【論　説】

分権化された経済の Ramsey Model と税制

永　冨　隆　司

目　　次

1. はじめに

本稿では、分権化された経済における Ramsey Model の構造と、その枠組みの中で如何に税制が組み込まれるかについて議論する。「分権化された経済」という言葉は、経済行動の意思決定の権限が1人の社会的計画者、もしくは政府に完全に集約されているというのではなく、家計や企業など独立した経済主体がそれぞれ自由に意思決定を行っている経済という意味で用いられる。家計は自らが想定する計画期間において得られる効用の割引現在価値の総和を最大化するという目的に基づいて行動する。同様に、企業も独自の計画期間中における利潤の割引現在価値の合計を最大化することを目的に行動する。各経済主体のこうした独自の目的に資する自由意思に基づいた行動

の結果として現出する経済においては、市場が均衡（調整）を導くシステムとして機能する。

中田（2011）では、社会的計画者が存在する Model、つまり 集権化された経済における Ramsey Model について、その導出過程を詳細に示しながら、そこに現出する経済の構造について議論している。また、そうした集権化された経済における Ramsey Model と、そうではないむしろ分権化された経済における Ramsey Model の相違についても言及がなされている。ただ同書では、分権化された経済の Ramsey Model についてはその結果の式のみが示されている。そこで本稿ではまず、この分権化された経済における Ramsey Model の導出過程を同書に基づいて詳細に示し、再度検討していくことにする。そしてその上で、導出された Ramsey Model の枠組みの中で税制がどのように構造として組み込まれるかについて理論的に検討する。

2. 分権的 Ramsey Model の導出

本章では、政府部門と海外部門を捨象した経済環境を想定し、家計、企業、および市場の 3 つの要素を順に考察しながら、分権化された経済における Ramsey Model を構築する。ここで導出される Model が次章の税制議論のベース Model となる[1)]。

2-1. 家計の最適化問題

家計の効用最大化問題を考える。家計は、有限の計画期間中における効用流列の割引現在価値の総和を最大化することを目的に行動すると仮定する。なお、本稿では計画期間の初期を 0 期、終期を T 期とする。任意の t 時点（$t>0$）における代表的家計の効用を初期時点（$t=0$）で評価する場合、連続時間モデルの中では主観的割引率（ρ）を用いて、

$$U(0)=e^{-\rho t}U[C(t)] \tag{1}$$

と表すことができる。ここで、U は効用、$U[\cdot]$ は効用関数、C は消費量を表す。効用関数については、任意の $C(t)>0$ に対して、$\frac{dU}{dC}>0$、$\frac{dU^2}{d^2C}<0$、および $\lim_{C\to 0}\left(\frac{dU}{dC}\right)=\infty$、$\lim_{C\to\infty}\left(\frac{dU}{dC}\right)=0$ を仮定する。この $U(0)$ を、0 期から T 期まですべての期に関して加算すると、当該家計の生涯効用の割引現在価値の総和を求めることができる。すなわち、0 期で評価した生涯効用の割引現在価値の総和 $V(0)$ は、

$$V(0)=\int_{t=0}^{T}U(0)\,dt$$

$$=\int_{t=0}^{T}e^{-\rho t}\,U[C(t)]\,dt \tag{2}$$

と表される。

ここで、(2)式に関して、マクロ経済の動態的側面、すなわち人口が変動する社会を考える[2)]。人口が指数的に増加する社会では、初期時点の人口が $L(0)$ のとき、任意の t 時点の人口 $L(t)$ は、$n\times 100\%$ を人口の成長率とすると、

$$L(t)=e^{nt}L(0) \tag{3}$$

と表すことができる[3)]。ただし、n は定率（一定）と仮定する。初期時点の人口 $L(0)$ を 1 に基準化すれば、(3)式は、

$$L(t)=e^{nt} \tag{4}$$

となる[4)]。

ところで、人口が変動する社会においては代表的家計の構成員数に対する影響について考える必要がある。というのは、人口が $n\times 100\%$ の率で成長する経済においては代表的家計の規模、すなわち 1 家計当たりの家族の構成員数も同率で増えるからである。これは、定式化において、代表的家計の初

期時点における効用 $U(0)$、すなわち(1)式を、

$$U(0) = e^{nt}\{e^{-\rho t}U[C(t)]\} \tag{5}$$

と修正することを意味する。また、生涯効用の割引現在価値の総和、(2)式については

$$V(0) = \int_{t=0}^{T} e^{nt}\{e^{-\rho t}U[C(t)]\}\,dt$$

$$= \int_{t=0}^{T} e^{(n-\rho)t}U[C(t)]dt \tag{6}$$

と修正することになる。(6)式は、人口の成長が生じている経済における家計の目的関数と見なすことができる。

次に、資産の蓄積行動について考える。家計は、金融資産(A)と労働(L)を所有しているものとする。1 単位あたりの金融資産からは収益率 $r(t)$ の運用益がもたらされる。労働には単位当たり賃金率 $w(t)$ と投下された労働量 $L(t)$ の積の額が対価として支払われる[5)]。なお、労働は賃金率 $w(t)$ とは独立に、かつ非弾力的に供給されるものとする。

ところで、近年、わが国では成果主義あるいは能力主義に基づく賃金決定方式が傾向性として広がりを見せている。これは、労働者の生産性が変化すると、それが労働者の稼得する賃金の量に影響を与えることを意味する。生産性（技術水準）を $Q(t)$ とすると、労働者は自らが投下した労働量 $L(t)$ に対して生産性を加味した賃金、すなわち $w(t)Q(t)L(t)$ を受け取る[6)]。つまり、賃金率 w と投下労働量 L が一定であったとしても生産性が上昇すると労働者の稼得する賃金の量（財の量的単位で表される賃金量）は増加するということである。

以上から、労働収入と資産運用益の和としての家計の所得総額（実質収入）は、$w(t)Q(t)L(t) + r(t)A(t)$ と表される。

所得総額から消費支出額(C)を差し引いた残額は貯蓄である。貯蓄は、各期における家計の金融資産の増分となって次期へ繰り越される[7)]。すなわ

ち、金融資産の変化 $\dfrac{dA(t)}{dt}$ は、

$$\frac{dA(t)}{dt}=w(t)Q(t)L(t)+r(t)A(t)-C(t) \tag{7}$$

と表される。家計が金融資産を保有し、それを次期以降へ繰り延べようとするのは、利子収入によって将来時点の消費量が増加するため、より大きな効用が得られると期待するからである。つまり、家計は今期の消費を増やして効用を高めることと、今期の消費を減らして金融資産を蓄積し、それによってより多くの消費を将来時点で実現して効用を高めることとの間で選択を行っているとみなすことができる。

(7)式の両辺を $Q(t)L(t)$ で割ると、各経済変数を効率労働１単位あたりという基準で評価することになる[8)]。生産性の向上した労働力というのは、各個人にとっても、また社会にとっても重要な人的資源である。効率労働単位で考えることの意義は、たとえば単なる時間量としての労働量という観点からではなく、向上させえた労働資源の価値を積極的に評価し、そうした観点から社会（変数）を相対的に評価しようという点（意思）に存在する。

$$\frac{1}{Q(t)L(t)}\dot{A}(t)=w(t)+r(t)\frac{A(t)}{Q(t)L(t)}-\frac{C(t)}{Q(t)L(t)} \tag{8}$$

効率労働単位で評価した変数を各記号の小文字で表すことにすると、(8)式は、

$$\frac{1}{Q(t)L(t)}\dot{A}(t)=w(t)+r(t)a(t)-c(t) \tag{9}$$

となる。なお、$\dot{A}(t)=\dfrac{dA(t)}{dt}$ である。

ここで、(9)式に関して、マクロ経済における動態的側面、すなわち技術水準が変動する社会を考える。技術水準が指数的に成長する社会では、初期時点の技術水準（労働生産性）を $Q(0)$ するとき、任意の t 時点における技術水準 $Q(t)$ は技術進歩率を $q\times100\%$ とすれば、

$$Q(t)=e^{qt}Q(0) \tag{10}$$

と表すことができる。ただし、q は定率（一定）と仮定する。初期時点の技術水準 $Q(0)$ を 1 に基準化すると、(10)式は、

$$Q(t)=e^{qt} \tag{11}$$

となる[9)]。

ただ、ここで検討すべき点がある。それは、(8)式および(9)式では効率労働単位という観点から各経済変数を評価しているが、議論の出発点である効用関数では 1 人当たり消費量という形で式が定式化されている。そこで、以下の議論では消費に関してのみ評価単位を効用関数に符合させて、つまり 1 人当たり消費量という基準に表記法を統一して議論を行うことにする。すなわち、効率労働単位で表記した消費 $\dfrac{C(t)}{Q(t)L(t)}$ は、(11)式を考慮して、

$$\begin{aligned} c(t) &= \frac{C(t)}{Q(t)L(t)} \\ &= \frac{C(t)}{e^{qt}L(t)} \\ &= \frac{C(t)}{L(t)}e^{-qt} \\ &= \hat{c}(t)e^{-qt} \end{aligned} \tag{12}$$

と表される。ここで、$\hat{c}$ は 1 人当たりで評価した消費量である。

資産蓄積方程式は(12)式を考慮すると、

$$\frac{1}{Q(t)L(t)}\dot{A}(t)=w(t)+r(t)a(t)-\hat{c}(t)e^{-qt} \tag{13}$$

と修正される。

ところで、効率労働単位で評価された資産は、定義より $\dfrac{A(t)}{Q(t)L(t)}=a(t)$ であるが、この $a(t)$ を時間 t で微分し、それを $\dot{a}(t)$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
\frac{da(t)}{dt}&=\dot{a}(t)\\
&=\frac{\partial a(t)}{\partial A(t)}\frac{dA(t)}{dt}+\frac{\partial a(t)}{\partial Q(t)}\frac{dQ(t)}{dt}+\frac{\partial a(t)}{\partial L(t)}\frac{dL(t)}{dt}\\
&=\frac{1}{Q(t)L(t)}\dot{A}(t)+\left\{\frac{-A(t)L(t)}{[Q(t)L(t)]^2}\right\}\dot{Q}(t)+\left\{\frac{-A(t)Q(t)}{[Q(t)L(t)]^2}\right\}\dot{L}(t)\\
&=\frac{1}{Q(t)L(t)}\dot{A}(t)-\frac{A(t)}{Q(t)L(t)}\cdot\frac{\dot{Q}(t)}{Q(t)}-\frac{A(t)}{Q(t)L(t)}\cdot\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}\\
&=\frac{1}{Q(t)L(t)}\dot{A}(t)-a(t)\mathrm{q}-a(t)n\\
&=\frac{1}{Q(t)L(t)}\dot{A}(t)-(n+q)a(t) \qquad (14)
\end{aligned}
$$

となる。(14)式を整理すると、

$$\frac{1}{Q(t)L(t)}\dot{A}(t)=(n+q)a(t)+\dot{a}(t) \qquad (15)$$

となる。(15)式を(13)式に代入すると、

$$(n+q)a(t)+\dot{a}(t)=w(t)+r(t)a(t)-\hat{c}(t)e^{-qt} \qquad (16)$$

となる。(16)式を整理すると、家計の資産蓄積に関する行動方程式を導出することができる。

$$\dot{a}(t)=w(t)+r(t)a(t)-\hat{c}(t)e^{-qt}-(n+q)a(t) \qquad (17)$$

(17)式は、家計にとって時間経過の中で縛りとなる制約式と見なすことができる。

以上から、人口と技術が成長する動態的な経済における家計の動学的最適

化問題を以下のように記述することができる。

$$\max_{c(t)}\ V(0)=\int_{t=0}^{T} e^{(n-\rho)t}u[\hat{c}(t)]dt \tag{18}$$

$$\text{s.t.}\qquad \dot{a}(t)=w(t)+r(t)a(t)-\hat{c}(t)e^{-qt}-(n+q)a(t) \tag{17}$$

$$a(0)=a_0>0 \tag{19}$$

$$a(T)e^{[n-\bar{r}(T)]T}\geq 0 \tag{20}$$

ここで、$\bar{r}(T)$は計画期間の全期、すなわち 0 期から T 期までの平均利子率（平均収益率に等しい）である。(19)式は、初期時点$(t=0)$において一定量の資産が既に存在していることを示す初期値制約である[10)]。(20)式は、計画期間終期$(t=T)$の資産の割引現在価値が非負であることを要請する No-Ponzi Game 条件（不等式制約）である[11)]。

上記の動学的最適化問題は、ラグランジュ未定乗数法を用いて解くことができる。資産蓄積に関する Lagrange 乗数を$\lambda(t)$、および終期の No-Ponzi game 条件に関する Lagrange 乗数を$\psi(T)$とすると、Lagrange 関数$\mathcal{L}(t)$は以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t)&=\int_{t=0}^{T} e^{(n-\rho)t}u[\hat{c}(t)]dt\\&\quad+\int_{t=0}^{T}\{\lambda(t)[w(t)+r(t)a(t)-\hat{c}(t)e^{-qt}-(n+q)a(t)-\dot{a}(t)]\}dt\\&\quad+\psi(T)\{a(T)e^{[n-\bar{r}(T)]T}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\int_{t=0}^{T} e^{(n-\rho)t}u[\hat{c}(t)]dt\\&\quad+\int_{t=0}^{T}\{\lambda(t)[w(t)+r(t)a(t)-\hat{c}(t)e^{-qt}-(n+q)a(t)]\}dt\end{aligned}$$

$$-\int_{t=0}^{T}\lambda(t)\dot{a}(t)dt$$

$$+\psi(T)\{a(T)e^{[n-\bar{r}(T)]T}\} \tag{21}$$

(21)式から、資産 $a(t)$ の時間微分 $\dot{a}(t)$ を消去するために以下の式変形を行う。

まず、$\lambda(t)a(t)$ を時間 t で微分する。

$$\frac{d\lambda(t)a(t)}{dt}=\frac{d\lambda(t)}{dt}a(t)+\lambda(t)\frac{da(t)}{dt}$$

$$=\dot{\lambda}(t)a(t)+\lambda(t)\dot{a}(t) \tag{22}$$

整理すると

$$\lambda(t)\dot{a}(t)=\frac{d\lambda(t)a(t)}{dt}-\dot{\lambda}(t)a(t) \tag{23}$$

となるから、(23)式を(21)式の第3段の項へ代入すると、

$$\int_{t=0}^{T}\lambda(t)\dot{a}(t)dt=\int_{t=0}^{T}\frac{d\lambda(t)a(t)}{dt}dt-\int_{t=0}^{T}\dot{\lambda}(t)a(t)dt$$

$$=[\lambda(t)a(t)]_0^T-\int_{t=0}^{T}\dot{\lambda}(t)a(t)dt$$

$$=\lambda(T)a(T)-\lambda(0)a(0)-\int_{t=0}^{T}\dot{\lambda}(t)a(t)dt \tag{24}$$

となる。(24)式を考慮すると、$\dot{a}(t)$ を消去した新たな Lagrange 関数 $\tilde{\mathcal{L}}(t)$ を導出することができる。

$$\tilde{\mathcal{L}}(t)=\int_{t=0}^{T}e^{(n-\rho)t}u[\hat{c}(t)]dt$$

$$+\int_{t=0}^{T}\{\lambda(t)[w(t)+r(t)a(t)-\hat{c}(t)e^{-qt}-(n+q)a(t)]\}dt$$

$$-\lambda(T)a(T)+\lambda(0)a(0)+\int_{t=0}^{T}\dot{\lambda}(t)a(t)dt$$

$$+\psi(T)\left\{a(T)e^{[n-\bar{r}(T)]T}\right\}$$

$$=\int_{t=0}^{T}\left\{e^{(n-\rho)t}u[\hat{c}(t)]+\lambda(t)[w(t)+r(t)a(t)-\hat{c}(t)e^{-qt}-(n+q)a(t)]\right\}dt$$

$$+\int_{t=0}^{T}\dot{\lambda}(t)a(t)dt$$

$$-\lambda(T)a(T)+\psi(T)\left\{a(T)e^{[n-\bar{r}(T)]T}\right\}$$

$$+\lambda(0)a(0) \tag{25}$$

なお、(25)式において、

$$\mathcal{H}(t)=e^{(n-\rho)t}u[\hat{c}(t)]+\lambda(t)[w(t)+r(t)a(t)-\hat{c}(t)e^{-qt}-(n+q)a(t)]$$

は、Hamiltonian である。

資産制約に付された Lagrange 乗数 $\lambda(t)$ は、経済学的には資産価格（Shadow Price）と解釈することができる。つまり、$\dot{\lambda}(t)a(t)$ は時価で評価された資産価格の変動を表す。したがって、積分項である(25)式の２段目の項、$\int_{t=0}^{T}\dot{\lambda}(t)a(t)dt$ は計画期間中に実現する資産のキャピタル・ゲイン（あるいはロス）の総額と解釈することができる。

(25)式から、消費$(\hat{c})$および資産(a)に関して最適化のための１階の条件を求めると、

$$\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}(t)}{\partial\hat{c}(t)}=e^{(n-\rho)t}u'[\hat{c}(t)]-\lambda(t)e^{-qt}$$

$$=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\hat{c}(t)}=0 \tag{26}$$

$$\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}(t)}{\partial a(t)}=\lambda(t)r(t)-\lambda(t)(n+q)+\dot{\lambda}(t)$$

$$=\frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial a(t)}+\dot{\lambda}(t)=0 \tag{27}$$

となる。なお、(25)式にはLagrange乗数$\lambda(t)$に関して時間で微分した$\dot{\lambda}(t)$が含まれているため、そのままでは1階の条件を求めることができない。そこで、$\lambda(t)$についてはもともとのLagrange関数$\mathcal{L}(t)$から1階の条件を求めることにする。

$$\frac{\partial \mathcal{L}(t)}{\partial \lambda(t)}=[w(t)+r(t)a(t)-\hat{c}(t)e^{-qt}-(n+q)a(t)]-\dot{a}(t)=0 \tag{28}$$

以上、(26)式～(28)式を整理すると、

$$\begin{aligned}\lambda(t)&=e^{qt}e^{(n-\rho)t}u'[\hat{c}(t)]\\&=e^{(n-\rho+q)t}u'[\hat{c}(t)]\end{aligned} \tag{29}$$

$$\dot{\lambda}(t)=[n+q-r(t)]\lambda(t) \tag{30}$$

$$\dot{a}(t)=w(t)+r(t)a(t)-\hat{c}(t)\,e^{-qt}-(n+q)a(t) \tag{31}$$

が得られる。(30)式、(31)式はEular方程式である。また、(31)式は資産に関する蓄積方程式そのものである。

ここで、計画期間の終期$(t=T)$制約について考える。(25)式から、$a(T)$に関する最適化のための1階の条件を求めると、

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}(t)}{\partial a(t)}=-\lambda(T)+\psi(T)e^{[n-\bar{r}(T)]T}=0$$

より

$$\psi(T)e^{[n-\bar{r}(T)]T}=\lambda(T) \tag{32}$$

が得られる。

No-Ponzi Game条件の(20)式は不等式制約であるから、相補条件は、

$$\psi(T)\{a(T)e^{[n-\bar{r}(T)]T}-0\}=\psi(T)e^{[n-\bar{r}(T)]T}a(T)=0 \tag{33}$$

と記述される。(32)式を(33)式に代入すると、

$$\lambda(T)a(t)=0 \tag{34}$$

が得られる。(34)式は横断性条件（Transversarity Condition）である。(34)式を満たすためには、最適値にアスタリスク(*)を付けて表せば、

$$\lambda^*(T)>0 \text{ のとき } a^*(T)=0 \quad \text{または} \quad a^*(T)\geq 0 \text{ のとき } \lambda^*(T)=0$$

である必要がある。終期($t=T$)において最適な資産価格(λ^*)が正、すなわち終期時点の資産に依然として価値が残存すると評価されているときは、資産をすべて消費に回すことによって効用をさらに高めることができる状況にあることを示している。したがって、結果として、$a^*(T)=0$ となるはずである。逆に、終期において資産(a^*)が残存しているというときは、資産を消費に充当しても効用の増大が得られない状況にあることを示唆している。したがって、これは資産に実質的な価値がない、すなわち$\lambda^*(T)=0$ と評価されていることを意味する。

(26)式を終期($t=T$)で評価すると、

$$\lambda(T)e^{-qT}=e^{(n-\rho)T}u'[\hat{c}(T)]$$

となるから、

$$\lambda(T)=e^{(n-\rho+q)T}u'[\hat{c}(T)]$$

が得られる。効用関数については仮定より、$u'>0$、$u''<0$ および $\hat{c}\to\infty$ のとき $u'\to 0$、$\hat{c}\to 0$ のとき $u'\to\infty$ であるから、$\lambda^*(T)=0$ となるためには、$(n+q)<\rho$ という条件のもとで、終期時点（T 期）が非常に長く（遠くに）設定されて $\lim_{T\to\infty} e^{(n-\rho+q)T}=0$ となるか、終期の消費が無限大で $\lim_{\hat{c}(T)\to\infty} u'=0$ となるかのいずれかが必要となる。後者の場合、そもそも予算が無限大でなけれ

ば実現しないから、$\lambda^*(T)=0$ であるためには時間 T が長期に設定されていると考える方が自然である。こうした期間設定以外の場合は、$a^*(T)=0$ という条件の方、すなわち計画期間の終期において資産を残さず、すべて消費に充当することが最適となる[12)]。

次に、消費に関する動学方程式を導出する。まず、(29)式を時間(t)で微分する。

$$
\begin{aligned}
\frac{d\lambda(t)}{dt} &= \dot{\lambda}(t)\\
&= (n-\rho+q)e^{(n-\rho+q)t}u'\,[\hat{c}(t)] + e^{(n-\rho+q)t}u''\,[\hat{c}(t)]\dot{\hat{c}}(t)\\
&= (n-\rho+q)\,\{e^{(n-\rho+q)t}u'\,[\hat{c}(t)]\} + e^{(n-\rho+q)t}u''\,[\hat{c}(t)]\dot{\hat{c}}(t)\\
&= (n-\rho+q)\,\lambda(t) + e^{(n-\rho+q)t}u''\,[\hat{c}(t)]\dot{\hat{c}}(t) \qquad (35)
\end{aligned}
$$

ここで、(35)式を(30)式に代入すると、

$$(n-\rho+q)\,\lambda(t) + e^{(n-\rho+q)t}u''\,[\hat{c}(t)]\dot{\hat{c}}(t) = [n+q-r(t)]\,\lambda(t)$$

となるから、$\lambda(t)$についてまとめると、

$$\{(n-\rho+q)-[n+q-r(\mathrm{t})]\}\,\lambda(t) = -e^{(n-\rho+q)t}u''\,[\hat{c}(t)]\dot{\hat{c}}(t)$$

となる。

以上から、

$$[r(t)-\rho] = -\frac{e^{(n-\rho+q)t}u''\,[\hat{c}(t)]\dot{\hat{c}}(t)}{\lambda(t)} \qquad (36)$$

が得られる。

(36)式の分母に(29)式を代入すると、

$$[r(t)-\rho] = -\frac{e^{(n-\rho+q)t}u''\,[\hat{c}(t)]\dot{\hat{c}}(t)}{e^{(n-\rho+q)t}u'\,[\hat{c}(t)]}$$

となる。ここで、右辺に $1=\dfrac{\hat{c}(t)}{\hat{c}(t)}$ を掛けると、

$$[r(t)-\rho]=-\frac{u''[\hat{c}(t)]\hat{c}(t)}{u'[\hat{c}(t)]}\cdot\frac{\dot{\hat{c}}(t)}{\hat{c}(t)} \tag{37}$$

となるが、消費の変化に関する限界効用の弾力性 $\hat{\varepsilon}(t)$ を

$$\hat{\varepsilon}(t)=-\frac{\dfrac{du'[\hat{c}(t)]}{u'[\hat{c}(t)]}}{\dfrac{d\hat{c}(t)}{\hat{c}(t)}}$$

$$=-\frac{1}{u'[\hat{c}(t)]}\cdot\frac{du'[\hat{c}(t)]}{d\hat{c}(t)}\cdot\hat{c}(t)$$

$$=-\frac{1}{u'[\hat{c}(t)]}\cdot u''[\hat{c}(t)]\cdot\hat{c}(t)$$

$$=-\frac{u''[\hat{c}(t)]\hat{c}(t)}{u'[\hat{c}(t)]} \tag{38}$$

と定義すると、(37)式は、

$$[r(t)-\rho]=\hat{\varepsilon}(t)\cdot\frac{\dot{\hat{c}}(t)}{\hat{c}(t)} \tag{39}$$

と表すことができる。(39)式を $\dot{\hat{c}}(t)$ について解くと、

$$\dot{\hat{c}}(t)=\hat{c}(t)\,\frac{1}{\hat{\varepsilon}(t)}\,[r(t)-\rho] \tag{40}$$

が得られる。以上導出した(40)式が消費に関する動学方程式である。

2‑2. 企業の最適化問題

次に、企業の利潤最大化問題について考える。企業は、利子率 $r(t)$ で資金を借り入れて資本を所有する家計からフローとしての資本サービス $K(t)$ を賃借すると同時に、時間量として測られる労働サービスをやはり家計から購入して生産活動を行っているものとする。企業が資本サービスを賃借する場合のコストはレンタル・コストである。単位当たりのレンタル・コスト（価格）を X とする。資本は毎期一定の率（δ）で減耗すると仮定すると、

資本1単位を所有する家計の物的単位で表される実質収益率は、$X-\delta$と表される。家計はまた他の家計に対して利子率$r(t)$で貸し付けを行うこともできると仮定する。市場が完全な場合、裁定が機能して、$X-\delta=r$が成立する。これは、資本の所有と資金の貸出が価値の貯蔵という意味において完全代替であることを意味している。

生産物価格を1に基準化する。また、在庫を考えないとすると、利潤は生産（生産量＝販売量）による売上所得から2種類の生産要素（資本と労働）への支払いを差し引いた残額として与えられる。市場が完全な場合、レンタル・コストXは、$X=r+\delta$となるから、利潤関数は、

$$\begin{aligned}\Pi(t) &= F[K(t), Q(t)L(t)] - \mathrm{X}(t)K(t) - w(t)Q(t)L(t)\\ &= F[K(t), Q(t)L(t)] - [r(t)+\delta]K(t) - w(t)Q(t)L(t)\end{aligned} \tag{41}$$

と記述できる[13]。

(41)式では、生産が物的な耐久投入サービスである資本$K(t)$と効率労働$Q(t)L(t)$の2つを生産要素として行われることを示している。生産関数は以下のとおりである。

$$Y(t) = F[K(t), Q(t)L(t)] \tag{42}$$

資本$K(t)$は過去において生産された財のストック量ではあるが、ここでは既存資本から生産のためのサービスを毎期受け取るというフロー量で考えることにする。一方、労働経験や技能、専門的な知識や資格、心身の状態などは労働者の作業効率や職務遂行上の能力に影響を与えるため、労働（L）については、効率性$Q(t)$と合わせて考えていくことにする。

生産関数については、資本と労働の2つの競合的な投入量に対して一次同次性（規模に関する収穫一定性）を満たすと仮定する。また、任意の$K(t)>0$、$L(t)>0$に対して、

$$\frac{\partial F}{\partial K}>0、\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}<0 \quad かつ \quad \frac{\partial F}{\partial L}>0、\frac{\partial^2 F}{\partial L^2}<0$$

および、Inada（1963）の条件、

$$\lim_{K\to 0}\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right)=\lim_{L\to 0}\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)=\infty \quad \text{および} \quad \lim_{K\to\infty}\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right)=\lim_{L\to\infty}\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)=0$$

を満たすと仮定する。これらの性質を満たすとき、生産関数は新古典派型となり、効率労働単位で表記することができる。

$$\begin{aligned} Y(t) &= Q(t)L(t)F\left[\frac{K(t)}{Q(t)L(t)},1\right] \\ &= Q(t)L(t)f[k(t)] \end{aligned} \tag{43}$$

(43)式から資本の限界生産物を求めると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} &= \frac{\partial F[K(t),\ Q(t)L(t)]}{\partial K(t)} \\ &= \frac{dQ(t)L(t)f[k(t)]}{dk(t)}\ \frac{\partial k(t)}{\partial K(t)} \\ &= Q(t)L(t)f'[k(t)]\ \frac{1}{Q(t)L(t)} \\ &= f'[k(t)] \end{aligned} \tag{44}$$

となる。

同様に、効率労働の限界生産物は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y(t)}{\partial Q(t)L(t)} &= \frac{\partial F[K(t),\ Q(t)L(t)]}{\partial Q(t)L(t)} \\ &= \frac{dQ(t)L(t)f[k(t)]}{dQ(t)L(t)} \\ &= f[k(t)]+Q(t)L(t)\frac{df[k(t)]}{dk(t)}\ \frac{\partial k(t)}{\partial Q(t)L(t)} \\ &= f[k(t)]+Q(t)L(t)f'[k(t)]\left\{-\frac{K(t)}{[Q(t)L(t)]^2}\right\} \\ &= f[k(t)]-f'[k(t)]k(t) \end{aligned} \tag{45}$$

となる。

(41)式から資本の限界利潤を求めると、

$$\frac{\partial \Pi(t)}{\partial K(t)}=\frac{\partial F[K(t),\ Q(t)L(t)]}{\partial K(t)}-r(t)-\delta=0 \tag{46}$$

となるが、(46)式に(44)式を代入すると、

$$f'[k(t)]=r(t)+\delta$$

となり、利潤率を

$$r(t)=f'[k(t)]-\delta \tag{47}$$

と求めることができる。

同様に、(41)式より効率労働の限界利潤を求めると、

$$\frac{\partial \Pi(t)}{\partial Q(t)L(t)}=\frac{\partial F[K(t),\ Q(t)L(t)]}{\partial Q(t)L(t)}-w(t)=0 \tag{48}$$

となるが、(48)式に(45)式を代入すると、

$$f[k(t)]-f'[k(t)]k(t)-w(t)=0$$

となるから、賃金率を

$$w(t)=f[k(t)]-f'[k(t)]k(t) \tag{49}$$

と求めることができる[14)]。

2-3. 市場均衡

家計と企業はそれぞれ独立した意思決定主体である。それゆえ、これら2つの経済主体の自由意思に基づく行動、およびそれらの結果として生じる社会的整合性（経済の調和性）を維持するためには市場の存在が必要となる。ここでは、政府部門と海外部門を捨象した閉鎖経済を仮定しているから、資金の貸借は国内民間経済の内部で相殺される。効用関数(1)式あるいは(5)式

を見ると、効用は財の消費量のみから生じ、資産の保有量やその変化からは生じていない。つまり、当該経済における付加価値が企業の生産のみから生み出されるとすると、収益を発生させる資産の使い道は企業への資金供給のみとなる。したがって、家計は資産の全額を企業への融資に充当する。そして、企業は家計から調達した資金を資本サービスの購入に充てて利潤最大化の原理に随って生産活動に従事する。資産市場が均衡するとき、効率労働単位として $a(t)=k(t)$ および $\dot{a}(t)=\dot{k}(t)$ が成立する。ゆえに、資産の蓄積方程式(31)式は資本の蓄積方程式に変換することができる。

$$\dot{k}(t)=w(t)+r(t)k(t)-\hat{c}(t)e^{-qt}-(n+q)k(t) \tag{50}$$

(50)式に(47)式と(49)式を代入すると、

$$\begin{aligned}\dot{k}(t)&=f[k(t)]-f'[k(t)]k(t)+\{f'[k(t)]-\delta\}k(t)-\hat{c}(t)e^{-qt}-(n+q)k(t)\\&=f[k(t)]-f'[k(t)]k(t)+f'[k(t)]k(t)-\delta k(t)-\hat{c}(t)e^{-qt}-(n+q)k(t)\\&=f[k(t)]-\hat{c}(t)e^{-qt}-(n+q+\delta)k(t)\end{aligned} \tag{51}$$

が得られる。

また、消費に関する動学方程式(40)式に(47)式を代入すると、

$$\dot{\hat{c}}(t)=\hat{c}(t)\frac{1}{\hat{\varepsilon}(t)}\{f'[k(t)]-\delta-\rho\} \tag{52}$$

が得られる。

以上、(51)式および(52)式の２本の連立微分方程式体系として表されるマクロ経済 Model を分権化された経済における Ramsey Model という。本稿で導出した Model は、人口の成長と技術進歩という２つの動態的側面を特徴として織り込んだ Model となっている。

【資本の動学方程式】

$$\dot{k}(t)=f[k(t)]-\hat{c}(t)e^{-qt}-(n+q+\delta)k(t) \tag{51}$$

【消費の動学方程式】

$$\dot{c}(t)=\hat{c}(t)\frac{1}{\hat{\varepsilon}(t)}\{f'[k(t)]-\delta-\rho\} \tag{52}$$

3. Ramsey モデルと税制

前章で導出した Ramsey Model の想定する経済は、政府部門と海外部門をともに捨象した閉鎖経済であった。本章では、そうした環境設定に関する仮定を緩めて Model の拡張を行う。新たに政府部門を導入して税制を Ramsey Model に組み込む場合、前章で導出した家計の資産蓄積方程式と利潤関数の両方を修正する必要がある。またさらに、政府の予算制約についても考える必要がある。本章では、これまで導出してきた Ramsey Model の枠組みの中で税制がどのように組み込まれるか、また税制が企業の資本蓄積行動や消費者の動学的な消費行動に対してどのような経路で影響を与えるのかを理論的に議論する。

Ramsey Model における税制の反映についてはこれまで、Blanchard and Fisher（1989）、Barro and Sala-i-Martin（2003）、Ljungqvist and Sargent（2018）等において様々な議論が行われてきた。Blanchard and Fisher（1989）では、政府支出の大きさが変化するときの影響や財源調達の形態の相違による影響について議論が行われている。また、Barro and Sala-i-Martin（2003）ほかでは、種々の異なる税制を導入した場合の影響について包括的に議論が行われている。なお、Barro and Sala-i-Martin（2003）が取り上げた税制は、賃金所得税、消費税、資産所得税、そして企業所得税の 4 種である。

以下、本稿では政府部門を中央政府と地方政府の統合体とみなし、Barro and Sala-i-Martin（2003）が検討した 4 つの諸税に加えて、家計に対する住民税と社会保険料の負担、企業に対する事業税の負担を新たに考慮してモデルの拡張を行う[15)]。

先ず、政府部門における予算制約から考える[16)]。政府部門の支出項目は、

財貨・サービスの購入（G）と種々の移転支払い（TR）の2つからなる[17)]。一方、収入項目は労働賃金所得に賦課される所得税（税率：τ_w）、住民税（税率：τ_l）、雇用保険や健康保険、および介護や年金の掛け金として負担する社会保険料（保険料率：η）、金融資産の投資収益に対して賦課される資産所得税（税率：τ_a）、消費税（税率：τ_c）、そして企業の収益に賦課される法人税（税率：τ_{Nf}）と事業税（税率：τ_{Lf}）を合わせた法人実効所得税（税率：τ_f）から構成される。所得税と住民税については支給される賃金所得から社会保険料を差し引いた残額が課税ベースとなるから、政府部門の収入には税とは別に社会保険料収入を考慮する必要がある。なお、簡単化のため、以下では Barro and Sala-i-Martin（2003）と同様に税率等は定率と仮定する。また、住民税については所得税と同様、今期の所得に対して課税されるものと仮定する。

以上をまとめると、政府の予算制約式は次式のように記述することができる。

$$
\begin{aligned}
G(t)+TR(t) = {} & \eta w(t)Q(t)L(t)+(\tau_w+\tau_l)(1-\eta)w(t)Q(t)L(t) \\
& +\tau_a r(t)A(t)+\tau_c C(t)+\tau_f \Pi(t)
\end{aligned} \tag{53}
$$

家計の資産蓄積方程式を効率労働単位で評価すると、

$$
\begin{aligned}
\dot{a}(t) = {} & (1-\tau_w-\tau_l)(1-\eta)w(t)+(1-\tau_a)r(t)a(t)-(1+\tau_c)\hat{c}(t)\,e^{-qt} \\
& -(n+q)a(t)+tr(t)
\end{aligned} \tag{54}
$$

となる。ここで、$\dfrac{TR(t)}{Q(t)L(t)}=tr(t)$である。ただし、本章においても消費については前章と同様、1人当たり概念で表記することにする。

人口と技術が成長する経済では、家計の動学的最適化問題は以下のように記述される。

$$
\max_{c(t)}\ V(0)=\int_{t=0}^{T} e^{(n-\rho)t}\,u[\hat{c}(t)]dt \tag{18}
$$

$$\text{s.t.}\quad \dot{a}(t) = (1-\tau_w-\tau_l)(1-\eta)w(t) + (1-\tau_a)r(t)a(t)$$
$$-(1+\tau_c)\hat{c}(t)\,e^{-qt} - (n+q)a(t) + tr(t) \tag{54}$$
$$a(0) = a_0 > 0 \tag{19}$$
$$a(T)e^{[n-\bar{r}(T)]T} \geq 0 \tag{20}$$

これらの問題を再びラグランジュ未定乗数法で解く。資産蓄積に関する Lagrange 乗数を$\lambda(t)$、終期の No-Ponzi game 条件に関する Lagrange 乗数を$\psi(T)$とすると、Lagrange 関数$\mathcal{L}(t)$は以下のように記述される。

$$\mathcal{L}(t) = \int_{t=0}^{T} e^{(n-\rho)t}\,u[\hat{c}(t)]dt$$
$$+\int_{t=0}^{T} \lambda(t)\,\{(1-\tau_w-\tau_l)(1-\eta)w(t) + (1-\tau_a)r(t)a(t)$$
$$-(1+\tau_c)\,\hat{c}(t)e^{-qt} - (n+q)a(t) + tr(t) - \dot{a}(t)\}\,dt$$
$$+\psi(T)\,\{a(T)e^{[n-\bar{r}(T)]T}\}$$

$$= \int_{t=0}^{T} e^{(n-\rho)t}\,u[\hat{c}(t)]dt$$
$$+\int_{t=0}^{T} \lambda(t)\,\{(1-\tau_w-\tau_l)(1-\eta)w(t) + (1-\tau_a)r(t)a(t)$$
$$-(1+\tau_c)\,\hat{c}(t)e^{-qt} - (n+q)a(t) + tr(t)\}\,dt$$
$$-\int_{t=0}^{T} \lambda(t)\dot{a}(t)dt$$
$$+\psi(T)\,\{a(T)e^{[n-\bar{r}(T)]T}\} \tag{55}$$

(24)式を考慮すると、(55)式は、

$$\tilde{\mathcal{L}}(t) = \int_{t=0}^{T} \Big\{e^{(n-\rho)t}\,u[\hat{c}(t)] + \lambda(t)\,\{(1-\tau_w-\tau_l)(1-\eta)w(t)$$
$$+(1-\tau_a)r(t)a(t) - (1+\tau_c)\hat{c}(t)e^{-qt} - (n+q)a(t) + tr(t)\}\Big\}\,dt$$

$$+\int_{t=0}^{T}\dot{\lambda}(t)a(t)dt$$

$$-\lambda(T)a(T)+\psi(T)\{a(T)e^{[n-\bar{r}(T)]T}\}$$

$$+\lambda(0)a(0) \tag{56}$$

となる。(56)式において

$$\mathcal{H}(t)=e^{(n-e)t}u[\hat{c}(t)]$$
$$+\lambda(t)\{(1-\tau_w-\tau_l)(1-\eta)w(t)+(1-\tau_a)r(t)a(t)$$
$$-(1+\tau_c)\hat{c}(t)e^{-qt}-(n+q)a(t)+tr(t)\}$$

は、Hamiltonian である。

(56)式から、消費（$\hat{c}$）および資産（a）に関して最適化のための１階の条件を求める。

$$\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}(t)}{\partial\hat{c}(t)}=e^{(n-\rho)t}u'[\hat{c}(t)]-\lambda(t)(1+\tau_c)e^{-qt} \tag{57}$$

$$=\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial\hat{c}(t)}=0$$

$$\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}(t)}{\partial a(t)}=\lambda(t)(1-\tau_a)r(t)-\lambda(t)(n+q)+\dot{\lambda}(t) \tag{58}$$

$$=\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial a(t)}+\dot{\lambda}(t)=0$$

なお、Lagrange 乗数$\lambda(t)$に関して、(56)式では時間で微分した $\dot{\lambda}(t)$が含まれているため、もともとの Lagrange 関数(55)式から１階の条件を求めることにする。

$$\frac{\partial\mathcal{L}(t)}{\partial\lambda(t)}=(1-\tau_w-\tau_l)(1-\eta)w(t)+(1-\tau_a)r(t)a(t)$$

$$-(1+\tau_c)\hat{c}(t)e^{-qt}-(n+q)a(t)+tr(t)-\dot{a}(t)=0 \tag{59}$$

以上、(57)式〜(59)式を整理すると、

$$\lambda(t)=\frac{1}{1+\tau_c}e^{qt}e^{(n-\rho)t}u'[\hat{c}(t)]$$

$$=\frac{1}{1+\tau_c}e^{(n-\rho+q)t}u'[\hat{c}(t)] \tag{60}$$

$$\dot{\lambda}(t)=[n+q-(1-\tau_a)r(t)]\lambda(t) \tag{61}$$

$$\dot{a}(t)=(1-\tau_w-\tau_l)(1-\eta)w(t)+(1-\tau_a)r(t)a(t)$$
$$-(1+\tau_c)\hat{c}(t)e^{-qt}-(n+q)a(t)+tr(t) \tag{62}$$

が得られる。(61)式、(62)式は Eular 方程式である。

(60)式を時間（t）で微分すると、

$$\frac{d\lambda(t)}{dt}=\dot{\lambda}(t)$$

$$=\frac{1}{1+\tau_c}(n-\rho+q)e^{(n-\rho+q)t}u'[\hat{c}(t)]+\frac{1}{1+\tau_c}e^{(n-\rho+q)t}u''[\hat{c}(t)]\dot{\hat{c}}(t)$$

$$=(n-\rho+q)\left\{\frac{1}{1+\tau_c}e^{(n-\rho+q)t}u'[\hat{c}(t)]\right\}$$

$$+\frac{1}{1+\tau_c}e^{(n-\rho+q)t}u''[\hat{c}(t)]\dot{\hat{c}}(t)$$

$$=(n-\rho+q)\lambda(t)+\frac{1}{1+\tau_c}e^{(n-\rho+q)t}u''[\hat{c}(t)]\dot{\hat{c}}(t) \tag{63}$$

となる。(63)式を(61)式に代入すると、

$$(n-\rho+q)\lambda(t)+\frac{1}{1+\tau_c}e^{(n-\rho+q)t}u''[\hat{c}(t)]\dot{\hat{c}}(\mathrm{t})=[n+q-(1-\tau_a)r(t)]\lambda(t)$$

となるから、$\lambda(t)$についてまとめると、

$$\{(n-\rho+q)-[n+q-(1-\tau_a)r(t)]\}\lambda(t)=-\frac{1}{1+\tau_c}e^{(n-\rho+q)t}u''[\hat{c}(t)]\dot{\hat{c}}(t)$$

となる。

以上から、

$$[(1-\tau_a)r(t)-\rho]=-\frac{1}{1+\tau_c}\ \frac{e^{(n-\rho+q)t}u''[\hat{c}(t)]\dot{\hat{c}}(t)}{\lambda(t)} \tag{64}$$

が得られる。

(64)式の分母に(60)式を代入すると、

$$[(1-\tau_a)r(t)-\rho]=-\frac{1}{1+\tau_c}\ \frac{e^{(n-\rho+q)t}u''[\hat{c}(t)]\dot{\hat{c}}(t)}{\dfrac{1}{1+\tau_c}e^{(n-\rho+q)t}u'[\hat{c}(t)]}$$

$$=-\frac{u''[\hat{c}(t)]\dot{\hat{c}}(t)}{u'[\hat{c}(t)]}$$

となる。ここで、右辺に $1=\dfrac{\hat{c}(t)}{\hat{c}(t)}$ を掛けると、

$$[(1-\tau_a)r(t)-\rho]=-\frac{u''[\hat{c}(t)]\hat{c}(t)}{u'[\hat{c}(t)]}\cdot\frac{\dot{\hat{c}}(t)}{\hat{c}(t)} \tag{65}$$

となるが、(65)式について(38)式の消費の変化に関する限界効用の弾力性 $\hat{\varepsilon}(t)$ を考慮すると、

$$[(1-\tau_a)r(t)-\rho]=\hat{\varepsilon}(t)\cdot\frac{\dot{\hat{c}}(t)}{\hat{c}(t)} \tag{66}$$

となる。(66)式を $\dot{\hat{c}}(t)$ について解くと、

$$\dot{\hat{c}}(t)=\hat{c}(t)\frac{1}{\hat{\varepsilon}(t)}[(1-\tau_a)r(t)-\rho] \tag{67}$$

が得られる。以上導出した(67)式が税制を考慮した場合の消費に関する動学方程式である。

一方、利潤関数が法人の課税所得となるとき、法人実効税率を τ_f $\left(=\dfrac{\tau_{Nf}+\tau_{Lf}}{1+\tau_{Lf}}\right)$ とすれば、税引き後の利潤 $\Pi(t)$ は、

$$\begin{aligned}\Pi(t) &= (1-\tau_f)\{F[K(t),\ Q(t)L(t)] - \mathrm{X}(t)K(t) - w(t)Q(t)L(t)\} \\ &= (1-\tau_f)\{F[K(t),\ Q(t)L(t)] - [r(t)+\delta]K(t) - w(t)Q(t)L(t)\} \quad (68)\end{aligned}$$

と記述される。企業が資本設備（機械、器具備品）をレンタルしたとき、その支払いはリース料勘定の中で、また土地や建物などの場合は地代家賃（不動産賃借料）勘定の中で処理される。これらは、製造原価の経費会計の賃借料項目として処理され、売上原価・営業原価の１項目を構成する。また、借り入れによって資本サービスを購入する場合も、利子支払いは所得から控除される。(68)式において、レンタル料が課税所得の中に位置づけられているのはこうした意味からである。

(68)式から資本の限界利潤を求めると、

$$\frac{\partial \Pi(t)}{\partial K(t)} = (1-\tau_f)\left\{\frac{\partial F[K(t),\ Q(t)L(t)]}{\partial K(t)} - r(t) - \delta\right\} = 0$$

となるから、

$$\frac{\partial F[K(t),\ Q(t)L(t)]}{\partial K(t)} = r(t) + \delta \quad (69)$$

となる。(69)式に(44)式を代入すると、利潤率を求めることができる。

$$r(t) = f'[k(t)] - \delta \quad (70)$$

同様に、(68)式から効率労働の限界利潤を求めると、

$$\frac{\partial \Pi(t)}{\partial Q(t)L(t)} = (1-\tau_f)\left\{\frac{\partial F[K(t),\ Q(t)L(t)]}{\partial Q(t)L(t)} - w(t)\right\} = 0$$

となるから、

$$\frac{\partial F[K(t),\ Q(t)L(t)]}{\partial Q(t)L(t)} = w(t) \quad (71)$$

となる。(71)式に(45)式を代入すると賃金率を求めることができる。

$$w(t) = f[k(t)] - f'[k(t)]k(t) \quad (72)$$

閉鎖経済では資産市場が均衡するとき、$k(t)=a(t)$ および $\dot{k}(t)=\dot{a}(t)$ が成立する。また、(62)式に(70)式と(72)式を代入すると、

$$\begin{aligned}\dot{k}(t) &= (1-\tau_w-\tau_l)(1-\eta)\{f[k(t)]-f'[k(t)]k(t)\}\\ &\quad +(1-\tau_a)\{f'[k(t)]-\delta\}k(t)-(1+\tau_c)\hat{c}(t)e^{-qt}-(n+q)k(t)+\mathrm{tr}(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= (1-\tau_w-\tau_l)(1-\eta)f[k(t)]\\ &\quad +[(1-\tau_a)-(1-\tau_w-\tau_l)(1-\eta)]f'[k(t)]k(t)\\ &\quad -[n+q+(1-\tau_a)\delta]k(t)-(1+\tau_c)\hat{c}(t)e^{-qt}+tr(t) \qquad (73)\end{aligned}$$

が得られる。(73)式は、資本蓄積に関する動学方程式である。

(67)式に(70)式を代入すると、

$$\dot{\hat{c}}(t)=\hat{c}(t)\frac{1}{\hat{\varepsilon}(t)}\{(1-\tau_a)\{f'[k(t)]-\delta\}-\rho\} \qquad (74)$$

が得られる。(74)式は、消費に関する動学方程式である。

以上、(73)式および(74)式の2本の連立微分方程式体系として表されるマクロ経済 Model が分権化された経済における税制を考慮した Ramsey Model である。

【資本の動学方程式】

$$\begin{aligned}\dot{k}(t) &= (1-\tau_w-\tau_l)(1-\eta)f[k(t)]\\ &\quad +[(1-\tau_a)-(1-\tau_w-\tau_l)(1-\eta)]f'[k(t)]k(t)\\ &\quad -[n+q+(1-\tau_a)\delta]k(t)-(1+\tau_c)\hat{c}(t)e^{-qt}+tr(t) \qquad (73)\end{aligned}$$

【消費の動学方程式】

$$\dot{\hat{c}}(t)=\hat{c}(t)\frac{1}{\hat{\varepsilon}(t)}\{(1-\tau_a)\{f'[k(t)]-\delta\}-\rho\} \qquad (74)$$

4. 議論および結論

本稿では、分権化された経済における Ramsey Model の導出過程を税制議論のベース Model として詳細に示すとともに、導出された Ramsey Model の枠組みの中で税制がどのように構造として組み込まれるかについて理論的な検討を行った。本稿で考察した税制は、労働賃金所得に賦課される所得税、住民税、雇用保険や健康保険、および介護や年金の掛け金として負担する社会保険料、金融資産の投資収益に対して賦課される資産所得税、消費税、そして企業の収益に賦課される法人税と事業税を合わせた法人実効所得税である。その結果、税は家計の資産形成に対して非常に複雑な経路でマイナスの影響を与えることが示された。閉鎖経済においては、家計の資産蓄積が企業の資本蓄積に影響を与えることから、家計に対する税制は企業の資本蓄積行動を歪めることになる。ただし、企業の利潤全体に対して課税されるような形での法人関連税制については Ramsey Model 体系において家計の動学的な消費行動に対しても企業の動学的な資本蓄積行動に対してもともに何ら影響を与えないことが示された。

Ramsey Model については、本稿で行ったような税制を織り込む形での拡張のほか、閉鎖経済という環境制約を緩めて海外部門を考慮する形での拡張も行われている。また、投資の調整費用を考慮する動学的最適化の枠組みの中で企業行動を Model 化する研究も行われている。これらの点に関する理論的な整理、および政策分析については次の研究課題としたい。

5. 補　論

本論第 3 章では税制の影響に関する議論を深めることを目的に、式の途中展開を含めて理論モデルの詳細な導出を行った。補論では、Model における変数の評価単位の統一について再検討するとともに、法人実効税率と事業税

の考え方について制度的な議論を深めておくことにする。

5-1. 変数の評価単位の統一について

Ramsey Model における変数の評価単位について再考する。(51)式と(52)式、および税制を考慮した(73)式と(74)式では、効用関数の定式化に符合させて消費については1人当たり単位で評価し、それ以外の変数についてはすべて効率労働単位で評価している。つまり、ここには変数の評価単位に、および変数の表記方法にねじれが存在しているということである。

本論において指摘したように、生産性の向上した労働力というのは、個人にとっても、また社会にとっても、それは重要な人的資源である。効率労働単位で評価するという考え方の基礎には、労働量を単に一人当たりという量的な観点からではなく、向上させえた労働資源の価値を積極的に評価し、むしろそうした観点から社会的な諸価値を相対的に評価しようという意図がある。こうした考え方を重視する場合、各変数を効率労働単位で統一的に評価する Ramsey Model を導出することにも一定の意義がある。

以下、補論 5-1 では変数の評価単位を効率労働単位に統一した Ramsey Model の導出を行う。効率労働単位で評価される消費は $c(t)=\dfrac{C(t)}{Q(t)L(t)}$、1人当たり労働単位で評価される消費は $\hat{c}(t)=\dfrac{C(t)}{L(t)}$、とそれぞれ定義される。$c(t)$ を $\hat{c}(t)$ を用いて表すと、

$$c(t)=\frac{C(t)}{Q(t)L(t)}=\frac{C(t)}{L(t)}\ \frac{L(t)}{Q(t)L(t)}=\hat{c}(t)\frac{1}{Q(t)}=\hat{c}(t)\ e^{-qt} \tag{5-1-1}$$

となる。(5-1-1)式を時間 t で微分する。

$$\frac{dc(t)}{dt}=\frac{d\hat{c}(t)}{dt}\ e^{-qt}-q\hat{c}(t)\ e^{-qt} \tag{5-1-2}$$

ここで、$\dfrac{dc(t)}{dt}=\dot{c}(t)$、$\dfrac{d\hat{c}(t)}{dt}=\dot{\hat{c}}(t)$ と表すと、(5-1-2)式は $\dot{c}(t)=[\dot{\hat{c}}(t)-$

$q\hat{c}(t)]e^{-qt}$ となるから、両辺を $c(t)=\hat{c}(t)\ e^{-qt}$ で割ると、$\dfrac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\dfrac{\dot{\hat{c}}(t)}{\hat{c}(t)}-q$ となる。これを、$\dot{\hat{c}}(t)$ について整理すると、

$$\dot{\hat{c}}(t)=\hat{c}(t)\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}+q\hat{c}(t) \tag{5-1-3}$$

となる。(5-1-3)式を本論の(52)式に代入すると、

$$\hat{c}(t)\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}+q\hat{c}(t)=\hat{c}(t)\frac{1}{\hat{\varepsilon}(t)}\ \{f'[k(t)]-\delta-\rho\}$$

となるから、両辺を $\hat{c}(t)$ で割ると、

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}+q=\frac{1}{\hat{\varepsilon}(t)}\{f'[k(t)]-\delta-\rho\}$$

となる。ここで、消費の変化に関する限界効用の弾力性を効率労働単位で評価し直し、それを新たに $\varepsilon(t)=-\dfrac{u''[c(t)]c(t)}{u'[c(t)]}$ と定義すれば、効率労働単位で評価される消費の動学方程式を導出することができる。

$$\begin{aligned}\dot{c}(t)&=c(t)\frac{1}{\varepsilon(t)}\{f'[k(t)]-\delta-\rho\}-c(t)q\\&=c(t)\frac{1}{\varepsilon(t)}\{f'[k(t)]-\delta-\rho-\varepsilon(t)q\}\end{aligned} \tag{5-1-4}$$

また、(5-1-3)式を本論の(74)式に代入すると、

$$\hat{c}(t)\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}+q\hat{c}(t)=\hat{c}(t)\frac{1}{\hat{\varepsilon}(t)}\{(1-\tau_a)\{f'[k(t)]-\delta\}-\rho\}$$

となるから、両辺を $\hat{c}(t)$ で割れば、

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}+q=\frac{1}{\hat{\varepsilon}(t)}\{(1-\tau_a)\{f'[k(t)]-\delta\}-\rho\}$$

が得られる。そして、$\hat{\varepsilon}(t)$ を $\varepsilon(t)=-\dfrac{u''[c(t)]c(t)}{u'[c(t)]}$ に置き換えて式を整理すれば、税制を考慮した効率労働単位の消費に関する動学方程式を導出するこ

とができる。

$$\dot{c}(t)=c(t)\frac{1}{\varepsilon(t)}\{(1-\tau_a)\{f'[k(t)]-\delta\}-c(t)q$$

$$=c(t)\frac{1}{\varepsilon(t)}\{(1-\tau_a)\{f'[k(t)]-\delta\}-\rho-\varepsilon(t)q\} \qquad (5\text{-}1\text{-}5)$$

【税制を考慮しない消費 Model】

$$\dot{c}(t)=c(t)\frac{1}{\varepsilon(t)}\{f'[k(t)]-\delta-\rho-\varepsilon(t)q\} \qquad (5\text{-}1\text{-}4)$$

【税制を考慮した消費 Model】

$$\dot{c}(t)=c(t)\frac{1}{\varepsilon(t)}\{(1-\tau_a)\{f'[k(t)]-\delta\}-\rho-\varepsilon(t)q\} \qquad (5\text{-}1\text{-}5)$$

他方、資本蓄積方程式(51)式および(73)式については、(5-1-1)式 $c(t)=\hat{c}(t)\,e^{-qt}$ を考慮して書き換えればよい。

【税制を考慮しない資本蓄積 Model】

$$\dot{k}(t)=f[k(t)]-c(t)-(n+q+\delta)k(t) \qquad (5\text{-}1\text{-}6)$$

【税制を考慮した資本蓄積 Model】

$$\begin{aligned}\dot{k}(t)=&(1-\tau_w-\tau_l)(1-\eta)f[k(t)]\\&+[(1-\tau_a)-(1-\tau_w-\tau_l)(1-\eta)]f'[k(t)]k(t)\\&-[n+q+(1-\tau_a)\delta]\,k(t)-(1+\tau_c)c(t)+tr(t)\end{aligned} \qquad (5\text{-}1\text{-}7)$$

以上、(5-1-4)式と(5-1-6)式、あるいは(5-1-5)式と(5-1-7)式からなる連立微分方程式体系が効率労働単位で評価される Ramsey Model である。

5-2. 法人実効税率について

前年度の事業税が今年度においては損金として扱われ、次年度には逆にそれが益金算入されるという扱われ方をするような税制度について考える。このとき、1円あたりで考えると、今年度支払う事業税の1円は次年度において損金扱いされることになるため、次年度は1円にかかる法人税分（τ_{Nf}）と事業税分（τ_{Nf}）に相当する額の（$\tau_{Nf}+\tau_{Lf}$）円だけ法人税の支払いを節約することができる。しかし、この法人税の節約分（$\tau_{Nf}+\tau_{Lf}$）のうち事業税分（τ_{Lf}）はその翌年には逆に益金として算入されるため、益金算入される τ_{Lf} に対して掛けられる法人税分（$\tau_{Nf}\tau_{Lf}$）と事業税分（$\tau_{Lf}{}^2$）だけその年の法人税の支払い額が増加する。そして、3年目にはまたこの事業税の増加分である（$\tau_{Lf}{}^2$）が再び損金扱いされるから、これに対する法人税分（$\tau_{Nf}\tau_{Lf}{}^2$）と事業税分（$\tau_{Lf}{}^3$）だけ法人税の支払いを節約することができる。

以上のように、今年度支払う事業税1円に対して生じる次年度以降の法人税の節約分について、それを現在価値（Tax）で表すと、割引率をρとすれば、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tax} &= \frac{\tau_{Nf}+\tau_{Lf}}{1+\rho} - \frac{\tau_{Lf}(\tau_{Nf}+\tau_{Lf})}{(1+\rho)^2} + \frac{\tau_{Lf}{}^2(\tau_{Nf}+\tau_{Lf})}{(1+\rho)^3} - \frac{\tau_{Lf}{}^3(\tau_{Nf}+\tau_{Lf})}{(1+\rho)^4} \\
&\quad + \frac{\tau_{Lf}{}^4(\tau_{Nf}+\tau_{Lf})}{(1+\rho)^5} \cdots\cdots \\
&= \frac{\tau_{Nf}+\tau_{Lf}}{1+\rho}\left(1 - \frac{\tau_{Lf}}{1+\rho} + \frac{\tau_{Lf}{}^2}{1+\rho^2} - \frac{\tau_{Lf}{}^3}{1+\rho^3} + \frac{\tau_{Lf}{}^4}{1+\rho^4} \cdots\cdots\right) \qquad (5\text{-}2\text{-}1)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、

$$
\mathrm{S} = \left(1 - \frac{\tau_{Lf}}{1+\rho} + \frac{\tau_{Lf}{}^2}{(1+\rho)^2} - \frac{\tau_{Lf}{}^3}{(1+\rho)^3} + \frac{\tau_{Lf}{}^4}{(1+\rho)^4} \cdots\cdots\right) \qquad (5\text{-}2\text{-}2)
$$

とおく。(5-2-2)式の両辺に $\frac{\tau_{Lf}}{1+\rho}$ を掛け、それを(5-2-2)式に加えれば、

$S + \frac{\tau_{Lf}}{1+\rho} S = 1$ となり、$S = \frac{1}{1+\frac{\tau_{Lf}}{1+\rho}} = \frac{1+\rho}{1+\rho+\tau_{Lf}}$ となるから、結局(5-2-

1）式は

$$\mathrm{Tax}=\left(\frac{\tau_{Nf}+\tau_{Lf}}{1+\rho}\right)\left(\frac{1+\rho}{1+\rho+\tau_{Lf}}\right)=\frac{\tau_{Nf}+\tau_{Lf}}{1+\rho+\tau_{Lf}} \tag{5-2-3}$$

となる。したがって、事業税の損金扱いを制度上認めるような場合には、企業が実際に負担する法人実効税率（τ_f）は$\tau_{Nf}+\tau_{Lf}$ではなく、次式で表されるように法人税の節約分、すなわち手元に残る所得の増分に対する事業税（τ_{Lf}）分だけ小さくなる。

$$\tau_f=\tau_{Nf}+\tau_{Lf}-\tau_{Lf}\left(\frac{\tau_{Nf}+\tau_{Lf}}{1+\rho+\tau_{Lf}}\right)=\frac{(1+\rho)(\tau_{Nf}+\tau_{Lf})}{1+\rho+\tau_{Lf}} \tag{5-2-4}$$

5-3. 事業税の考え方について

事業税を考慮した場合の税引き後利潤の定式化について考える。Πを事業税控除前の課税所得、T_L を事業税支払額とする。事業税支払後の利潤（$\Pi_t-T_{L,t-1}$）は、事業税支払額が $T_{L,t-1}=\tau_{Lf}\Pi_{t-1}$ と表されるから、$\Pi_t-T_{L,t-1}=\Pi_t-\tau_{Lf}\Pi_{t-1}$ となる。したがって、0 時点（$t=0$）を初期時点とすると、法人税の支払い総額は以下のような流列として表すことができる。

t＝0のとき　$(\tau_{Nf}+\tau_{Lf})\Pi_0$
t＝1のとき　$(\tau_{Nf}+\tau_{Lf})[\Pi_1-\tau_{Lf}\Pi_0]$
t＝2のとき　$(\tau_{Nf}+\tau_{Lf})[\Pi_2-\tau_{Lf}\Pi_1+\tau_{Lf}^2\Pi_0]$
t＝3のとき　$(\tau_{Nf}+\tau_{Lf})[\Pi_3-\tau_{Lf}\Pi_2+\tau_{Lf}^2\Pi_1-\tau_{Lf}^3\Pi_0]$
t＝4のとき　$(\tau_{Nf}+\tau_{Lf})[\Pi_4-\tau_{Lf}\Pi_3+\tau_{Lf}^2\Pi_2-\tau_{Lf}^3\Pi_1+\tau_{Lf}^4\Pi_0]$
t＝ …………………

ここで、0 期の法人税支払総額の推移に着目してみると、

t＝0 のとき　$(\tau_{Nf}+\tau_{Lf})\Pi_0$　：第 0 期における法人税の支払い総額
t＝1 のとき　$(\tau_{Nf}+\tau_{Lf})[-\tau_{Lf}\Pi_0]$　：第 1 期における$\tau_{Lf}\Pi_0$の損金算入

による法人税支払い総額の節約分

t＝2 のとき　$(\tau_{Nf}+\tau_{Lf})[\tau_{Lf}{}^{2}\Pi_0]$　：第 2 期における $\tau_{Lf}{}^{2}\Pi_0$ の益金算入による法人税支払い総額の増加分

t＝3 のとき　$(\tau_{Nf}+\tau_{Lf})[-\tau_{Lf}{}^{3}\Pi_0]$　：第 3 期における $\tau_{Lf}{}^{3}\Pi_0$ の損金算入による法人税支払い総額の節約分

t＝4のとき　$(\tau_{Nf}+\tau_{Lf})[\tau_{Lf}{}^{4}\Pi_0]$　：第 4 期における $\tau_{Lf}{}^{4}\Pi_0$ の益金算入による法人税支払い総額の増加分

t＝ …………………

0 期の事業税支払い総額に関する時間流列を割引現在価値の和で表せば、割引率を ρ として、

$$
\begin{aligned}
&(\tau_{Nf}+\tau_{Lf})\Pi_0-(\tau_{Nf}+\tau_{Lf})\left\{\frac{\tau_{Lf}}{1+\rho}\Pi_0-\frac{\tau_{Lf}{}^{2}}{(1+\rho)^2}\Pi_0+\frac{\tau_{Lf}{}^{3}}{(1+\rho)^3}\Pi_0\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\tau_{Lf}{}^{4}}{(1+\rho)^4}\Pi_0+\frac{\tau_{Lf}{}^{5}}{(1+\rho)^5}\Pi_0\cdots\cdots\right\}\\
&=(\tau_{Nf}+\tau_{Lf})\Pi_0-(\tau_{Nf}+\tau_{Lf})\frac{\tau_{Lf}}{1+\rho}\Pi_0\left\{1-\frac{\tau_{Lf}}{1+\rho}+\frac{\tau_{Lf}{}^{2}}{(1+\rho)^2}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\tau_{Lf}{}^{3}}{(1+\rho)^3}+\frac{\tau_{Lf}{}^{4}}{(1+\rho)^4}\cdots\cdots\right\}\\
&=(\tau_{Nf}+\tau_{Lf})\Pi_0-(\tau_{Nf}+\tau_{Lf})\frac{\tau_{Lf}}{1+\rho}\left(\frac{1+\rho}{1+\rho+\tau_{Lf}}\right)\Pi_0\\
&=\frac{(1+\rho)(\tau_{Nf}+\tau_{Lf})}{1+\rho+\tau_{Lf}}\Pi_0
\end{aligned}
$$

となる。これを 0 期から計画期間の終期（T 期）まで、すべての期の総和として表せば、$\dfrac{(1+\rho)(\tau_{Nf}+\tau_{Lf})}{1+\rho+\tau_{Lf}}\displaystyle\int_{t=0}^{T}\Pi_t\, e^{-\rho t}\,dt$ となる。

ただし、本研究では資本の調整費用の存在を仮定していないため、企業は利潤最大化問題において動学的な考慮を払う必要がない。これは、企業が各

期において静学的な利潤最大化問題を解けばよいことを示しており、したがって$\rho=0$として$\dfrac{(\tau_{Nf}+\tau_{Lf})}{(1+\tau_{Lf})}\Pi_t$を$t$期における法人税支払い額とみなすことができることを意味している。すなわち、法人実効税率を$\tau_f=\dfrac{(\tau_{Nf}+\tau_{Lf})}{(1+\tau_{Lf})}$と表せば、税引き後利潤は本論(68)式のように$(1-\tau_f)\Pi_t$と記述することができる。

注

1) 以下、第2章の Model の導出に関する詳細は、中田（2011）の第3章および第7章を参照せよ。
2) 代表的個人の効用関数の議論の中で、Romer（2011）は人口が増加する社会を前提としており、第t世代の効用を第$t-1$世代の$1+n$倍になると仮定して議論を展開している。一方、Blanchard and Fischer（1989）は人口が増加しない社会を前提として効用関数の議論を行っている。
3) 労働時間と技術水準がすべての個人において同一であると仮定したとき、総人口と労働投入量は同一視することができる。
4) (4)式の対数をとると、$\ln L(t)=nt\ln e=nt$となる。両辺を時間tで微分すると、$\dfrac{\dot{L}(t)}{L(t)}=n$となる。ただし、$\dot{L}(t)=\dfrac{dL(t)}{dt}$である。つまり、対数関数の時間微分は成長率を表す。(4)式のnはこのように定義される成長率である。
5) 本研究では、貨幣の存在しない実物経済を仮定している。ゆえに、価格の絶対水準は議論上問題にならない。これは、最終生産物価格を1に基準化して議論していると考えることもできる。また、最終生産物については1種類と仮定している。ゆえに、後に議論となるが、資本のレンタル価格は財の量的単位で測られる実質利子率となる。同様に、賃金率も財単位で測られる実質賃金率である。
6) Romer（1986）は、蓄積された知識を公共財と位置付け、それがすべての労働者の生産効率性に正の影響を与えると想定する。これは、外部性を有する学習関数として1つの研究テーマとなるべき問題である。本研究では、こうした労働の効率性への影響度を$Q(t)$で捉えて議論している。
7) 家計は、実質利子率と実質賃金率を所与として、効用の割引現在価値の総和を最大化するように、各期の資産保有量を決定する。
8) ここまでは、個人単位ではなく、家計単位で定義しているという意味で、大文字の記号を用いている。
9) (11)式の対数をとると、$\ln Q(t)=qt\ln e=qt$となる。両辺を時間tで微分すると、

$\frac{\dot{Q}(t)}{Q(t)}=q$ となる。ただし、$\dot{Q}(t)=\frac{dQ(t)}{dt}$ である。つまり、対数関数の時間微分は成長率を表す。(11)式の q はこのように定義される成長率である。

10) 後に企業 Model の定式化において明らかになるが、初期時点において家計に資産がまったくない状況、すなわち $a_0=0$ であったとすると、その期の貯蓄がまったく存在しないため、閉鎖経済においては投資の原資がなく、投資を実施することができなくなる。この場合、資本の形成は実現しない。すると、初期時点の生産量はゼロとなり、労働に対する賃金支払いも行われなくなるため消費も不可能（ゼロ）となる。こうした諸問題を回避するため、初期値制約として(19)式を設定する必要があるのである。

11) 終期に資産が負であるという状態は負債を抱えて計画期間を終了することを意味する。(20)式の終期制約が満たされない場合、家計に対して負債の踏み倒しを認めることになる。つまり、こうした踏み倒しの問題を回避するためには終期制約としての(20)式が必要になるのである。あるいは、この問題を次のように考えることもできる。効用関数では消費の限界効用を正と仮定しているため、負債の踏み倒しがもし可能であるとすると、家計は際限なく借り入れを行って消費を無限大に増やし、そのまま計画期間を終える方が効用は最大化することになる。ゆえに、こうした非社会的な行為を家計に認めない条件として(20)式が設定されると考えるのである。

12) 本稿では、計画期間を有限の T 期と仮定してモデルを組み立てている。もし、$T\to\infty$ とするのであれば、横断性条件は $\lim_{t\to\infty}[\lambda(t)a(t)]=0$ と記述されるから、$\lambda(T)=e^{(n-\rho+q)T}u'[c(T)]$ において $(n+q)<\rho$ という条件のもとで $e^{(n-\rho+q)T}\to 0$ となり、$\lambda(T)$ の極限値はゼロとなる。この場合、最適解として資産の内点解、つまり $a(T)>0$ というケースも可能となる。

13) 本研究では、企業が２つの生産要素、すなわち資本と労働のフローとしてのサービスを賃借りして生産活動を行うと仮定している。本稿では資本の調整費用の存在を仮定していないため、企業の利潤最大化問題において動学的な考慮をする必要がない。したがって、企業は全ての時点において静学的な利潤最大化問題を順次解いていけばよいことになる。これは、動学的な解を静学的な解の集合（系列）と見なせることを意味する。

14) 本稿では、家計が資本と労働を非弾力的に供給すると仮定している。これは、家計が資本と労働をそれぞれ資本のレンタル価格や賃金率とは無関係に供給することを意味する。逆に言うと、資本のレンタル価格と賃金率が家計の供給する資本量と労働量によって調整されるということである。こうした結果として、生産要素市場では完全雇用が実現する。

15) 以下、第３章の Model の導出に関する詳細は、Barro and Sala-i-Martin（2003）の Chapter 3 を参照せよ。

16) 本稿では、国債や地方債などの債券発行による財政ファイナンスを考慮していない。これは、政府部門が均衡予算主義を採用していることを示唆している。

17) ここでは、簡単化のため、政府による財貨・サービスの購入が家計の効用や企業の

生産活動に対して何ら影響を与えないと仮定している。また、移転支払については家計の所得水準やその他種々の特性に影響されず、一括額として支出されると仮定している。

References

Acemogle, D.（2009）*Introduction to Modern Economic Growth*, Princeton University Press.

Barro, R. J. and X. Sala-i-Martin（2004）*Economic Growth* 2nd edition, MIT Press.

Baumol, W. J.（1986）“Productivity Growth, Convergence, and Welfare: What the Long-Run Data,” *American Economic Review,* Vol. 76, pp. 1072-1085.

Blanchard, O. J. and S. Fisher（1989）*Lectures on Macroeconomics*, MIT Press.

Cass, D.（1965）“Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation,” *Review of Economic Studies*, Vol. 32, pp. 233-240.

Caselli, F. and J. Ventura（2000）“A Representative Consumer Theory of Distribution,” *American Economic Review*, Vol. 90, pp. 909-926.

Cobb, C. W. and P. H. Douglas（1928）“A Theory of Production,” *American Economic Review*, Vol. 18, pp. 139-165.

Inada, K.（1963）“On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization,” *Review of Economic Studies*, Vol. 30, pp. 119-127.

Koopmans, T. C.（1965）*On the Concept of Optimal Economic Growth, in the Economic Approach to Development Planning*, North Holland.

Ljungqvist, L. and T. J. Sargent（2018）*Recursive Macroeconomic Theory* 4th edition, MIT Press.

McCandless, G.（2008）*The ABCs of RBCs: An Introduction to Dynamic Macroeconomic Models*, Harvard University Press.

Nagatomi,T.（2000）“*The Financial Accelerator in Macroeconomics: Evidence from Japanese Financial Corporate Groups*,” in S. Suwa ed., Current Issues in Economic Policy, Institute for Research in Contemporary Political and Economic Affairs, Waseda University, Tokyo, Japan, pp. 133-155.

Ramsey, F. P.（1928）“A Mathematical Theory of Saving,” *Economic Journal*, Vol. 38, pp. 543-559.

Romer, D.（2011）*Advanced Macroeconomics* 4th edition, McGraw-hill.

Romer, P. M.（1986）“Increasing Returns and Long-Run Growth,” *Journal of Political Economy*, Vol. 94, pp. 1002-1037.

Romer, P. M.（1990）“Endogenous Technological Change,” *Journal of Political Economy*, Vol. 98, pp. S71-S102

Solow, R. M.（1956）“A Contribution to the Theory of Economic Growth,” *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 70, pp. 65–94.

Solow, R. M.（1957）“Technical Change and the Aggregate Production Function,” *Review of Economics and Statistics*, Vol. 39, pp. 312–320.

Swan, T. W.（1956）“Economic Growth and Capital Accumulation,” *Economic Record*, Vol. 32, pp. 334–361.

中田真佐男（2011）『動学マクロ経済学に必要な数学』日本評論社.

永冨隆司（2008）「税制改正と企業の投資機会の動向調査」日本財政学会（第 65 回全国大会）報告論文（於：京都大学）.