

【論 説】

ロジスティック写像とダウ平均株価指数

石 山 健 一

目 次

1. はじめに
2. ダウ平均株価の日次収益率
3. ロジスティック写像とリスク指標
4. 推定
5. おわりに

1. はじめに

株価指数はGDPやインフレーションと比較してはるかに高い頻度で観測することのできる指標である。ダウ平均株価（the Dow Jones Industrial Average, しばしばDJIAと略記）はダウ・ジョーンズ輸送株平均（the Dow Jones Transportation Average）に次いで古い株価指数であり、今なお世界で最も影響力のある代表的な株価指数として知られている¹⁾。ダウ平均株価指数に関しては、それがどのような法則に従っているか、過去のデータから将来の株価を予測することは可能であるか、など様々な視点からの研究が数多く蓄積されている²⁾。本研究では、そのような研究のなかから、近年の興味深い文献の一つとして、ダウ平均株価の変動をロジスティック写像で説明することを試みたJablanovic（2020）に注目する。

May（1976）以来、パラメータの値によって周期的変動やカオスの振る舞いを再現するロジスティック写像は幅広い学問領域で使われるようになったといわれている³⁾。しかし、著者の知る限り、株価指数の変動と関連付けた研究はJablanovic（2020）以外殆ど存在しない。本論文では、Jablanovic

ロジスティック写像とダウ平均株価指数（石山）

(2020) を参考にして、ダウ平均株価指数の日次収益率に関する、ある種のリスク指標の推移にロジスティック写像を当てはめ、推定対象となる期間に応じたどのような変動を示すパラメータが得られるのかを明らかにする。

本論文の構成は次の通り。次節では、1980年1月3日から2023年3月28日までのダウ平均株価の時系列データを分析し、日次収益率が独立ではなく過去の影響を受けている可能性を示す証拠を確認する。第3節ではロジスティック写像と呼ばれる関数について概括し、そのような写像で通時的変化が説明できると予想されるリスク指標を定義する。このリスク指標の期待値を決定するロジスティック写像のパラメータの推定方法およびその結果については第4節で述べる。本論文で得られた結論は第5節にまとめられる。

2. ダウ平均株価の日次収益率

CNBC の Web ニュースは米国経済を象徴するダウ平均株価指数が2020年11月24日、ついに30,000ドルの大台を突破したことを報じた⁴⁾。図1は、1980年1月3日から2023年3月28日までのダウ平均株価終値の推移を示したものである⁵⁾。図の縦軸はドル、横軸は年を表す⁶⁾。一時は新型コロナウイルス感染拡大によって急降下したものの、2010年以降、ダウ平均株価は上昇を続けている⁷⁾。

もちろん、ダウ平均株価は40年間、日々、順調に上昇していた訳ではない。そのことについて詳しく眺めるために日次収益率をプロットしてみよう⁸⁾。図2の縦軸は日次収益率、横軸は年を表す。

標本期間全体（標本サイズ10,901）で求めた平均収益率は0.0003、標準偏差は0.0112である。図2をみれば、期間中に標準偏差の10倍以上平均から外れた値が複数回観測されていることが分かる。このことはダウ平均株価の日次収益率が正規分布には従っていない可能性が高いことを示唆している。

このような金融データには正規分布ではなくNIG分布がよく適合するこ

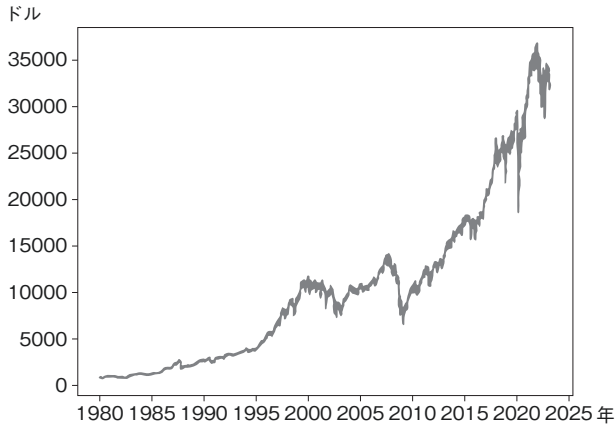


図1：ダウ平均株価指数の推移

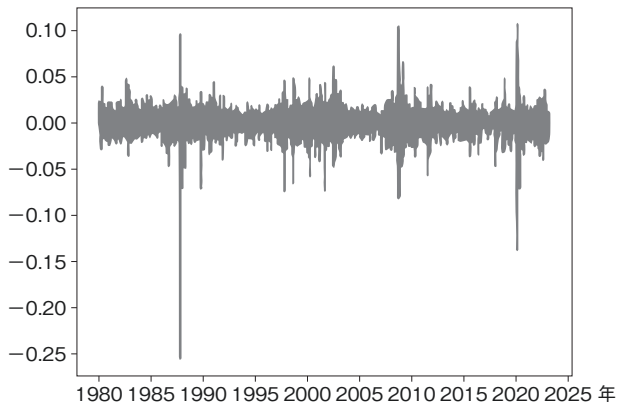


図2：ダウ平均株価の日次収益率

とが、既に Weron (1999)、Karlis (2002)、Borak et al. (2011) 等によって指摘されている⁹⁾。そのような指摘が図2のデータに対しても適切であるか否かを確認するため、図2の時系列データに正規分布およびNIG分布を当てはめてみよう。その結果は図3に示されている。

図3に描写された各マーカーの縦座標は、観測期間全体で横座標の区間に入る日次収益率の観測度数を表す。データから推定した正規分布(破線)お

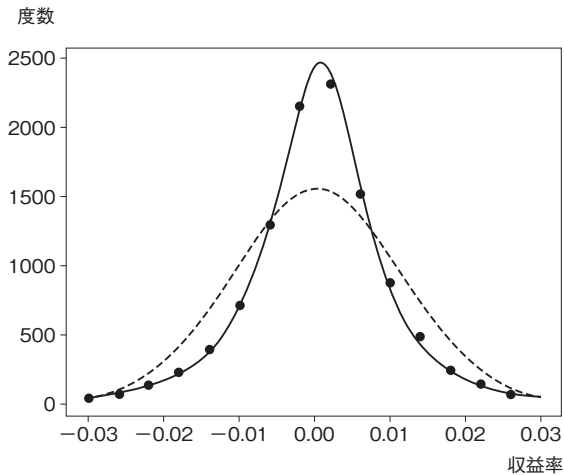


図 3：ダウ平均株価日次収益率の分布

よび NIG 分布（実線）の確率密度関数は総面積がマーカーの描くヒストグラムのそれと一致するようにスケール変換されている。この図から、Weron (1999) が指摘した通り、ダウ平均株価指数の日次収益率には正規分布ではなく NIG 分布がよく当てはまっていることを確認することができる。株価収益率の分布が正規分布に従わない、すなわち、中心極限定理が成立しない理由としては、様々なものを挙げることができるが、本研究ではデータがある種の動学方程式に従っていることを想定する。この点については、後ほど議論する。

次に、全観測期間をおよそ 1ヶ月に相当する 25 営業日で均等に区切り、それぞれの期間の平均収益率およびボラティリティを求めてみよう¹⁰⁾。その結果は図 4 に示されている。この図から、各月の日次収益率のばらつきの中心およびその広がり具合がどのように推移しているかを読み取ることができる。

このように期待値や分散が時間と共に変化する過程を説明する理論としては古くは Bachelier によるランダムウォークモデルがある¹¹⁾。しかし、本論

文ではそのような非定常確率過程ではなく、簡単な非線形動学方程式で説明することを試みよう。そのモデルの詳細については次節で説明する。

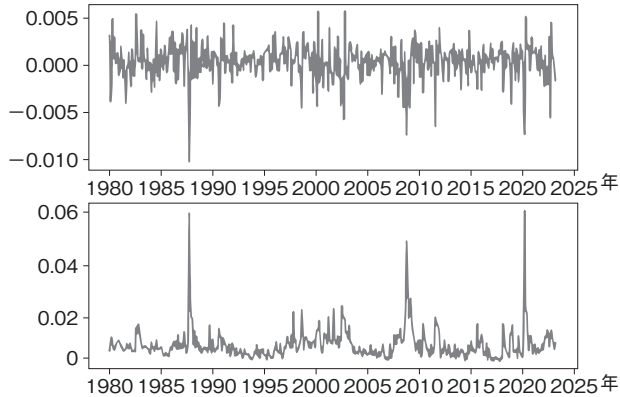


図4：平均利回り（上）とボラティリティ（下）

3. ロジスティック写像とリスク指標

本節では、ダウ平均株価の日次収益率に関する指標に非線形の差分方程式モデルを当てはめることについて検討する。ダウ平均株価の変動を非線形差分方程式で説明することを試みた先行研究としては、Jablanovic (2020) を挙げるができる。Jablanovic (2020) は各時点の株式の需要と供給がその時点の株価の1次関数によって決まり、そのときの超過需要に調整速度を乗じた分だけ価格が上昇すると仮定した上で、価格を観測期間中の最大値に対する相対価格に変換することによって動学モデルをロジスティック写像として知られる差分方程式に要約し、時系列データを用いてロジスティック写像のパラメータを推定している。以下では、単純な構造でありながら複雑な振る舞いを再現することで古くからよく知られているこのロジスティック写像を May (1976) に沿って紹介しよう。

May (1976) は、Chaundy and Phillips (1936) らが収束条件を考察した2

ロジスティック写像とダウ平均株価指数 (石山)

次多項式で表現された漸化式に関して、ロジスティック差分方程式と呼ばれる以下の式に注目し、その解の振る舞いの特性を明らかにした。

$$N_{t+1} = N_t(a - bN_t) \quad (1)$$

この式は、パラメータが $a > 1$ かつ $b = 0$ であれば、ある種の生物の個体数 N_t の指数的增长を再現する。May (1976) によれば、

$$X_t = \frac{b}{a} N_t \quad (2)$$

とおくことによって、式 (1) は興味深い振る舞いを示す最も簡単な非線形差分方程式

$$X_{t+1} = aX_t(1 - X_t) \quad (3)$$

となる。パラメータ a が

$$1 < a < 4 \quad (4)$$

を満たす限り、式 (3) は $[0, 1]$ から $[0, 1]$ への写像を表し、自明でない不動点

$$X^* = \frac{a-1}{a} \quad (5)$$

がただ一つ存在する。

図5は、そのような a の値に対応するロジスティック写像を描いたものである。図中の縦軸は X_{t+1} 、横軸は X_t を意味する。図5の座標平面に描かれた関数 (3) のグラフと 45 度線の交点が不動点である。これらの不動点のうち、第1象限にある点の座標が (5) の均衡水準を表す。

図5に描かれた破線はこの均衡における関数 (3) のグラフの接線であり、その傾きの絶対値が 1 より小さいことは均衡が局所的に安定であることを意味する¹²⁾。均衡における接線の傾きは

$$a(1-2X^*)=2-a \quad (6)$$

であるから、Puu (1997, p.79) も述べているように、この均衡が局所的に安定であるための必要十分条件は

$$1 < a < 3 \quad (7)$$

である。さらに、Puu (1997, pp.82-84) によれば、図5のような座標平面上に局所的に安定な周期2の周期軌道が出現するための必要十分条件は

$$3 < a < 1 + \sqrt{6} \quad (8)$$

である¹³⁾。

変数 X_t をダウ平均株価の相対水準とみなして Jablanovic (2020) は1982年から2009年の期間における a の値を $\hat{a}=2.722287$ と推定した。図5のロジスティック写像はこの推定値に対応するものである。パラメータのこの水準は写像(3)の均衡水準(5)が局所的に安定であることを意味しており、Jablanovic (2020) はパラメータの推定値から、1982年6月から2009年3月の間のダウ平均株価指数の均衡水準を13923.287と推定している。

ところで、ロジスティック写像は図5に示したように変数 X_t の定義域を $X_t \in [0, 1]$ と想定したものであり、ロジスティックモデルを当てはめるには取り得る範囲がこの定義域に一致しない株価やその収益率を何らかの方法で変換する必要があるが、著者の知る限り、そのような考察をした例は殆どない。Jablanovic (2020) の場合は期間中の株価指数の最大値を用いてデータを変換し、取り得る範囲を $[0, 1]$ としたが、この変換は絶対的な根拠に基づくものではなく、議論の余地があると考えられる。

前節の図4によれば、ダウ平均株価の日次収益率の月毎の平均や分散は一時的に不安定化して極端な値をとることもあるが、ほとんどの期間では安定的に推移している。ここで、図5の縦軸と横軸の数値が当営業日と前営業日の日次収益率のリスク指標を表していると考えてみよう。この指標は0以上

ロジスティック写像とダウ平均株価指数（石山）

1以下の値をとり、1に近いほど収益率の分散が高いことを意味する。もし、そのようなリスク指標の推移が主としてロジスティック写像によって決定されるのなら、そのパラメータが不等式(7)を満たすことと図4のようなグラフになることは整合的であると考えられる。

そこで本研究では、日次のリスク指標として X_t および Y_{t+1} を次のように定義する¹⁴⁾。

$$X_t = 1 - e^{-\left(\frac{R_{25(m-1)+d} - \bar{R}_{m,0}}{S_{m,0}}\right)^2} \quad (9)$$

$$Y_{t+1} = 1 - e^{-\left(\frac{R_{25(m-1)+d+1} - \bar{R}_{m,1}}{S_{m,1}}\right)^2} \quad (10)$$

ただし、 R_t は t 期の日次収益率を表し、

$$t = 25(m-1) + d$$

$$m = 1, 2, \dots, 436$$

$$d = 1, 2, \dots, 25$$

$$j = 0, 1$$

$$\bar{R}_{m,j} = \frac{1}{25} \sum_{d=1}^{25} R_{25(m-1)+d+j} \quad (11)$$

$$S_{m,j} = \sqrt{\frac{1}{24} \sum_{d=1}^{25} (R_{25(m-1)+d+j} - \bar{R}_{m,j})^2} \quad (12)$$

とする。式(9)および式(10)によって定義されるリスク指標 X_t および Y_{t+1} は、いずれも元の時系列データの単位には依存しない指標である。なお、図4のグラフは、 $j=0$ の場合の式(11)および式(12)の計算結果を示したものである。

さらに、確率変数 Y_{t+1} の条件付き期待値が次のようにロジスティック写像によって決定されると仮定する。

$$E(Y_{t+1} | X_t) = a_m X_t (1 - X_t) \quad (13)$$

次節では、式 (13) によって期待値が定まるリスク指標 Y_{t+1} の確率分布を近似的に正規分布とみなす場合およびベータ分布とみなす場合それぞれについて、1980年1月3日から2023年3月28日までのダウ平均株価の時系列データを用いて推定した結果どのような数値が得られるのかについて明らかにしよう。

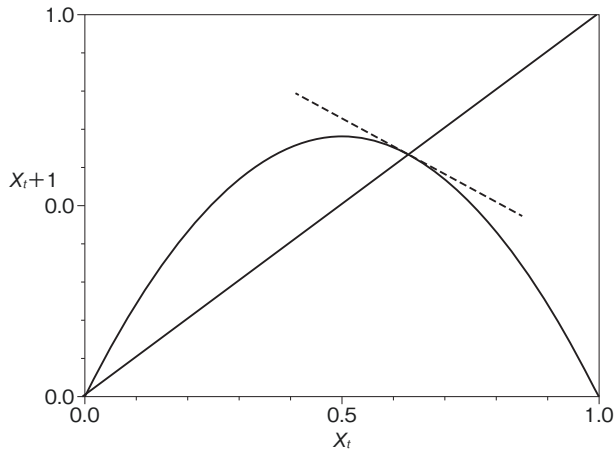


図5：ロジスティック写像 ($a=2.722287$)

4. 推定

本節では前節で示した非線形確率過程 (13) のパラメータ a_m の推定方法および推定結果について述べる。はじめに、式 (13) によって条件付き期待値 $E(Y_{t+1} | X_t)$ が定まる確率変数 Y_{t+1} が近似的に正規分布に従うと想定し、通常の最小2乗法でパラメータ a_m を推定することを考える。つまり、

$$\sum_{d=1}^{25} (Y_{25(m-1)+d+1} - a_m X_{25(m-1)+d} (1 - X_{25(m-1)+d}))^2 \quad (14)$$

を最小にする a_m を $m=1, 2, \dots, 436$ について求めるということである。推

ロジスティック写像とダウ平均株価指数（石山）

定結果は図 6（上）の通り。

図 6（上）によれば、パラメータ a_m の推定結果はほとんど $1.0 < \mu < 3.0$ の範囲に入っていることがわかる。このことは、日次のリスク指標に関して、動学的均衡が局所的に安定であり、均衡に近い状態にあるときには、当面の間は大きな変化が起きにくいことを示唆している。しかしながら、確率変数 Y_{t+1} が近似的に正規分布に従うという想定には、問題があるかもしれない。なぜなら、この変数に関しては、

$$P(Y_{t+1} < 0) = 0 \quad (15)$$

$$P(Y_{t+1} > 1) = 0 \quad (16)$$

という点において正規分布とは大きく異なるからである。

連続型の確率変数として誤差を $\varepsilon_{25(m-1)+d+1}$ で表すと、確率変数 Y_{t+1} は

$$Y_{25(m-1)+d+1} = a_m X_{25(m-1)+d} (1 - X_{25(m-1)+d}) + \varepsilon_{25(m-1)+d+1} \quad (17)$$

$(m = 1, 2, \dots, 436; d = 1, 2, \dots, 25)$

となる。式 (15) および式 (16) を満たす連続型確率変数 Y_{t+1} の従う確率分布の候補としては、たとえば、一様分布や三角分布が挙げられるが、そのような確率分布では不等式 (4) を満たす任意の a_m に対して式 (13) を成立させることができない。そこで、本論文では、式 (17) の従う確率分布として第 1 種ベータ分布を想定する¹⁵⁾。

第 1 種ベータ分布の確率密度関数は次の通り。

$$f(y; \omega, \tau) = \frac{\Gamma(\omega + \tau)}{\Gamma(\omega)\Gamma(\tau)} y^{\omega-1} (1-y)^{\tau-1} \quad (18)$$

この関数を自然対数変換すると、

$$\ln f(y; \omega, \tau) = \ln \Gamma(\omega + \tau) - \ln \Gamma(\omega) - \ln \Gamma(\tau) + (\omega - 1) \ln y + (\tau - 1) \ln (1 - y) \quad (19)$$

となる。以下では Smithson and Verkuilen (2006) を参考にして、 Y_{t+1} が第

1種ベータ分布に従う場合のパラメータ α_m の推定方法について考察しよう。

確率変数 $Y_{t+1} = Y_{25(m-1)+d+1} \sim \text{Beta}(\omega_m, \tau_m)$ の期待値と分散をベータ分布のパラメータで表すと、

$$E(Y_{t+1}) = \frac{\omega_m}{\omega_m + \tau_m} \quad (20)$$

$$V(Y_{t+1}) = \frac{E(Y_{t+1})(1-E(Y_{t+1}))}{\omega_m + \tau_m + 1} \quad (21)$$

となる¹⁶⁾。ここで、改めて

$$E(Y_{t+1}) = \frac{\omega_m}{\omega_m + \tau_m} = \alpha_m X_t (1 - X_t) \quad (22)$$

$$V(Y_{t+1}) = \frac{E(Y_{t+1})(1-E(Y_{t+1}))}{\omega_m + \tau_m + 1} = \frac{E(Y_{t+1})(1-E(Y_{t+1}))}{\delta_m} \quad (23)$$

と仮定すると、

$$\omega_m + \tau_m = \delta_m - 1 \quad (24)$$

$$\omega_m = \alpha_m (\delta_m - 1) X_t (1 - X_t) \quad (25)$$

$$\tau_m = (\delta_m - 1) (1 - \alpha_m X_t (1 - X_t)) \quad (26)$$

となる。ペアデータ

$$(X_{25(m-1)+1}, Y_{25(m-1)+2}), (X_{25(m-1)+2}, Y_{25(m-1)+3}), \dots, (X_{25(m-1)+25}, Y_{25(m-1)+26})$$

に対する対数尤度を L_m とおくと、パラメータの最尤推定量は未知数 α_m と δ_m に関する非線形の連立方程式

$$\frac{\partial L_m}{\partial \alpha_m} = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial L_m}{\partial \delta_m} = 0 \quad (28)$$

ロジスティック写像とダウ平均株価指数（石山）

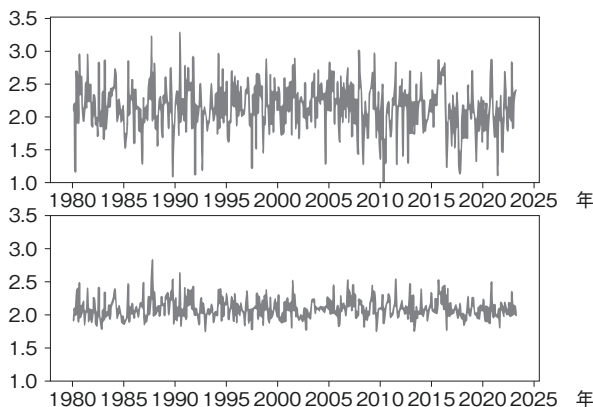


図6：正規分布の推定結果（上）とベータ分布の推定結果（下）

の根として得られる。実際にこれを Newton-Raphson 法で解くと、図6（下）の結果が得られた¹⁷⁾。リスク指標 Y_{t+1} が近似的に正規分布に従うと想定して推定した結果と比較すると、リスク指標 Y_{t+1} がベータ分布に従うと想定した結果の方が推定値のばらつきがかなり小さい。このことは、1980年1月3日から2023年3月28日までのダウ平均株価のリスク指標の推移が条件(7)を満たすロジスティック写像である程度まで説明できることを意味している。換言すれば、式(10)で定義されたリスク指標は、ある均衡水準に近づく傾向があるということである。

5. おわりに

本研究では、最初に1980年1月3日から2023年3月28日までのダウ平均株価の日次収益率が正規分布ではなくNIG分布に近いばらつきをしていることを確認した。株価収益率の分布が正規分布に従わない理由としては、様々なものを挙げることができるが、本研究ではデータがある種の動学方程式に従っていると想定し、ダウ平均株価の変動をロジスティック写像で説明することを試みたJablanovic (2020)を参考にして、株価収益率に関するあ

る種のリスク指標の推移にロジスティック写像を当てはめ、写像のパラメータを推定した。

ロジスティック写像は単純な構造の非線形関数でありながら、パラメータ設定によってはカオスの振る舞い等の複雑な変動をも再現することで知られている。本研究ではリスク指標が近似的に正規分布に従うと想定した場合と第1種ベータ分布に従うと想定した場合のそれぞれについてデータを用いてパラメータを推定し、いずれのケースでもパラメータの推定値は経済学的に意味のある均衡が局所的に安定な水準を示すという結果を得た。この分析結果は、本研究において定義されたリスク指標が、短期的にある均衡水準に近づく傾向があるということを意味している。この点については、より深く議論することによって、経済学的価値の高い知見を引き出すことができるかもしれない。

本研究の分析では、データを25営業日ごとに区切り、それぞれの期間で標準化した日次収益率を用いてリスク指標を計算している。各期間のロジスティック写像のパラメータの推定結果に大きな違いがないことから、区切る期間の長さをより長くしたり、最初のデータの開始日を前後に変更したとしても分析結果に大きな違いはないと予想される。言い換えれば、ダウ平均株価に関しては、Jablanovic (2020) が推定した相対価格の場合と同様に、われわれのリスク指標に関してもカオスの振る舞いは観測されないということである。ただし、前節でSmithson and Verkuilen (2006) を参考にして実行したベータ分布のパラメータの推定や第3節で定義したリスク指標については、今後、再検討する必要があると考えられる。

注

- 1) ダウ平均株価がダウ・ジョーンズ輸送株平均 (the Dow Jones Transportation Average) に次いで古い株価指数であるという事実については、例えばSewell (2012) を参照せよ。また、今なお世界で最も影響力のある代表的な株価指数であるという点については、例えば、Tse (1999)、Haynes et al. (2021) を参照せよ。なお、Lin (2018) には、ダウ平均株価指数の歴史が詳しく紹介されている。

ロジスティック写像とダウ平均株価指数（石山）

- 2) ダウ平均株価指数の従う「べき則」に関する研究としては、たとえば Sewell (2012) を、経済予測に関する研究としては Fama (1965)、Brock et al. (1992) を挙げておく。Fama (1965) は債権価格の分布が正規分布には従わないという Mandelbrot (1963) の仮説についてダウ平均株価の日次収益率を対象に検証した先駆的研究であるが、Fama (1965) が述べているように、ランダムウォーク仮説に基づく株価変動の理論を最初に発表したのは Bachelier である。
- 3) この点については、たとえば、Kumari and Chugh (2020) を参照。
- 4) CNBC ホームページ (www.cnbc.com) 2020 年 11 月 24 日公開、2020 年 11 月 25 日更新記事 “Dow pulls back more than 150 points after reaching 30,000 milestone” を参照。
- 5) このようなデータは Yahoo Finance のホームページ (finance.yahoo.co.jp)、Fusion Media のホームページ (www.investing.com) 等から入手可能である。
- 6) ただし、横軸に関しては、取引のなかった日が含まれていない点に留意せよ。他の図に関しても同様である。
- 7) ダウ平均株価指数に新型コロナウイルス感染拡大が与えた影響については、Ngwakwe (2020) 等を参照せよ。
- 8) 日次収益率の定義は一意ではない。本論文では Fama (1965) に倣い、自然対数変換した当営業日の終値と前営業日の終値の差分を当営業日の収益率とみなす。このように定義する理由については Fama (1965) を参照せよ。
- 9) NIG 分布の定義については Barndorff-Nielsen (1997) を参照。
- 10) 株価指数に対するこのような分析は、たとえば Tse and Tung (1992) によって行われている。
- 11) Fama (1965) を参照。
- 12) 非線形差分方程式モデルの均衡の局所的な安定条件については、Chiang and Wainwright (2005, p. 563) の図解などを参照せよ。
- 13) ただし、Puu (1997, p. 83) の因数分解には誤りが含まれている。
- 14) X_t と Y_t は異なる期間のデータを用いて標準化した収益率で定義されており、一般的に $X_t = Y_t$ が成立しない点に注意せよ。
- 15) 第 1 種ベータ分布の定義については、たとえば、Baltagi (2008, p. 39) を参照せよ。
- 16) Baltagi (2008, p. 39) を参照。
- 17) 本論文では、このような最尤推定を実行するために、Python のディガンマ関数を利用した。

参考文献

- [1] Baltagi, Badi H. (2008) “*Econometrics Fourth Edition*,” Springer-Verlag.
- [2] Barndorff-Nielsen, Ole E. (1997) “Normal Inverse Gaussian Distributions and Stochastic Volatility Modelling,” *Scandinavian Journal of Statistics*, Vol. 24,

No. 1, pp. 1-13.

- [3] Borak, Szymon, Misiorek, Adam and Weron, Rafał (2011) “Models for Heavy-tailed Asset Returns,” In *Statistical Tools for Finance and Insurance Second Edition*, Pavel Čížek, Wolfgang Karl Härdle, Rafał Weron (eds.), pp. 21-55, Springer-Verlag.
- [4] Brock, William, Lakonishok, Josef and LeBaron, Blake (1992) “Simple Technical Trading Rules and the Stochastic Properties of Stock Returns,” *The Journal of Finance*, Vol. 47, No. 5, pp. 1731-1764.
- [5] Chaundy, Theodore W. and Phillips, Eric (1936) “The Convergence of Sequences Defined by Quadratic Recurrence-Formulae,” *The Quarterly Journal of Mathematics*, Vol. 7, pp. 74-80.
- [6] Chiang, Alpha C. and Wainwright, Kevin (2005) “*Fundamental Methods of Mathematical Economics Fourth Edition*,” McGraw-Hill, Inc.
- [7] Fama, Eugene F. (1965) “The Behavior of Stock-Market Prices,” *The Journal of Business*, Vol. 38, No.1, pp. 34-105.
- [8] Haynes, Kingsley E., Phillips, Fred and Yu, Miko Ching-Ying (2021) “Recent applications of entropy in social and environmental sciences,” In *Handbook on Entropy, Complexity and Spatial Dynamics A Rebirth of Theory?*, Aura Reggiani, Laurie A. Schintler, Daniel Czamanski and Roberto Patuelli (eds.), pp. 32-45, Edward Elgar Publishing.
- [9] Jablanovic, Vesna (2020) “The Dow Jones Industrial Average (DJIA) Stock Market Index and the Chaotic Growth Model,” *ITEMA 2020 Conference Proceedings*, pp. 113-120.
- [10] Karlis, Dimitris (2002) “An EM type algorithm for maximum likelihood estimation of the normal-inverse Gaussian distribution,” *Statistics & Probability Letters*, Vol. 57, pp. 43-52.
- [11] Kumari, Sudesh and Chugh, Renu (2020) “A novel four-step feedback procedure for rapid control of chaotic behavior of the logistic map and unstable traffic on the road,” *Chaos*, Vol. 30, 123115.
- [12] Lin, Eric C. (2018) “The Effect of Dow Jones Industrial Average Index Component Changes on Stock Returns and Trading Volumes,” *The International Journal of Business and Finance Research*, Vol. 12, No. 1, pp. 81-92.
- [13] Mandelbrot, Benoit (1963) “The Variation of Certain Speculative Prices,” *The Journal of Business*, Vol. 36, Issue 4, pp. 394-419.
- [14] May, Robert M. (1976) “Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics,” *Nature*, Vol. 261, pp. 459-467.
- [15] Ngwakwe, Collins C. (2020) “Effect of COVID-19 Pandemic on Global Stock

ロジスティック写像とダウ平均株価指数 (石山)

- Market Values: A Differential Analysis,” *Acta Universitatis Danubius Economica*, Vol. 16, No. 2, pp. 255–269.
- [16] Puu, Tõnu (1997) “*Nonlinear Economic Dynamics, Fourth, Completely Revised and Enlarged Edition*,” Springer-Verlag.
- [17] Sewell, Martin (2012) “The Efficient Market Hypothesis: Empirical Evidence,” *The International Journal of Statistics and Probability*, Vol. 1, No. 2, pp. 164–178.
- [18] Smithson, Michael and Verkuilen, Jay (2006) “A Better Lemon Squeezer? Maximum-Likelihood Regression With Beta-Distributed Dependent Variables,” *Psychological Methods*, Vol. 11, No. 1, pp. 54–71.
- [19] Tse, Yiu Kuen and Tung, Siew Hoong (1992) “Forecasting Volatility in the Singapore Stock Market,” *Asia Pacific Journal of Management*, Vol. 9, No. 1, pp. 1–13.
- [20] Tse, Yiuman (1999) “Price discovery and volatility spillovers in the DJIA index and futures markets,” *The Journal of Futures Markets*, Vol. 19, Issue 8, pp. 910–930.
- [21] Weron, Rafał (1999) “Pricing Options on Dividend Paying Instruments under the Generalized Hyperbolic Model,” *Research Report HSC/99/1*, Wrocław University of Technology.