たすときに W_{t+1} も不等式 (26) を満たすための条件を

$$f(\bar{W})>\frac{\beta pA}{T^{1-\beta}} \tag{31}$$

と書くことができる。また，方程式 (30) を解くことによって

$$\bar{W}=\left(\frac{\mu}{1-\beta}\right)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}}(\beta pA)^{\frac{1}{2-\beta}} \tag{32}$$

が得られる。さらに，$W_t=\bar{W}$ として式 (32) を式 (15) の右辺に代入して整理すると，

$$f(\bar{W})=(2-\beta)\bar{W}-\mu\alpha T \tag{33}$$

が導かれる。式 (33) は，他のパラメータを所与として α を十分小さく，T を十分大きくすれば条件 (31) が満たされることを示唆している。厳密には条件 (29)，(31) を同時に満たす条件は

$$\left(\frac{2(1-\beta)\beta pA}{\mu T^{2-\beta}}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}<\alpha<\min\left[\left(\frac{\mu}{1-\beta}\right)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}}(\beta pA)^{\frac{1}{2-\beta}}\frac{2-\beta}{\mu T}-\frac{\beta pA}{\mu T^{2-\beta}},1\right] \tag{34}$$

となる。

たとえば，$\alpha=0.4, \beta=0.5, \mu=0.8, p=1, T=1; A=0.26, 0.2605, \cdots, 0.7$ の場合に条件 (31) は満たされている[33)]。このパラメータ設定で図 1 と同様にして分岐図を描いたものが図 5 であり，図 3 と同様にして Lyapunov 指数を計算した結果を示したものが図 6 である。これらの図をみれば，経済学的に意味のあるパラメータ設定に対して，式 (15) はカオス的経済変動を再現し得ることが明らかである。最後に上記のパラメータ設定の中からカオス的振る舞いを示した $\alpha=0.4, \beta=0.5, \mu=0.8, p=1, T=1; A=0.3$ について，この設定の下での労働者の生活がどのようなものであるか Phillips 曲線を通じて見ておくことにしよう。

理論モデルから Phillips 曲線を導出する試みは古くから行われている[34)]。本稿では，名目賃金版の Phillips 曲線を導出するために，まずは式 (14)，(20)，(23) から

$$W_{t+1}-W_t=-\mu\alpha T u_t \tag{35}$$

を得る。これを変化率にするため，式 (25) を変形して

$$\frac{1}{W_t}=\frac{(\alpha T(1-u_t))^{1-\beta}}{\beta pA} \tag{36}$$

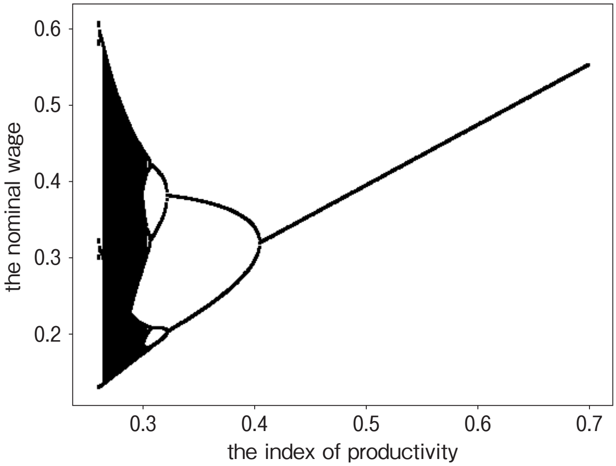

図5：経済学的に意味のあるパラメータ設定で描いた分岐図

（$\alpha=0.4$, $\beta=0.5$, $\mu=0.8$, $p=1$, $T=1$; $A=0.26, 0.2605, \cdots, 0.7$）

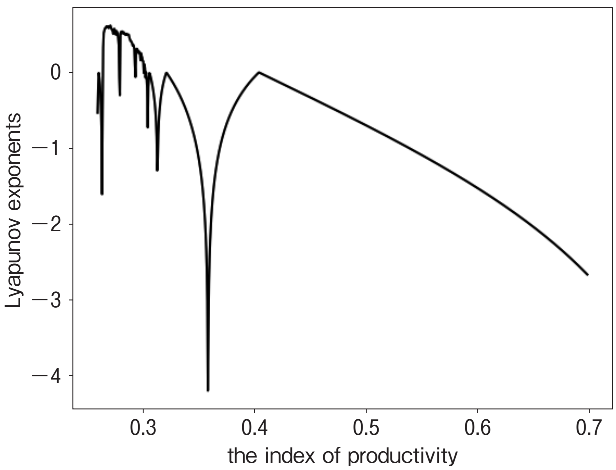

図6：図5の分岐図に対応するパラメータ設定での Lyapunov 指数

（$\alpha=0.4$, $\beta=0.5$, $\mu=0.8$, $p=1$, $T=1$; $A=0.26, 0.2605, \cdots, 0.7$）

とする。最後に式 (35) に式 (36) を掛ければ，見えざる手による導き[35)] から直接的な賃金交渉へと解釈を変更した Fanti（2012）マクロ動学モデルの

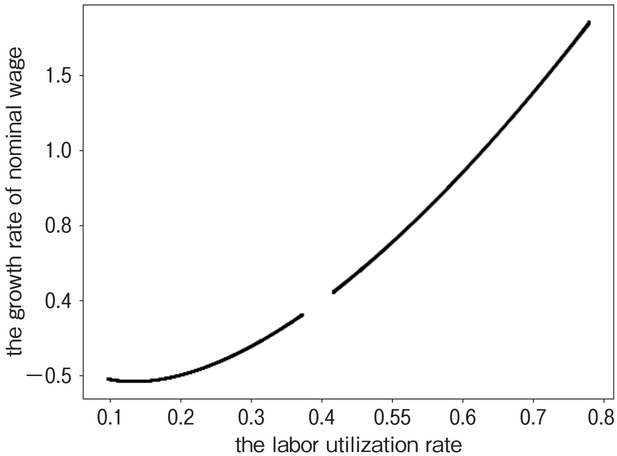

図 7：Fanti（2012）モデルの再現する Phillips 曲線

（$\alpha=0.4$, $\beta=0.5$, $\mu=0.8$, $p=1$, $T=1$, $A=0.29$）

短期の Phillips 曲線

$$\hat{W}_t=-\frac{\mu(\alpha T)^{2-\beta}(1-u_t)^{1-\beta}u_t}{\beta pA} \tag{37}$$

が導かれる。ただし，$\hat{W}_t$ は名目賃金の成長率を表す。失業率と名目賃金成長率の間のこの非線形の関係が短期の経済変動のなかで時系列データとして観測できるための条件は既に不等式 (34) にまとめられている。この条件の下で，Cristini and Ferri（2021）のように数値シミュレーションを実行し，モデルの生み出す Phillips 的関係を視覚化してみよう。

図 7 は不等式 (34) に基づき，パラメータを $\alpha=0.4$, $\beta=0.5$, $\mu=0.8$, $p=1$, $T=1$, $A=0.29$ と設定した場合にカオスアトラクタ上で観測される Phillips 曲線を描写したものである。通常の Phillips 曲線のグラフとは異なり，図の横軸は個人の労働時間の割合を表す[36)]。縦軸は賃金の上昇率である。上記のパラメータ設定においては，労働市場において超過需要が発生しているときは賃金が急速に上昇するが，超過供給が発生しているときにはそれほど急速には賃金は低下していないことを図 7 から読み取ることができる。式 (15)

は単純な賃金交渉方程式であるが，賃金の下方硬直性[37)]という重要な要素を含んでいるようである。

5. おわりに

実証分析によって労働市場における名目賃金上昇率と失業率の間にある非線形の関数を特定化し，その後の経済学に多大な影響を与えた Phillips（1958）は次の文で議論を締めくくっている。

> *There is need for much more detailed research into the relations between unemployment, wage rates, prices and productivity.*

本研究ではまさに失業，賃金率，価格，そして生産性の間の関連性について考察し，ミクロ経済学の標準的な仮定から出発して賃金版 Phillips 曲線と呼ばれる失業率と名目賃金上昇率の非線形の関係を導出し，それが労働市場において観測されるための条件を明らかにした。本研究においてこのような結果を得ることができたのは，これまでほとんど注目されてこなかった Fanti（2012）において，Walras 的労働市場モデルを用いた名目賃金率と価格，生産性の間の関連性についての静学的および動学的な分析が既に行われていたからに他ならない。

Fanti（2012）は，労働市場の均衡が局所的に不安定になるパラメータ設定においてカオス的振る舞いがみられることを数値シミュレーションによって描いた分岐図を用いて明らかにしたが，しかし，そのモデルには少なくとも三つの問題があった。それらはいずれも市場の不均衡に関連するものである。第一に，Fanti（2012）モデルにおいては，労働市場が均衡状態にあるときにも生産物市場において超過供給が発生している。第二に，労働市場において超過供給が発生しているときには，完全雇用所得よりも実際の所得水準が低くなる。第三に，労働市場において超過需要が発生しているときに，労働投入時間が期間の長さを超過してしまう。

これらの問題に対処するため本稿では次のように Fanti（2012）モデルを解釈した[38)]。すなわち，各期間において資本家と労働者が 1 人ずつ存在して名目賃金の水準を賃金交渉によって決定し，資本家が期間中に稼得した利潤をすべて貯蓄しそのまま投資する一方，労働者の消費と余暇の選択は雇用情勢による影響を受けると仮定した。そのようにして，この仮定の下で失業率や名目賃金が経済学的に意味のある範囲で推移するための条件を明らかにした。さらに，そのような条件下での数値シミュレーションによってモデルの再現する大域的振る舞いについて分析した。その結果，パラメータ設定を修正した場合であっても Fanti（2012）モデルにおいてカオス的振る舞いが起こり得ることが示された。最後に Fanti（2012）モデルにおける名目賃金版 Phillips 曲線を数学的に導出し，この非線形の関係が時系列として観測可能であるための条件を明らかにした上で，その条件を満たす具体的なパラメータ設定の下で動学方程式が Phillips（1958）と同様の曲線を描くことを例証した。

第 4 節において我々の引き出した条件は家計の選好に関するものである。このことは，家計の選好次第で尤もらしい変動が起こらなくなるという欠点を Fanti（2012）モデルが持っていることを意味している。より一般的な結論を導くためには，モデルの背後にある仮定を見直すことも考えねばならないだろう。これが残された課題の一つである。

本研究においては議論を単純化するために効用関数を特定化し，さらに，生産物市場と資本市場が常に均衡していると仮定して，短期の賃金交渉方程式を非線形差分方程式として導出したため，1 次元で Phillips 曲線を再現することに成功した。モデルを微分方程式で書き改める場合，同様の結果を得るには少なくとも 3 次元以上の方程式系にする必要がある。本研究で得られた成果をベースに，理論と実証の両面から最新の研究成果を適切に取り入れていけば，景気循環の理解に役立つモデルを構築することができるかもしれない。これも残された課題の一つである。

言うまでもなく，経済学は人々の人生をより豊かにするための学問であ

る。残念ながら今回の議論から得られた知見では世界の貧困をなくすことに対して殆ど貢献できていない。とはいえ，そのような経済学の役目を意識しつつ，今後，残された課題に取り組むことが重要なのではないだろうか。

注

1）この文は殆ど Stiglitz and Walsh（2006, p. 499）の受け売りである。
2）Gordon（1990）によれば Phillips 曲線（Phillips curve）という言葉の生みの親は Samuelson と Solow の二人である。
3）失業率を x，名目賃金上昇率を y，いずれも単位を％として Phillips（1958）は 1862 年から 1913 年までの期間のイギリスの年次データを用いて $y = -0.900 + 9.638x^{-1.394}$ という推定結果を示した。Phillips（1958）の成果が「Phillips 曲線の発見」とみなされないことに関しては，Fisher（1973）を参照せよ。
4）たとえば Flaschel et al.（2007）を参照。
5）Phillips 曲線の修正版としては期待修正された Phillips 曲線（expectations-augmented Phillips curve），New Keynesian Phillips 曲線などが知られている。前者については Mankiw（1990）を，後者については，たとえば Nason and Smith（2008）を参照。
6）Barsky and Kilian（2001）を参照。
7）Phillips 曲線に関する議論の系譜については，Galí（2000），Islam and Mustafa（2017），Gordon（2018）にまとめられている。最近の研究に関しては，Cristini and Ferri（2021）などを参照せよ。
8）この研究より前から既にカオス的な価格変動に関する文献は Chiarella（1988）の他，いくつも存在していた。
9）Fanti 教授が同年に発表した論文があまりに多いため，Fanti（2012）が埋もれてしまっただけなのかもしれない。
10）ここでいう短期とは，生産技術の進歩や設備投資による生産能力の拡大を無視できるほどの短いスパンを意味する。
11）たとえ理論上，Phillips 曲線の関係式が導出できたとしても，安定的な不動点（fixed point）はいうまでもなく，周期が極端に短い周期軌道上において失業率と名目賃金上昇率の間の非線形の関係を認識することは難しいかもしれない。
12）たとえば，Fanti（2012）においては期間の長さを表す記号として d を用いているが，微分の記号と混同しないよう，本稿ではこれを T に置き換えている。
13）本節で行う比較静学分析および動学分析は Chiang and Wainwright（2005）のカバーする範囲内のものである。
14）期間の長さ T に関するこの説明は著者による一つの解釈であり，Fanti（2012）においてそのような説明は行われていない。
15）Weber（1998）によれば，このような効用関数を特定化して経済学的知見を引き出

すという Pareto の先駆的研究は Cobb and Douglas（1928）よりも前に存在していた。

16） これは標準的な Cobb Douglas 型生産関数において資本ストックを一定とした場合に相当する。

17） 式 (12) は名目賃金，式 (13) は実質賃金の均衡水準をそれぞれ示している。

18） この文脈での長期は均衡に到達するほどの時間が経過することを意味する。

19） これはいわゆる Walras 的調整過程（Walrasian adjustment process）である。この調整を仮定しているので，Fanti（2012）ではこのモデルの描写する労働市場を Walrasian labor market と呼んでいる。Walras 的調整過程については，たとえば，Mukherji（1995）などを参照。

20） この点に関しては，たとえば，Matsumoto and Szidarovszky（2014）などを参照。

21） 式 (15) の右辺第 2 項は式 (14) の超過需要関数のミクロ的に基礎付けられた特定化であり，当然のことながら，すべての財の価格すなわち名目賃金 W，価格 p に関して 0 次同次となっている。ある関数が超過需要関数であるための条件については，たとえば Sonnenschein（1972）を参照せよ。

22） 非線形差分方程式の均衡が局所的に安定である条件については，たとえば，Chiang and Wainwright（2005, pp. 562-565）を参照。

23） ただし，パラメータ β の効果はそれほど単純ではない。

24） 今回の数値シミュレーションは Python3 で実行した。

25） 具体的には，各パラメータ設定に対し，W_{2500} と $W_{2501}, W_{2502}, \cdots, W_{80000}$ の間の距離の最小値がいずれも 0.0001 を下回ることで十分 W_{2501} に接近していると判断した。この手法は Guckenheimer and Holmes（1983, p. 34）に記されたアトラクタの定義に基づくものである。

26） カオスの定義については，Orlando et al.（2021）等を参照。

27） Lorenz（1993, p. 132）を参照。

28） Lyapunov 指数の具体的な計算方法については，たとえば Lorenz（1993, pp. 213-214）を参照。

29） Fanti（2012）ではここまで詳細な分析は行っていないが，その代わりに Li and York（1975）に基づく検証を行っている。

30） これは古くから知られている単純化に基づく解釈である。すなわち，資本家は利潤をすべて貯蓄し，それがそのまま投資に充てられる。この点については，たとえば，Goodwin（1967）などを参照。本稿のモデルでは投資行動を明示的に定式化していないが，生産設備や生産技術の水準を維持するために投資が行われているとみなすことができるだろう。

31） 一方，時間制約は，就業している時間，失業している時間，余暇に費やす時間の合計が期間の長さに一致すること，となる。ただし，個人（家計）が効用最大化問題を解く時点では就業時間と失業時間の割合は不明なので，結局，時間制約の式は (1) のままである。

32） 式 (23) は式 (7) と全く同じであるが，式 (15) に関しては，この文脈では賃金交渉

方程式（bargaining equation）とみなすこともできる。

33）$\alpha=0.4,\ \beta=0.5,\ \mu=0.8,\ p=1,\ T=1;\ A=0.26,\ 0.2605,\ \cdots,\ 0.405$ であれば条件 (34) を満たす。

34）Holmes and Smyth（1979）を参照。

35）この表現は Smith（2007, p. 349）に由来する。

36）労働供給関数（23）を前提として横軸を式で表すと $\alpha(1-u_t)$ である。

37）Phillips（1958）を参照。

38）もしかしたら，本稿で問題点として挙げた中のいくつかは，Fanti 教授が暗黙の仮定としているものを著者が単に見逃しているだけかもしれない。

参考文献

［1］Barsky, Robert B. and Kilian, Lutz（2001）“Do We Really Know that Oil Caused the Great Stagflation? A Monetary Alternative,” *NBER Macroeconomics Annual*, Vol. 16, pp. 137–183.

［2］Chiang, Alpha C. and Wainwright, Kevin（2005）“*Fundamental Methods of Mathematical Economics Fourth Edition*,” McGraw–Hill, Inc, Boston.

［3］Chiarella, Carl（1988）“The cobweb model. Its instability and the onset of chaos,” *Economic Modelling*, Vol. 5, pp. 377–384.

［4］Cobb, Charles W. and Douglas, Paul H.（1928）“A Theory of Production,” *The American Economic Review*, Vol. 18, Isuue 1, pp. 139–165.

［5］Corry, Bernard and Laidler, David（1967）“The Phillips Relation: A Theoretical Explanation,” *Economica*, Vol. 34, No. 134, pp. 189–197.

［6］Cristini, Annalisa and Ferri, Piero（2021）“Nonlinear models of the Phillips curve,” *Journal of Evolutionary Economics*, Vol. 31, pp. 1129–1155.

［7］Fanti, Luciano（2012）“Prices, productivity and irregular cycles in a walrasian labour market,” *Discussion Paper*, n. 152, *E–papers from the Department of Economic Sciences — University of Pisa.*

［8］Fisher, Irving（1973）“I Discovered the Phillips Curve: “A Statistical Relation between Unemployment and Price Changes”,” *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 2, pp. 496–502.

［9］Flaschel, Peter, Kauermann, Göran and Semmler, Willi（2007）“Testing wage and price Phillip curves for the United States, ” *Metroeconomica*, Vol. 58, No. 4, pp. 550–581.

［10］Galí, Jordi（2000）“The return of the Phillips curve and other recent developments in business cycle theory,” *Spanish Economic Review*, Vol. 2, pp. 1–10.

［11］Goodwin, Richard Murphy（1974）“Growth Cycle,” in Feinstein C. H.（ed.）

Socialism, Capitalism and Economic Growth, Essays Presented to Maurice Dobb, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 54–58.

[12] Gordon, Robert J. (1990) "The Phillips curve now and then," *NBER Working Paper series*, No. 3393.

[13] Gordon, Robert J. (2018) "Friedman and Phelps on the Phillips curve viewed from a half century's perspective," *Review of Keynesian Economics*, Vol. 6, No. 4, pp. 425–436.

[14] Guckenheimer, John and Holmes, Philip (1983) "*Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*," Springer-Verlag New York Inc., New York.

[15] Holmes, James M. and Smyth, David J. (1970) "The Relation between Unemployment and Excess Demand for Labour: An Examination of the Theory of the Phillips Curve," *Economica*, Vol. 37, No. 147, pp. 311–315.

[16] Holmes, James M. and Smyth, David J. (1979) "Excess demand for labor, unemployment, and theories of the Phillips curve," *Journal of Macroeconomics*, Vol. 1, No. 4, pp. 347–372.

[17] Islam, Mohammed Saiful and Mustafa, Riduanul (2017) "Quest for a Valid Phillips Curve in the Long Run: An Empirical Approach," *International Business Research*, Vol. 10, No. 4, pp. 191–198.

[18] Li, Tien-Yien and Yorke, James A. (1975) "Period Three Implies Chaos," *The American Mathematical Monthly*, Vol. 82, No. 10, pp. 985–992.

[19] Lipsey, Richard G. (1960) "The Relation between Unemployment and the Rate of Change of Money Wage Rates in the United Kingdom, 1862–1957: A Further Analysis," *Economica*, Vol. 27, No. 105, pp. 1–31.

[20] Lipsey, Richard G. (1974) "The Micro Theory of the Phillips Curve Reconsidered: A Reply to Holmes and Smyth," *Economica*, Vol. 41, No. 161, pp. 62–70.

[21] Lorenz, Hans Walter (1993) "*Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion, Second Edition*," Springer-Verlag, New York.

[22] Mankiw, N. Gregory (1990) "A Quick Refresher Course in Macroeconomics," *Journal of Economic Literature*, Vol. 28, No. 4, pp. 1645–1660.

[23] Matsumoto, Akio and Szidarovszky, Ferenc (2014) "Discrete and continuous dynamics in nonlinear monopolies," *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 232, pp. 632–642.

[24] Mukherji, Anjan (1995) "A Locally Stable Adjustment Process," *Econometrica*, Vol. 63, No. 2, pp. 441–448.

[25] Nason, James M. and Smith, Gregor W. (2008) "Identifying the New Keynesian

Phillips Curve," *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 23, No. 5, pp. 525–551.

[26] Orlando, Giuseppe, Stoop, Ruedi, and Taglialatela, Giovanni（2021）"Chaos," in Orlando, Giuseppe, Pisarchik, Alexander N. and Stoop, Ruedi（eds.）*Nonlinearities in Economics, An Interdisciplinary Approach to Economic Dynamics, Growth and Cycles*, Springer Nature Switzerland, Cham, pp. 87–103.

[27] Phillips, A. W.（1958）"The Relation between Unemployment and the Rate of Change of Money Wage Rates in the United Kingdom, 1861–1957," *Economica*, Vol. 25, pp. 283–299.

[28] Samuelson, Paul A. and Solow, Robert M.（1960）"Analytical Aspects of Anti-Inflation Policy," *The American Economic Review*, Vol. 50, No. 2, pp. 177–194.

[29] Smith, Adam（2007）"*An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations: Books I, II, III, IV, and V*," MetaLibri.（Original work published 1776）.
https://www.ibiblio.org/ml/libri/s/SmithA_WealthNations_p.pdf

[30] Sonnenschein, Hugo（1972）"Market Excess Demand Functions," *Econometrica*, Vol. 40, No. 3, pp. 549–563.

[31] Stiglitz, Joseph E. and Walsh, Carl E.（2006）"*Economics, Fourth Edition*," W. W. Norton & Company, New York.

[32] Weber, Christian E.（1998）"Pareto and the Wicksell-Cobb-Douglas Functional Form," *Journal of the History of Economic Thought*, Vol. 20, Issue2, pp. 203–210.