【論　説】

投資問題と *Ramsey Model* の拡張化
――資本の限定的可逆性と投資の調整費用の問題について――

永　冨　隆　司

目　　次

1. はじめに

永冨（2021）では、社会的計画者（*Social Planner*）が存在する集権的経済の *Ramsey Model* を家計や企業がそれぞれ独自の目的にしたがって意思決定する分権的経済の *Ramsey Model* に修正する議論を行った。また、*Ramsey Model* の拡張化の議論の１つとして政府部門を加え、税制が家計と企業の行動に対してどのような構造で影響を与えるかを考察した。

Ramsey Model の拡張化については、Blanchard and Fischer（1989）、Barro and Sala-i-Martin（2004）、Ljungqvist and Sargent（2018）等で様々に議論が行われている。本稿では、Barro and Sala-i-Martin（2004）の議論の中から投資に関する２つの問題を取り上げて理論的な整理を行う[1)]。ここでいう投資

に関する問題というのは、1つは資本財の可逆的性質に関する問題、もう1つは投資の実施に伴う調整費用に関する問題である。以下では、これら2つの問題をどのように定式化し、またどのような最適化の枠組みの中で考えればよいかを検討する。また、それらの問題を織り込んで拡張化した *Ramsey Model* をそれぞれ導出する。

2. 資本財の可逆的性質に関する問題

2–1. 企業の静学的最適化行動

新規に生産される1単位の財が資本財にも消費財にもどちらにも転用可能であるとき、当該財は可逆的（*Reversible*）であるといわれる。両財が1対1で転用できるとき、消費財の物的単位で測った資本財価格（相対価格＝交換比率）は1となる。また、蓄積された1単位の資本をそのまま1単位の消費財として転用可能である場合も資本財は可逆的であり、こうした場合も相対価格は1である。消費財への転用によって資本ストックが取り崩されたとき、それは負の投資と見なされる。したがって、消費財単位で測った資本財価格を ϕ とすると、資本財が可逆的である場合には $\phi=1$、また変化率は $\frac{\dot{\phi}}{\phi}=0$ となる。

一方、資本財として生産した財を消費財に転用できない場合、あるいは蓄積した資本を消費財も含めて他の用途にまったく転用できない場合、資本財は不可逆的（*Irreversible*）であるといわれる[2)]。個々の産業や企業に特有な資本財は消費財への転用のみならず、他の業種に対しても転用は一般に難しい。資本財の売却市場が存在しても新規の資本財価格と中古の資本財価格の間には大きな乖離が存在する。売却市場が存在しない資本財の場合は、生産活動に使用されなくなった時点で廃棄するしかない。そのため、廃棄処分される資本財の価値はゼロとなる。したがって、財が完全に不可逆的である場合は消費財との相対的な交換比率で表される資本財価格は $\phi=0$、変化率

も $\frac{\dot{\phi}}{\phi}=0$ となる。

企業が家計から資本財をレンタルして、その資本サービスを投入するという形で生産活動が行われる場合、資本の需要関数において重要な変数となるのは資本の使用者費用（*User Cost of Capital*）である。このとき、資本財はスポット価格でレンタルされ、レンタル期間が終了すると企業は契約を継続するか、あるいは資本財を返却するかの選択を行うことになる。

以下、本稿では資本財の可逆性に関する問題を考えるにあたって、Barro and Sala-i-Martin（2004）と同様、家計が資本を保有し、その資本サービスを企業に対して単位当たりレンタル率 R で貸し出すという枠組みで議論する[3)]。ただ、こうした枠組みについては、企業が資本を所有し、家計は当該企業の株式を所有するという枠組みに変更しても議論の本質は変わらない。

資本が毎期一定の正の割合（δ）で減耗するとき、資本を所有する家計の実質収益率は資本減耗分だけ目減りするから、$R-\delta$ となる。家計は他の家計に対して貯蓄した資産を利子率 r で貸し出せるとき、市場が完全であれば裁定が機能して、$r=R-\delta$ が成立する。これは、資本の所有と資産の貸し出しが価値の貯蔵という意味において完全代替であることを意味する。

資本財の可逆的性質が限定的（*Limited Reversibility*）で資本財価格が経時的に変動する場合、家計の収益率は資本財価格の変動の影響を２つの経路で受けることになる。１つは、資本財価格の変動 $\frac{\dot{\phi}}{\phi}$ による影響である。$\frac{\dot{\phi}}{\phi}>0$ の場合、保有する資本財にキャピタル・ゲインが発生しているから、当該資本を保有する家計にとってはキャピタル・ゲイン分だけ収益率は上昇する。逆に、$\frac{\dot{\phi}}{\phi}<0$ の場合は、キャピタル・ロスが発生しているため、家計の収益率は低下する。

もう１つの経路は、単位当たりレンタル率（収入）R と資本財価格 ϕ の

相対比からの影響である。$\frac{R}{\phi}>1$ の場合、家計は資本財を購入してそれを企業へ賃貸しすることによってさらに利益を得ることができる。ところが、$\frac{R}{\phi}<1$ となると、家計は資本財を購入してそれを企業へ賃貸ししても収益はマイナスになるため、資本財を消費財へ転換するか、あるいは資本財の売却市場が存在して ϕ の価格で保有資本を売却できるのであれば、家計は資本財を売却して収益を増やそうとする。資本を売却するのは、売却した資金で消費財を購入すれば効用を高めることができるからである。

以上のように、資本財価格が変動する場合は家計の実質収益率は $\frac{R}{\phi}-\delta+\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)$ と表されることになる。家計が他の家計に対して利子率 r で資産の貸し出しを行うことができるのであれば、完全市場では裁定が機能して、各 t 時点において、

$$r(t)=\frac{R(t)}{\phi(t)}-\delta+\left[\frac{\dot{\phi}(t)}{\phi(t)}\right] \tag{1}$$

が成立する。なお、物理的償却率 δ は一定と仮定している。

企業は資本と労働を投入して生産活動を行う。利潤は、収入（生産量＝販売量）から生産要素費用を差し引いた残額として与えられる。(1) 式よりレンタル・コスト R は $\phi(t)\left[r(t)+\delta-\left(\frac{\dot{\phi}(t)}{\phi(t)}\right)\right]$ となるから、利潤関数は、

$$\begin{aligned}\Pi(t)&=F[K(t),Q(t)L(t)]-R(t)K(t)-w(t)Q(t)L(t)\\&=F[K(t),Q(t)L(t)]-\phi(t)\left\{r(t)+\delta-\left[\frac{\dot{\phi}(t)}{\phi(t)}\right]\right\}K(t)-w(t)Q(t)L(t)\end{aligned} \tag{2}$$

と記述される[4)]。なお、労働経験や技能、専門的な知識や資格、心身の状態などは労働者の作業効率や職務遂行能力に影響を与えるため、労働 $L(t)$ に

ついては生産効率性 $Q(t)$ を加味して考えることにする[5)]。

生産関数については、資本と労働の2つの競合的な投入量に対する一次同次性（規模に関する収穫一定性）を仮定する。また、任意の $K(t)>0$、$L(t)>0$ について、

$$\frac{\partial F}{\partial K}>0、\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}<0 \quad かつ \quad \frac{\partial F}{\partial L}>0、\frac{\partial^2 F}{\partial L^2}<0$$

および、Inada (1963) の条件、

$$\lim_{K\to 0}\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right)=\lim_{L\to 0}\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)=\infty \quad および \quad \lim_{K\to\infty}\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right)=\lim_{L\to\infty}\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)=0$$

を満たすと仮定する。これらの性質が満たされるとき、生産関数は新古典派型となり、効率労働単位で表記することができる。

$$\begin{aligned} Y(t) &= Q(t)L(t)F\left[\frac{K(t)}{Q(t)L(t)}, 1\right] \\ &= Q(t)L(t)f[k(t)] \end{aligned} \tag{3}$$

財の性質は投資の最適時間経路に影響を与えない。というのは、企業は利潤を最大化するように各期において必要な資本サービスを家計からスポット（*Spot*）価格で賃借りして調整すればよいからである。したがって、企業は全ての時点において静学的な利潤最大化行動を順次解いて行けばよいことになる。これは、動学的な解が静学的な解の集合（系列）であることを意味する。

(3) 式から資本の限界生産物を求めると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} &= \frac{\partial F[K(t), Q(t)L(t)]}{\partial K(t)} \\ &= \frac{\partial Q(t)L(t)f[k(t)]}{\partial k(t)}\ \frac{\partial k(t)}{\partial K(t)} \\ &= Q(t)L(t)f'[k(t)]\ \frac{1}{Q(t)L(t)} \\ &= f'[k(t)] \end{aligned} \tag{4}$$

となる。

　同様に、効率労働の限界生産物を求めると、

$$\frac{\partial Y(t)}{\partial Q(t)L(t)}=\frac{\partial F[K(t),Q(t)L(t)]}{\partial Q(t)L(t)}$$

$$=\frac{\partial Q(t)L(t)f[k(t)]}{\partial Q(t)L(t)}$$

$$=f[k(t)]+Q(t)L(t)\frac{df[k(t)]}{dk(t)}\ \frac{\partial k(t)}{\partial Q(t)L(t)}$$

$$=f[k(t)]+Q(t)L(t)f'[k(t)]\left\{-\frac{K(t)}{[Q(t)L(t)]^2}\right\}$$

$$=f[k(t)]-f'[k(t)]k(t) \tag{5}$$

となる。

　一方、(2) 式から資本の限界利潤を求めると、

$$\frac{\partial \Pi(t)}{\partial K(t)}=\frac{\partial F[K(t),Q(t)L(t)]}{\partial K(t)L(t)}-\phi(t)\left\{r(t)+\delta-\left[\frac{\dot{\phi}(t)}{\phi(t)}\right]\right\}=0 \tag{6}$$

となるが、(6) 式に (4) 式を代入して整理すると、

$$f'[k(t)]=\phi(t)\left\{r(t)+\delta-\left[\frac{\dot{\phi}(t)}{\phi(t)}\right]\right\} \tag{7}$$

となる。したがって、(7) 式を利潤率について解くと、

$$r(t)=\frac{1}{\phi(t)}f'[k(t)]-\delta+\left[\frac{\dot{\phi}(t)}{\phi(t)}\right] \tag{8}$$

が得られる。

　なお、資本が完全に可逆的である場合は、$\phi=1$、かつ $\dfrac{\dot{\phi}}{\phi}=0$ であるから、(8) 式は、

$$r(t)=f'[k(t)]-\delta \tag{9}$$

となる。

同様に、(2) 式より効率労働の限界利潤を求めると、

$$\frac{\partial \Pi(t)}{\partial Q(t)L(t)}=\frac{\partial F[K(t),Q(t)L(t)]}{\partial Q(t)L(t)}-w(t)=0 \tag{10}$$

となるが、(10) 式に (5) 式を代入すると、

$$f[k(t)]-f'[k(t)]k(t)-w(t)=0 \tag{11}$$

となる。したがって、(11) 式を賃金率について解くと、

$$w(t)=f[k(t)]-f'[k(t)]k(t) \tag{12}$$

が得られる。

賃金率と利潤率の負の関係については、(12) 式に (7) 式を代入すると、

$$w(t)=f[k(t)]-\phi(t)\left\{r(t)+\delta-\left[\frac{\dot{\phi}(t)}{\phi(t)}\right]\right\}k(t) \tag{13}$$

となるから、利子率 $r(t)$ で微分して

$$\frac{\partial w(t)}{\partial r(t)}=-\phi(t)k(t) \tag{14}$$

であることからわかる。ただし、(14) 式を見ると、賃金率と利潤率の関係は資本財の性質、すなわち資本財価格が $\phi(t)=1$ であるか、$\phi(t)\neq 1$ であるかによって変わることが分かる。

資本財の性質の如何が賃金率に対して如何なる影響を与えるかについては、(13) 式に資本財価格の時間変化率 $\dot{\phi}(t)$ が含まれているため、このままでは検討できない。そこでまず、消費財価格を $p(t)$、資本財価格を $p^I(t)$ と表し、両者の相対価格 $\phi(t)=\dfrac{p^I(t)}{p(t)}$ を時間 t で微分する。

$$\frac{d\phi(t)}{dt}=\dot{\phi}(t)$$

$$=\frac{1}{p(t)}\frac{dp^I(t)}{dt}+\left(-\frac{p^I(t)}{[p(t)]^2}\right)\frac{dp(t)}{dt}$$

$$=\frac{1}{p(t)}\frac{dp^I(t)}{dt}-\frac{p^I(t)}{p(t)}\frac{\dot{p}(t)}{p(t)}$$

$$=\frac{\dot{p}^I(t)}{p(t)}-\phi(t)\frac{\dot{p}(t)}{p(t)} \tag{15}$$

(15) 式の両辺を $\phi(t)$ で割ると、

$$\frac{\dot{\phi}(t)}{\phi(t)}=\frac{1}{\phi(t)}\left\{\frac{\dot{p}^I(t)}{p(t)}-\phi(t)\frac{\dot{p}(t)}{p(t)}\right\}$$

$$=\frac{1}{\phi(t)}\frac{\dot{p}^I(t)}{p(t)}-\frac{\dot{p}(t)}{p(t)} \tag{16}$$

となる。(16) 式を (13) 式に代入すると、

$$w(t)=f[k(t)]-\phi(t)\left\{r(t)+\delta-\left[\frac{1}{\phi(t)}\frac{\dot{p}^I(t)}{p(t)}-\frac{\dot{p}(t)}{p(t)}\right]\right\}k(t)$$

$$=f[k(t)]-\phi(t)\left[r(t)+\delta+\frac{\dot{p}(t)}{p(t)}\right]k(t)+\frac{\dot{p}^I(t)}{p(t)}k(t) \tag{17}$$

が得られる。したがって、(17) 式を $\phi(t)$ で微分すると、

$$\frac{\partial w(t)}{\partial \phi(t)}=-\left[r(t)+\delta+\frac{\dot{p}(t)}{p(t)}\right]k(t) \tag{18}$$

となる。

(18) 式を見ると、資本の可逆性に関する性質が及ぼす賃金率への影響は、以下の３つに場合分けされることが分かる。

① $\dfrac{\dot{p}(t)}{p(t)}>0$ のとき、 $\dfrac{\partial w(t)}{\partial \phi(t)}<0$

： 負の影響

② $\dfrac{\dot{p}(t)}{p(t)}<0$ 、かつ $[r(t)+\delta]>\dfrac{\dot{p}(t)}{p(t)}$ のとき、 $\dfrac{\partial w(t)}{\partial \phi(t)}<0$

： 負の影響

③ $\dfrac{\dot{p}(t)}{p(t)}>0$ 、かつ $[r(t)+\delta]<\dfrac{\dot{p}(t)}{p(t)}$ のとき、 $\dfrac{\partial w(t)}{\partial \phi(t)}>0$

：　　正の影響

2-2. 資本の性質を考慮した *Ramsey Model* の拡張化

分権的経済においては、家計と企業はそれぞれ独立した意思決定主体である。それゆえ、これら2つの経済主体の自由意思に基づく行動の社会的整合性（経済の調和性）を保持するためには、市場の存在が必要となる。政府部門と海外部門を捨象した閉鎖経済を仮定すると、資産の国際的な取引が存在しないため、家計は他の家計との間で資金の貸借はできるものの、均衡では純ローン（資金の貸付）の保有はゼロとなる。また、閉鎖経済の下では、資本はすべて国内で所有されることになる。したがって、均衡では国内の資産と資本は量的に一致する。

永冨（2021）では、家計の資産蓄積方程式と消費に関する動学方程式について、人口の成長と技術進歩という2つの動態的特徴を織り込む形で導出している[6)]。

$$\dot{a}(t) = w(t) + r(t)a(t) - \hat{c}(t)e^{-qt} - (n+q)a(t) \tag{19}$$

$$\dot{\hat{c}}(t) = \hat{c}(t)\frac{1}{\hat{\varepsilon}(t)}[r(t) - \rho] \tag{20}$$

(19) 式は資産の蓄積方程式、(20) 式は消費の動学方程式である[7)]。ここで、$a(t)$ は効率労働単位で評価した資産、$\dot{a}(t)$ は $a(t)$ の時間微分、$\hat{c}$ は1人当たりで評価した消費量、q は技術進歩率、n は人口の成長率、$\hat{\varepsilon}$ は消費の変化に関する限界効用の弾力性、ρ は主観的割引率である[8)]。分権的閉鎖経済においては、効率労働1単位当たりの資本 $k(t)$ と効率労働1単位当たりの資産 $a(t)$ は一致 $a(t) = k(t)$ するから、$\dot{a}(t) = \dot{k}(t)$ についても成立する。したがって、(19) 式は

$$\dot{k}(t) = w(t) + r(t)k(t) - \hat{c}(t)e^{-qt} - (n+q)k(t) \tag{21}$$

と変換することができる。

(8) 式と (12) 式を (21) 式に代入すると、

$$\dot{k}(t)=f[k(t)]-f'[k(t)]k(t)+\left\{\frac{1}{\phi(t)}f'[k(t)]-\delta+\left[\frac{\dot{\phi}(t)}{\phi(t)}\right]\right\}k(t)$$

$$-\hat{c}(t)e^{-qt}-(n+q)k(t)$$

$$=f[k(t)]-\left[1-\frac{1}{\phi(t)}\right]f'[k(t)]k(t)-\hat{c}(t)e^{-qt}$$

$$-\left\{n+q+\delta-\left[\frac{\dot{\phi}(t)}{\phi(t)}\right]\right\}k(t) \tag{22}$$

が得られる。

また、消費に関する動学方程式 (20) 式に (8) 式を代入すると、

$$\dot{\hat{c}}(t)=\hat{c}(t)\frac{1}{\hat{\varepsilon}(t)}\left\{\left\{\frac{1}{\phi(t)}f'[k(t)]-\delta+\left[\frac{\dot{\phi}(t)}{\phi(t)}\right]\right\}-\rho\right\}$$

$$=\hat{c}(t)\frac{1}{\hat{\varepsilon}(t)}\left\{\frac{1}{\phi(t)}f'[k(t)]-\left\{\delta+\rho-\left[\frac{\dot{\phi}(t)}{\phi(t)}\right]\right\}\right\} \tag{23}$$

が得られる。

以上、導出した (22) 式および (23) 式の 2 本の連立微分方程式体系として表されるマクロ経済 *Model* が分権化された閉鎖経済における資本財の可逆的性質を考慮した *Ramsey Model* である。

【資本の動学方程式】

$$\dot{k}(t)=f[k(t)]-\left[1-\frac{1}{\phi(t)}\right]f'[k(t)]k(t)-\hat{c}(t)e^{-qt}$$

$$-\left\{n+q+\delta-\left[\frac{\dot{\phi}(t)}{\phi(t)}\right]\right\}k(t) \tag{22}$$

【消費の動学方程式】

$$\dot{\hat{c}}(t)=\hat{c}(t)\frac{1}{\hat{\varepsilon}(t)}\left\{\frac{1}{\phi(t)}f'[k(t)]-\left\{\delta+\rho-\left[\frac{\dot{\phi}(t)}{\phi(t)}\right]\right\}\right\} \tag{23}$$

なお、資本財が完全に可逆的である場合には、$\phi=1$、および $\frac{\dot{\phi}}{\phi}=0$ であるから、*Ramsey Model* は、

【資本の動学方程式】

$$\dot{k}(t)=f[k(t)]-\hat{c}(t)e^{-qt}-(n+q+\delta)k(t) \tag{24}$$

【消費の動学方程式】

$$\dot{\hat{c}}\ (t)=\hat{c}(t)\frac{1}{\hat{\varepsilon}(t)}\{f'[k(t)]-\delta-\rho\} \tag{25}$$

となる。

3. 投資の調整費用に関する問題

3-1. 企業の動学的最適化行動

Ramsey Model の拡張化に関する投資の２つ目の問題として、調整費用（*Adjustment Cost*）について議論する。調整費用には、大きく分けて２つの考え方がある。１つは、資本設備を設置する際に生産要素の一部を使用するという点に着目した考え方である。この考え方はさらに、資本設置の際に労働等の可変的生産要素の投入も必要になるというケースとならないというケースに分けることができる。もう１つの考え方は、投資の資本化過程において時間の経過を考慮するというものである。投資の資本化にはある程度の時間的伸縮性が存在し、その時間を短縮しようとすればするほど、より多くの投資財の投入が必要となり、それだけ割増コストがかかるというものであ

る。

本稿では、後者の考え方に依拠した調整費用モデルを想定する[9)]。投資量に応じて逓増する調整費用が発生するとき、調整費用の存在は投資の動学的な時間経路に影響を与える。つまり、調整費用がかかる場合、これまでのような静学的最適化の枠組み中では問題を解くことができないということである。したがって、本節では調整費用の影響を動学的最適化の枠組みの中で考えることにする。

企業は、有限の計画期間中における利潤流列の割引現在価値の総和を最大化することを目的に行動すると仮定する。なお、本稿では計画期間の初期を 0 期、終期を T 期とする。任意の t 時点（$t>0$）における代表的企業の利潤を初期時点（$t=0$）で評価する場合、連続時間モデルの中では割引率（r）を用いて、

$$\Pi(0)=e^{-rt}\Pi(t) \tag{26}$$

と表すことができる。なお、ここでは割引率（利子率）r は一定と仮定する。この初期時点で評価した利潤 $\Pi(0)$ の流列を、0 期から T 期まですべての期について加算すると、当該企業の計画期間中における利潤の割引現在価値の総和、すなわち、0 期で評価した計画期間中の企業価値 $V(0)$ を求めることができる。

$$V(0)=\int_{t=0}^{T}\Pi(0)dt$$

$$=\int_{t=0}^{T}e^{-rt}\Pi(t)dt \tag{27}$$

本節では、資本の蓄積過程における調整費用の影響を分析することを目的としているため、資本ストックは企業の投資行動によって蓄積されるという枠組みで考えることにする。投資量の増加に伴って調整費用が逓増する場合、調整費用関数 $\psi\left[\frac{I(t)}{K(t)}\right]$ に求められる性質は、$\psi(0)=0$、$\frac{\partial\psi}{\partial I}>0$、$\frac{\partial^2\psi}{\partial I^2}$

>0 である。なお、雇用にはこうした調整費用は生じないものとする。

$$\text{投資の調整費用} = I(t)\left\{1+\psi\left[\frac{I(t)}{K(t)}\right]\right\} \tag{28}$$

(28) 式では、投資の調整費用が減価償却を差し引いた純投資にではなく、粗投資 (I) の量に依存すると定式化されている[10)]。それは、調整費用は資本設備を購入した後の設置費用や設備を運用するためにかかる追加的な費用と定義されるため、調整費用がゼロ $\psi(0)=0$ になる時というのは、粗投資がゼロの時、つまり新規投資がまったく行われない時に限られるからである。また、初期時点において、企業は既に何らかの資本を所有（$K(0)>0$）していると仮定する。

利潤は、収入（生産量＝販売量）から生産要素（資本と労働）への支払いと投資の調整費用を差し引いた残額として与えられる。したがって、(28) 式を考慮すると、利潤関数は、

$$\Pi(t) = F[K(t), Q(t)L(t)] - w(t)Q(t)L(t) - I(t)\left\{1+\psi\left[\frac{I(t)}{K(t)}\right]\right\} \tag{29}$$

と記述される。

企業の目的は、資本の初期値制約のもとで、資本蓄積方程式に依りながら利潤の最大化を目指すべく、労働と投資の最適時間経路を選択することである。

以上から、企業の動学的最適化問題を以下のように設定する。

$$V(0) = \int_{t=0}^{T} e^{-rt}\left\{F[K(t), Q(t)L(t)] - w(t)Q(t)L(t) - I(t)\left\{1+\psi\left[\frac{I(t)}{K(t)}\right]\right\}\right\}dt \tag{30}$$

$$\text{s.t.} \quad \dot{k}(t) = I(t) - \delta K(t) \tag{31}$$

$$K(0) = K_0 > 0 \tag{32}$$

$$K(T)e^{-rT} \geq 0 \tag{33}$$

ここで、割引率（利子率）r は、計画期間の全期、すなわち 0 期から T 期ま

での期間中において一定と仮定する。(31) 式は、資本蓄積方程式である。なお、物理的償却率 δ も同期間中において一定と仮定する。(32) 式は、初期時点（$t=0$）において一定量の資本が既に存在していることを示す初期値制約である。(33) 式は、計画期間の終期（$t=T$）における資本の割引現在価値が非負であることを要請する No-Ponzi Game 条件（不等式制約）である。

上記の動学的最適化問題は、ラグランジュ未定乗数法を用いて解くことができる。資本蓄積に関する *Lagrange* 乗数を $\mu(t)$、終期の *No-Ponzi Game* 条件に関する *Lagrange* 乗数を $\xi(T)$ として、*Lagrange* 関数 $\mathcal{L}(t)$ を以下のように設定する。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) = & \int_{t=0}^{T} e^{-rt}\left\{F[K(t), Q(t)L(t)] - w(t)Q(t)L(t) - I(t)\left\{1+\psi\left[\frac{I(t)}{K(t)}\right]\right\}\right\}dt \\
& + \int_{t=0}^{T} e^{-rt}\{\mu(t)[I(t) - \delta K(t) - \dot{K}(t)]\}\,dt \\
& + \xi(T)[K(T)e^{-rT}] \\
= & \int_{t=0}^{T} e^{-rt}\left\{Q(t)L(t)\{f[k(t)] - w(t)\} - I(t)\left\{1+\psi\left[\frac{I(t)}{K(t)}\right]\right\}\right. \\
& \left. + \mu(t)[I(t) - \delta K(t)]\right\}dt \\
& - \int_{t=0}^{T} e^{-rt}[\mu(t)\dot{K}(t)]dt \\
& + \xi(T)[K(T)e^{-rT}] \qquad (34)
\end{aligned}
$$

なお、(34) 式において

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(t) = e^{-rt} & \left\{Q(t)L(t)\{f[k(t)] - w(t)\} - I(t)\left\{1+\psi\left[\frac{I(t)}{K(t)}\right]\right\}\right. \\
& \left. + \mu(t)[I(t) - \delta K(t)]\right\}
\end{aligned}
$$

は、*Hamiltonian* である。

(34) 式から、効率労働 $Q(t)L(t)$ および投資 $I(t)$ に関する最適化のための 1 階の条件をそれぞれ求めると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}(t)}{\partial Q(t)L(t)} &= e^{-rt}\left\{\{f[k(t)]-w(t)\}+Q(t)L(t)f'[k(t)]\frac{\partial k(t)}{\partial Q(t)L(t)}\right\}\\ &=\{f[k(t)]-w(t)\}+Q(t)L(t)f'[k(t)]\left(-\frac{k(t)}{[Q(t)L(t)]^2}\right)\\ &=f[k(t)]-w(t)-f'[k(t)]k(t)\\ &=\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial Q(t)L(t)}=0\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}(t)}{\partial I(t)} &= e^{-rt}\left\{-\left\{1+\psi\left[\frac{I(t)}{K(t)}\right]\right\}-I(t)\psi'\left[\frac{I(t)}{K(t)}\right]\frac{1}{K(t)}+\mu(t)\right\}\\ &=-\left\{1+\psi\left[\frac{I(t)}{K(t)}\right]\right\}-\left[\frac{I(t)}{K(t)}\right]\psi'\left[\frac{I(t)}{K(t)}\right]+\mu(t)\\ &=\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial I(t)}=0\end{aligned} \tag{36}$$

となる。

なお、(34) 式には資本 $K(t)$ に関して時間で微分した $\dot{K}(t)$ が含まれているため、このままでは資本 $K(t)$ については 1 階の条件を求めることができない。そこで、資本 $K(t)$ の時間微分 $\dot{K}(t)$ を消去するために以下の式変形を行う。

まず、$\mu(t)e^{-rt}=\theta(t)$ と置き、$\theta(t)K(t)$ を時間 t で微分する。

$$\begin{aligned}\frac{d\theta(t)K(t)}{dt} &= \frac{d\theta(t)}{dt}K(t)+\theta(t)\frac{dK(t)}{dt}\\ &=\dot{\theta}(t)K(t)+\theta(t)\dot{K}(t)\end{aligned} \tag{37}$$

(37) 式を $\theta(t)\dot{K}(t)$ について整理すると、

$$\theta(t)\dot{K}(t) = \frac{d\theta(t)K(t)}{dt} - \dot{\theta}(t)K(t) \tag{38}$$

となるから、(38) 式を (34) 式の第 3 段に代入すると、

$$\begin{aligned}\int_{t=0}^{T}\theta(t)\dot{K}(t)\,dt &= \int_{t=0}^{T}\frac{d\theta(t)K(t)}{dt}\,dt - \int_{t=0}^{T}\dot{\theta}(t)K(t)\,dt \\ &= [\theta(t)K(t)]_0^T - \int_{t=0}^{T}\dot{\theta}(t)K(t)\,dt \\ &= \theta(T)K(T) - \theta(0)K(0) - \int_{t=0}^{T}\dot{\theta}(t)K(t)\,dt \end{aligned}\tag{39}$$

が得られる。(39) 式を考慮すると、$\dot{K}(t)$ を消去した新たな *Lagrange* 関数 $\tilde{\mathcal{L}}(t)$ を設定することができる。

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}(t) = &\int_{t=0}^{T} e^{-rt}\left\{Q(t)L(t)\{f[k(t)] - w(t)\} - I(t)\left\{1 + \psi\left[\frac{I(t)}{K(t)}\right]\right\}\right. \\ &\left. + \mu(t)[I(t) - \delta K(t)]\right\}dt - \theta(T)K(T) + \theta(0)K(0) + \int_{t=0}^{T}\dot{\theta}(t)K(t)\,dt \\ &+ \xi(T)[K(T)e^{-rT}] \\ = &\int_{t=0}^{T} e^{-rt}\left\{Q(t)L(t)\{f[k(t)] - w(t)\} - I(t)\left\{1 + \psi\left[\frac{I(t)}{K(t)}\right]\right\}\right. \\ &\left. + \mu(t)[I(t) - \delta K(t)]\right\}dt + \int_{t=0}^{T}\dot{\theta}(t)K(t)\,dt \\ &- \theta(T)K(T) + \xi(T)[K(T)e^{-rT}] \\ &+ \theta(0)K(0) \end{aligned}\tag{40}$$

なお、(40) 式において

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(t) = e^{-rt}&\left\{Q(t)L(t)\{f[k(t)] - w(t)\} - I(t)\left\{1 + \psi\left[\frac{I(t)}{K(t)}\right]\right\}\right. \\ &\left. + \mu(t)[I(t) - \delta K(t)]\right\}\end{aligned}$$

は、*Hamiltonian* である。

資本蓄積制約に付された *Lagrange* 乗数 $\mu(t)$ は、経済学的には資本財の影の価格（*Shadow Price*）と解釈することができる。つまり、$\dot{\theta}(t)K(t)$ は時価で評価された資本財価格の変動を表す。したがって、積分項である (40) 式の 2 段目の項 $\int_{t=0}^{T}\dot{\theta}(t)K(t)dt$ は計画期間中に実現する資本のキャピタル・ゲイン、もしくはキャピタル・ロスの総額と解釈することができる。

(40) 式から、資本 $K(t)$ に関する最適化のための 1 階の条件を求めると、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}(t)}{\partial K(t)} = e^{-rt}\Biggl\{ & Q(t)L(t)f'[k(t)]\frac{1}{Q(t)L(t)} \\
& -I(t)\psi'\left[\frac{I(t)}{K(t)}\right]\left\{-\frac{I(t)}{[K(t)]^2}\right\}-\mu(t)\delta\Biggr\}+\dot{\theta}(t) \\
= e^{-rt}&\left\{f'[k(t)]+\left[\frac{I(t)}{K(t)}\right]^2\psi'\left[\frac{I(t)}{K(t)}\right]-\mu(t)\delta\right\}+\dot{\theta}(t) \\
= \frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial K(t)}&+\dot{\theta}(t)=0
\end{aligned} \tag{41}
$$

となる。

ここで、$\dot{\theta}(t)$ について考える。$\theta(t)$ は $\theta(t)=\mu(t)e^{-rt}$ と定義した変数であったから、$\theta(t)$ を時間微分すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{d\theta(t)}{dt} &= \dot{\theta}(t) \\
&= \dot{\mu}(t)e^{-rt}-\mu(t)re^{-rt}
\end{aligned} \tag{42}
$$

となる。したがって、(42) 式を $\dot{\mu}(t)$ について解くと、

$$
\dot{\mu}(t)=\dot{\theta}(t)e^{rt}+\mu(t)r \tag{43}
$$

が得られる。

ここで、(41) 式の $I(t)$ と $K(t)$ を効率労働 $Q(t)L(t)$ で割って効率労働単位に変更し、それを $\dot{\theta}(t)$ について解くと、

$$\dot{\theta}(t) = -e^{-rt}\left\{f'[k(t)] + \left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]^2 \psi'\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right] - \mu(t)\delta\right\} \tag{44}$$

となる。(44) 式を (43) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}\dot{\mu}(t) &= -e^{-rt}\left\{f'[k(t)] + \left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]^2 \psi'\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right] - \mu(t)\delta\right\} e^{-rt} + \mu(t)r \\ &= -\left\{f'[k(t)] + \left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]^2 \psi'\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]\right\} + \mu(t)\delta + \mu(t)r \\ &= (r+\delta)\,\mu(t) - \left\{f'[k(t)] + \left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]^2 \psi'\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]\right\} \end{aligned} \tag{45}$$

が得られる。

(45) 式を割引率について解くと、

$$r = \frac{1}{\mu(t)} = \left\{f'[k(t)] + \left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]^2 \psi'\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]\right\} - \delta + \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} \tag{46}$$

となる。

また、(35) 式から賃金率は、

$$w(t) = f[k(t)] - f'[k(t)]k(t) \tag{47}$$

となる。

ここで、計画期間の終期 ($t = T$) 制約について考える。(40) 式から、$K(T)$ に関する最適化のための 1 階の条件を求めると、

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}(t)}{\partial K(T)} = -\theta(T) + \xi(T)e^{-rT} = 0$$

となるから、

$$\xi(T)e^{-rT} = \theta(T) \tag{48}$$

が得られる。

No-Ponzi Game 条件の (33) 式は不等式制約であるから、相補条件は、

$$\xi(T)[K(T)e^{-rT}-0]=\xi(T)e^{-rT}K(T)=0 \tag{49}$$

である。(48) 式を (49) 式に代入すると、

$$\theta(T)K(t)=0 \tag{50}$$

が得られる。(50) 式は横断性条件（*Transversarity Condition*）である。この横断性条件は、計画期間中における相補条件と解釈される。(50) 式を満たすためには、最適値にアスタリスク（*）を付けて表せば、

$$\theta^*(T)>0 \quad のとき \quad K^*(T)=0 \quad または \quad K^*(T)\geq 0 \quad のとき \quad \theta^*(T)=0$$

のいずれかが必要である。

3-2. 投資の調整費用を導入した *Ramsey Model* の拡張化

政府部門と海外部門を捨象した分権的閉鎖経済における資本蓄積方程式は (21) 式であった。(21) 式に (46) 式と (47) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}\dot{k}(t)=&f[k(t)]-f'[k(t)]k(t)\\&+\left\{\frac{1}{\mu(t)}\left\{f'[k(t)]+\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]^2\psi'\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]\right\}-\delta+\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}\right\}k(t)\\&-\hat{c}(t)e^{-qt}-(n+q)k(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&f[k(t)]-f'[k(t)]k(t)+\frac{1}{\mu(t)}f'[k(t)]k(t)\\&+\frac{1}{\mu(t)}\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]^2\psi'\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]k(t)-\hat{c}(t)e^{-qt}-\left(n+q+\delta-\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}\right)k(t)\end{aligned}$$

$$=f[k(t)]-\left[1-\frac{1}{\mu(t)}\right]f'[k(t)]k(t)$$

$$
+\frac{1}{\mu(t)}\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]^2\psi'\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]k(t)-\hat{c}(t)e^{-qt}-\left[n+q+\delta-\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}\right]k(t) \tag{51}
$$

が得られる。

同様に、分権的閉鎖経済の消費に関する動学方程式は (20) 式であった。(20) 式に (46) 式を代入すると

$$
\begin{aligned}
\dot{c}(t)&=\hat{c}(t)\frac{1}{\hat{\varepsilon}(t)}\left\{\left\{\frac{1}{\mu(t)}\left\{f'[k(t)]+\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]^2\psi'\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]\right\}-\delta+\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}\right\}-\rho\right\}\\
&=\hat{c}(t)\frac{1}{\hat{\varepsilon}(t)}\left\{\frac{1}{\mu(t)}\left\{f'[k(t)]+\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]^2\psi'\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]\right\}-\left[\delta+\rho-\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}\right]\right\}
\end{aligned} \tag{52}
$$

が得られる。

以上、導出した (51) 式および (52) 式の 2 本の連立微分方程式体系として表されるマクロ経済 *Model* が分権化された閉鎖経済における投資の調整費用を考慮した *Ramsey Model* である。

【資本の動学方程式】

$$
\begin{aligned}
\dot{k}(t)&=f[k(t)]-\left[1-\frac{1}{\mu(t)}\right]f'[k(t)]k(t)\\
&\quad+\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]^2\psi'\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]k(t)-\hat{c}(t)e^{-qt}-\left(n+q+\delta-\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}\right)k(t)
\end{aligned} \tag{51}
$$

【消費の動学方程式】

$$
\dot{c}(t)=\hat{c}(t)\frac{1}{\hat{\varepsilon}(t)}\left\{\frac{1}{\mu(t)}\left\{f'[k(t)]+\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]^2\psi'\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]\right\}-\left[\delta+\rho-\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}\right]\right\} \tag{52}
$$

4. 議論および結論

本稿では、*Ramsey Model* の拡張化について、Barro and Sala-i-Martin (2004) の議論の中から投資に関する 2 つの問題を取り上げて理論的な整理を行った。資本財の可逆的性質に関する問題は投資の時間経路に影響を与えないため、企業は各時点において静学的利潤最大化行動を順次解いていけばよく、動学的な解は静学的な解の集合（系列）になることを示した。

他方、投資の調整費用の存在は投資の動学的な時間経路に影響を与えるため、静学的な最適化の枠組みではなく、動学的最適化の枠組みの中で議論する必要があることを示した。

資本財価格の変動の影響の経路については、どちらのモデルも同じ構造をしていること、資本財価格の変動は資本の蓄積行動と消費行動に対してともにプラスの影響を与えることなどが分かった。また、投資量に応じて逓増する調整費用が存在すると、それは投資率の二乗と調整費用の変化率の積という形で資本蓄積行動および消費行動の双方に対して増加的な影響を与えることも分かった[11)]。

ところで、投資理論においては資本財の可逆的性質と不確実性の影響に関する研究も行われている[12)]。たとえば、Caballero (1991) や Bertola (1998) の研究では投資が不可逆的な性質を有している場合であっても、規模に関して収穫一定の生産関数を有する完全競争企業の場合には、不確実性の増大は投資の増加要因として作用すること、逆に企業が完全競争企業でないか、あるいは規模に関して収穫逓減的であるかのいずれか、またはその両方の場合には不確実性の増大は不可逆的投資に対して抑制的な要因となることが示されている。

また、McDonald and Siegel (1986) や Dixit and Pindyck (1994) では、投資が不可逆的である場合の投資基準について、および純現在価値基準による投資基準の修正について議論が行われている。それらの研究では、事業価値

（投資収益）が投資 Option の価値をも加えた総投資コストを上回らなければ投資は実施されないという条件が示されている。これは、投資が不可逆的であると不確実性の増大は投資を実施するかどうかの採算ハードルを引き上げてしまうため、投資決定（投資量）に対してマイナスの影響を与えるということである。

以上の研究では、投資は完全に不可逆的であると仮定されている。ところが、種々の産業の資本を見てみると、そこには可逆的な性質を有する資本財、不可逆的な性質を有する資本財という両極の他に、部分的な可逆性を有する資本財も存在している。それゆえ、近年の投資理論では資本の可逆性の程度に何らかの限定性を加えた議論も行われている。Abel and Everly（1994、1996）、Abel, Eberly and Pindyck（1996）などはそうした研究の一例である。本研究は、こうした議論に沿った研究と位置づけることができる。Abel, Everly and Pindyck（1996）は完全な可逆性を仮定すると、正の投資が行われる領域と負の投資が行われる領域の 2 つが現れること、完全な不可逆性を仮定すると正の投資が行われる領域と投資が行われない領域の 2 つが現れること、そして限定的な可逆性を仮定すると正の投資が行われる領域、負の投資が行われる領域、投資が行われない領域の 3 つが現れることを明らかにしている。

本稿では限定的な可逆性、完全競争企業、生産関数の一次同次性を仮定して資本財価格の変動が投資行動に正の影響を与えるという結論を導いたが、これまで見てきたように資本の性質による投資行動の影響は必ずしも正であるとは限らない。今後はこうした点に関する研究をさらに深めていきたいと考えている。

また、*Ramsey Model* の拡張化については、本稿と前稿で行った投資の調整費用の問題や税制の問題の他に、人的資本の蓄積に関する調整費用の問題や時間的視野の有限性に関する問題、あるいは閉鎖経済という環境制約を緩めて海外部門を考慮する場合の問題についても議論が行われている。こうした Model の拡張化についても今後の研究課題としたいと考えている。

5. 数学補論

Barro and Sala-i-Martin（2004）では、資本の調整費用を含む動学的モデルから平均 Q（*Marginal Q*）と限界 Q（*Average Q*）の一致条件を導いている。数学補論では、そうした一致性の条件の導出過程を詳細に示すことにする[13)]。

まず、資本財価値 $\mu(t)K(t)$ について考える。ここで、μ(t) は設置資本のシャドープライス（*Shadow Price*）、K(t) は資本を表す。$\mu(t)K(t)$ を時間 t で微分すると、

$$\frac{d\mu(t)K(t)}{dt} = \dot{\mu}(t)K(t) + \mu(t)\dot{K}(t) \tag{5-1}$$

となる。(5-1) 式の $\dot{\mu}(t)$ に設置資本の *Shadow Price* の時間微分 (45) 式を、また $\dot{K}(t)$ に資本蓄積方程式 (31) 式を、それぞれ代入する。すると、効率労働 $Q(t)L(t)$ で割った $\dot{\mu}(t)K(t) + \mu(t)\dot{K}(t)$ は、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{Q(t)L(t)}\left[\dot{\mu}(t)K(t) + \mu(t)\dot{K}(t)\right] = \\
&\quad \left\{(r+\delta)\,\mu(t) - \left\{f'[k(t)] + \left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]^2 \psi'\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]\right\}\right\}\frac{K(t)}{Q(t)L(t)} \\
&\quad +\mu(t)\frac{1}{Q(t)L(t)}[I(t) - \delta K(t)] \\
&\quad = r\mu(t)k(\mathrm{t}) - \left\{f'[k(t)] + \left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]^2 \psi'\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]\right\}k(t) \\
&\quad +\mu(t)\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]k(t)
\end{aligned} \tag{5-2}$$

と表すことができる。ただし、第２段目の第３項は $\left[\dfrac{i(t)}{k(t)}\right]$ の形になるよう

に $1=\dfrac{k(t)}{k(t)}$ を掛けて変形している。

(36) 式を効率労働単位に変換すると、

$$\mu(t)=1+\psi\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]+\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]\psi'\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right] \tag{5-3}$$

となる。(5-3) 式を (5-2) 式の第 3 項に代入して書き換えると、

$$\dot{\mu}(t)K(t)+\mu(t)\dot{K}(t)=$$

$$r\mu(t)K(t)-Q(t)L(t)\left\{f'[k(t)]+\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]^2\psi'\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]\right\}k(t)$$

$$+Q(t)L(t)\left\{1+\psi\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]+\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]\psi'\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]\right\}\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]k(t)$$

$$=r\mu(t)K(t)-Q(t)L(t)\left\{f'[k(t)]\right.$$

$$\left.-\left\{1+\psi\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]\right\}\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]\right\}k(t)$$

$$=r\mu(t)K(t)-Q(t)L(t)\left\{f'[k(t)]k(t)-i(t)\left\{1+\psi\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]\right\}\right\} \tag{5-4}$$

が得られる。(35) 式より、$f'[k(t)]k(t)=f[k(t)]-w(t)$ であるから、これを (5-4) 式に代入すると、

$$\dot{\mu}(t)K(t)+\mu(t)\dot{K}(t)=r\mu(t)K(t)$$

$$-Q(t)L(t))\left\{f[k(t)]-w(t)-i(t)\left\{1+\psi\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]\right\}\right\} \tag{5-5}$$

となる。

(5‒5) 式において、$\mathrm{M}=\mu(t)K(t)$、$\mathrm{N}=Q(t)L(t)\left\{[k(t)]-w(t)-i(t)\left\{1+\psi\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]\right\}\right\}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\frac{dM(t)}{dt}&=\dot{M}\\&=\dot{\mu}(t)K(t)+\mu(t)\dot{K}(t)\end{aligned}$$

であるから、(5‒5) 式は、

$$\dot{M}(t)-rM(t)=-N \tag{5‒6}$$

と表すことができる。(5‒6) 式の両辺に積分因子 e^{-rt} を掛けると、

$$\dot{M}(t)e^{-rt}-rM(t)e^{-rt}=-Ne^{-rt} \tag{5‒7}$$

となるから、(5‒7) 式の両辺を積分すると、

$$\int_{t=0}^{\infty}[\dot{M}(t)e^{-rt}-rM(t)e^{-rt}]dt=-\int_{t=0}^{\infty}Ne^{-rt} \tag{5-8}$$

となる。左辺は $M(t)e^{-rt}\Big|_0^{\infty}$ となるから、(5‒8) 式は、

$$M(t)e^{-rt}\Big|_0^{\infty}=-\int_{t=0}^{\infty}Ne^{-rt}$$

より、

$$\begin{aligned}Me^{-\infty}-Me^{0}=-M&\\&=-\int_{t=0}^{\infty}Ne^{-rt}\\&=-\int_{t=0}^{\infty}e^{-rt}\,Q(t)L(t)\left\{f[k(t)]-w(t)-i(t)\left\{1+\psi\left[\frac{i(t)}{k(t)}\right]\right\}\right\}dt\end{aligned} \tag{5‒9}$$

となる。(5-9) 式の右辺は、効率労働単位で表記した (30) 式の $V(0)$ である。したがって、初期時点で評価すると、

$$-M(0)=-V(0)$$

であり、$M(0)=\mu(0)K(0)$ であるから、

$$\mu(0)K(0)=V(0)$$

が得られる。

以上から、

$$\mu(0)=\frac{V(0)}{K(0)} \tag{5-10}$$

を導くことができる。

(5-10) 式において、$\mu(0)$ は設置資本のシャドープライス（*Shadow Price*）、つまり限界 Q（*Margeinal Q*）である。右辺の $\frac{V(0)}{K(0)}$ は平均 Q（*Average Q*）である。したがって、本稿のモデルにおいても限界 Q と平均 Q の一致性の条件を導き出すことができる。

注

1）本研究のモデルの導出、ならびに投資の調整費用の問題に関する議論の詳細については、Barro, R. J. and X. Sala-i-Martin（2004）の Chapter2 および Chapter3 を参照せよ。

2）本稿では、*Irreversible* を「不可逆的」と訳して用いているが、これを「非可逆的」と訳す場合も散見される。意味する内容はどちらも同じである。

3）Barro, R. J. and X. Sala-i-Martin（2004）にしたがって本稿でも同じ設定で議論を行っているが、本論でも指摘した通り、企業が資本を保有し、家計は当該企業の株式を所有しているという枠組みにモデルの設定を変更しても議論の本質は何ら変わらない。

4）本研究では、貨幣の存在しない実物経済を仮定している。ゆえに、価格の絶対水準は議論上問題にはならない。これは、最終生産物の価格を 1 に基準化して議論していると考えることもできる。また、最終生産物については 1 種類と仮定している。

ゆえに、資本のレンタル価格は財の量的単位で測られる実質利子率となる。同様に、賃金率も財の量的単位で測られる実質賃金率である。

5）近年、わが国では成果主義あるいは能力主義に基づく賃金設定方式が傾向性として広がりを見せている。これは、労働者の生産性が変化すると労働者の稼得する賃金の量が影響を受けることを意味する。生産性（技術水準）を $Q(t)$ とすると、労働者は自らが投下した労働量 $L(t)$ に対して生産性を加味した賃金、すなわち $w(t)Q(t)L(t)$ を受け取る。つまり、賃金率 $w(t)$ と投下労働量 $L(t)$ が一定であったとしても生産性 $Q(t)$ が上昇すると、労働者の稼得する賃金の量（財の量的単位で表される賃金量）$w(t)Q(t)L(t)$ は増加するということである。

　生産性 $Q(t)$ の向上した労働力というのは、個人にとっても、また社会にとっても重要な人的資源である。効率労働単位 $Q(t)L(t)$ で考えるということの意義は、単なる時間量としての労働投入量という観点からではなく、向上させえた労働資源の価値を積極的に評価し、そうした観点から社会（変数）を相対的に評価しようという点（意思）に求められる。

6）人口が指数的に増加する社会では、初期時点の人口を $L(0)=1$、人口の成長率を $n\times100\%$ とすると、任意の t 時点の人口 $L(t)$ は、$L(t)=e^{nt}$ と表すことができる。同様に、技術水準が指数的に成長する場合、初期時点の技術水準（労働生産性）を $Q(0)=1$、技術進歩率を $q\times100\%$ とすると、任意の t 時点の技術水準 $Q(t)$ は、$Q(t)=e^{qt}$ と表すことができる。

　$L(t)=e^{nt}$ の両辺の対数をとると、$\ln L(t)=nt\ln e=nt$ となる。両辺を時間 t で微分すると、$\dfrac{\dot{L}(t)}{L(t)}=n$ となる。他方、$Q(t)=e^{qt}$ の両辺の対数をとると、$\ln Q(t)=qt\ln e=qt$ となる。両辺を時間 t で微分すると、$\dfrac{\dot{Q}(t)}{Q(t)}=q$ となる。つまり、対数関数の時間微分は成長率を表す。(19) 式の n と q はこのように定義された成長率（変化率）である。

7）消費については1人当たり単位で評価し、それ以外の変数については効率労働単位で評価している。これは、消費者理論の出発点である効用関数が1人当たり消費量という形で定式化されているからにほかならない。消費者の効用はあくまでも個人の消費量に依存するのであって、個人の効率性の向上によって消費量が増えて、それによって効用が増加するのではない。効率労働単位で表記された消費と1人当たり単位で表記された消費との関係についての議論の詳細は、永冨（2021）の (12) 式および（同）補論を参照されたい。

8）消費の変化に関する限界効用の弾力性 $\hat{\varepsilon}(t)$ は、

$$\hat{\varepsilon}(t)=-\frac{\dfrac{du'[\hat{c}(t)]}{u'[\hat{c}(t)]}}{\dfrac{d\hat{c}(t)}{\hat{c}(t)}}$$

$$= -\frac{1}{u'[\hat{c}(t)]}\cdot\frac{du'[\hat{c}(t)]}{d\hat{c}(t)}\cdot\hat{c}(t)$$

$$= -\frac{1}{u'[\hat{c}(t)]}\cdot u''[\hat{c}(t)]\cdot\hat{c}(t)$$

$$= -\frac{u''[\hat{c}(t)]\hat{c}(t)}{u'[\hat{c}(t)]}$$

と定義される。ここで、$\hat{c}$ は一人当たり消費量、$u'[\hat{c}(t)]$ と $u''[\hat{c}(t)]$ はそれぞれ効用関数の 1 階の微分と 2 階の微分である。

9） 本研究で踏襲した調整費用に関する 2 つ目の考え方に依拠した初期の研究には、Uzawa（1969）、Hayashi（1982）等がある。また、1 つ目の考え方に依拠した初期の研究には、Lucas（1967）、Gould（1968）等がある。

10） 調整費用の関数形は、Barro, R. J. and X. Sala-i-Martin（2004）に依拠している。

11） 少し時間が経っているが、2006 年にわれわれは「東証一部上場製造業企業の投資決定等に関する実態調査」（明治大学社会科学研究所の総合研究「行動経済学の理論と実証」の一環として行ったもの。3 年間のプロジェクトに対して多大な資金援助を受けた。改めて深甚の謝意を表する。）を実施している。その中で、調整費用のためのコストを投資実施の際にどの程度留意しているかについての質問をしている。それによると、5 段階評価で「常に」と「大抵」と回答した企業は全体の 29.5%、逆に「いいえ」と「稀に」と回答した企業は全体の 46.0% であった。本調査の詳細については、永冨（2008、2010）を参照されたい。

12） 資本財の可逆性と不確実性の連関性に関する研究の詳細については、永冨（2011a、2011b、2012）等を参照されたい。

13） Hayashi（1982）では、財は同質、生産関数は規模に関して収穫一定、株式市場は効率的といった条件が満たされる下で、平均 Q と限界 Q の一致条件を導いている。

References

Abel, A. B. and J. C. Eberly（1994）, “A Unified Model of Investment under Uncertainty,” *American Economic Review*, 84, pp. 1369-1384.

Abel, A. B. and J. C. Eberly（1996）, “Optimal Investment with Costly Reversibility,” *Review of Economic Studies*, 63, pp. 581-593.

Abel, A. B., A. K. Dixit, J. C. Eberly and R. S. Pindyck（1996）, “Options, the Value of Capital, and Investment,” *Quarterly Journal of Economics*, 111, pp. 753-777.

Abel, A. B. and J. C. Eberly（1999）, “The Effects of Irreversibility and Uncertainty on Capital Accumulation,” *Journal of Monetary Economics*, 44, pp. 339-377.

Acemogle, D.（2009）, *Introduction to Modern Economic Growth*, Princeton University Press.

Arrow. K. J. and M. Kurz（1970）, “Optimal Growth with Irreversible Investment in a

Ramsey Model," *Econometrica*, 38, pp. 331-344.

Barro, R. J. (1990), "The Stock Marlet and Investment," *Review of Financial Studies*, 3, pp. 115-130.

Barro, R. J. and X. Sala-i-Martin (2004), *Economic Growth* 2nd edition, MIT Press.

Bertola, G. (1998), "Irreversible Investment," *Research in Economics*, 52, pp. 3-37.

Bertola. G. and R. Caballero (1994), "Irreversibility and Aggregate Investment," *Review of Economic Studies*, 61, pp. 223-246.

Blanchard, O. J. and S. Fischer (1989), *Lectures on Macroeconomics*, MIT Press.

Blanchard, O. J., C. Rhee, and L. H. Summers (1993), "The Stock Market with Investment," *Quarterly Journal of Economics*, 108, pp. 115-136.

Caballero, R, J. (1991), "On the Sign of the Investment-Uncertainty Relationship," *American Economic Review*, 81, pp. 279-288.

Caselli, F. and J. Ventura (2000), "A Representative Consumer Theory of Distribution," *American Economic Review*, 90, pp. 909-926.

Dixit, A. K. and R. S. Pindyck (1994), *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press.

Gould, J. P. (1968), "Adjustment Cost in the Theory of the Firm," *Review of Economic Studies*, 35, pp. 45-55.

Hayashi, F. (1982), "Tobin's Marginal Q and Average Q: A Neoclassical Interpretation," *Econometrica*, 50, pp. 215-224.

Inada, K. (1963), "On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization," *Review of Economic Studies*, 30, pp. 119-127.

Koopmans, T. C. (1965), *On the Concept of Optimal Economic Growth, in the Economic Approach to Development Planning,* North Holland.

Ljungqvist, L. and T. J. Sargent (2018), *Recursive Macroeconomic Theory* 4th edition, MIT Press.

Lucas R. E. Jr. (1967), "Adjustment Costs and the Theory of Supply," *Journal of Political Economy*, 75, pp. 321-334.

McCandless, G. (2008), *The ABCs of RBCs: An Introduction to Dynamic Macroeconomic Models*, Harvard University Press.

McDonald, R. and D. Siegel (1986), "The Value of Waiting to Invest," *Quarterly Journal of Economics*, 101, pp. 707-728.

Nagatomi,T. (2000), "*The Financial Accelerator in Macroeconomics: Evidence from Japanese Financial Corporate Groups*," in S. Suwa ed., Current Issues in Economic Policy, Institute for Research in Contemporary Political and Economic Affairs, Waseda University, Tokyo, Japan, pp. 133-155.

Olson, L. J. (1989), "Stochastic Growth with Irreversible Investment," *Journal of*

Economic Theory, 47, pp. 101-129.

Pindyck, R. S. (1988), "Irreversible Investment, Capacity Choice, and the Value of the Firm," *American Economic Review*, 78, pp. 969-985.

Pindyck, R. S. (1991), "Irreversibility, Uncertainty, and Investment," *Journal of Economic Literature*, 29, pp. 1110-1149.

Ramsey, F. P. (1928), "A Mathematical Theory of Saving," *Economic Journal*, 38, pp. 543-559.

Romer, D. (2011), *Advanced Macroeconomics* 4th edition, McGraw-hill.

Romer, P. M. (1986), "Increasing Returns and Long-Run Growth," *Journal of Political Economy*, 94, pp. 1002-1037.

Romer, P. M. (1990), "Endogenous Technological Change," *Journal of Political Economy*, 98, pp. S71-S102.

Summers,L.W. (1981), "Taxation and Corporate Investment: A q-Theory Approach," *Brookings Papers on Economic Activity*, 1, pp. 67-127.

Uzawa, H. (1969), "Time preference and the Penrose Effect in a Two-Class Model of Economic Growth," *Journal of Political Economy*, 77, pp. 628-652.

Von Furstenberg. G. M. (1977), "Corporate Investment Does Market Valuation Matter in the Aggregate ?" *Brookings Papers on Economic Activity*, 2, pp. 347-397.

永冨隆司（2008）「税制改正と企業の投資機会の動向調査―Tax-Adjusted Q の推計と企業の投資決定に関する実態調査の分析―」日本財政学会（第 65 回全国大会）報告論文（於 : 京都大学）.

永冨隆司（2010）「税制改正と企業の投資機会」『行動経済学の理論と実証』所収　千田亮吉ほか　編著　成文堂.

永冨隆司（2011a）「投資の不可逆性と最適投資基準―投資の Option Approach ―」『政経論叢』国士舘大学政経学会　No. 157　pp. 53-82.

永冨隆司（2011b）「不確実性下での不可逆的投資決定モデル」『政経論叢』国士舘大学政経学会　No. 158　pp. 97-131.

永冨隆司（2012）「投資の限定的可逆性と限定的拡張性，およびオプション価値倍率」『政経論叢』国士舘大学政経学会　No. 160　pp. 97-131.

永冨隆司（2021）「分権化された経済の Ramsey Model と税制」『政経論叢』国士舘大学政経学会　No. 188　pp. 89-125.