論文　Original Paper

非斉次反応項を持つ準線形放物型方程式の解の一意性

鈴　木　龍　一*，岡　田　篤　子*

Uniqueness of solutions of a quasilinear parabolic equation with an inhomogeneous reaction

Ryuichi Suzuki*，Atsuko Okada*

Abstract: We consider non-negative solutions of the Cauchy problem for a quasilinear parabolic equation with an inhomogeneous reaction: $u_t = \Delta u^m + \langle x \rangle^\theta u^p$ in $\mathrm{R}^N \times (0, T)$. We show some comparison theorem for the Cauchy problem under restrictions on the growth rate of solutions as $|x| \to \infty$.

Key words: the uniqueness of solutions, quasilinear parabolic equation, inhomogeneous reaction

1. は じ め に

本論文では，次のような空間変数に依存する反応項（非斉次反応項）を持つ準線形放物型方程式のCauchy問題について考える。

$$u_t = \Delta u^m + \langle x \rangle^\theta u^p \quad \text{in } \mathbf{R}^N \times (0, T), \tag{1.1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{in } \mathbf{R}^N. \tag{1.2}$$

ただし，$u_t = \partial u / \partial t$，$\Delta$はN次元ラプラシアン，$p > m \geq 1$，$\theta \geq 0$，$\langle x \rangle = \sqrt{|x|^2 + 1}$，$u_0(x)$ はR^Nで定義された非負の連続関数である。我々は，Cauchy 問題（1.1）（1.2）の非負の（弱）解のみ考える。（弱）解は，次のように定義される。

定義1.1. 次の（i）（ii）の条件が成り立つ時，$\mathrm{R}^N \times [0, T)$ で定義された関数 $u(x, t)$ は$\mathrm{R}^N \times [0, T)$ における方程式（1.1）の（弱）解であるという。

（i）$\mathrm{R}^N \times [0, T)$ において$u(x, t) \geq 0$でありかつ$u(x, t) \in C(\mathrm{R}^N \times [0, \tau])$ が各$\tau \in (0, T)$ に対して成り立つ。

（ii）滑からな境界$\partial\Omega$を持つ任意の有界領域$\Omega \subset \mathrm{R}^N$，各$\tau \in (0, T)$，境界$\partial\Omega$で零になる任意の非負の関数$\varphi(x, t) \in C^{2,1}(\overline{\Omega} \times [0, T))$ に対し，

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega u(x,\tau)\varphi(x,\tau)\,dx - \int_\Omega u(x,0)\varphi(x,0)\,dx \\
&= \int_0^\tau \int_\Omega \{u\partial_t\varphi + u^m\Delta\varphi + \langle x\rangle^\theta u^p\varphi\}\,dx\,dt \\
&\qquad - \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} u^m \partial_\nu \varphi\, dSdt
\end{aligned} \tag{1.3}$$

が成り立つ。ただし，νは境界での外向き単位法線ベクトルである。

優解［または劣解］も同様に定義される。ただし，優解［または劣解］の場合は，（1.3）の等号＝を不等号≥［または≤］に置き換える。

我々の目的は，準線形放物型方程式（1.1）の解の一意性を示すことである。それは次の比較定理から直ぐに導かれる。

定理1.2（比較定理）. uを$\mathrm{R}^N \times (0, T)$ における（1.1）の優解とし，vを$\mathrm{R}^N \times (0, T)$ における（1.1）の劣解とする。次の不等式が成り立つと仮定する：ある数$M > 0$が存在して，

$$\|\langle\cdot\rangle^{\theta/(p-1)} u(\cdot,t)\|_\infty + \|\langle\cdot\rangle^{\theta/(p-1)} v(\cdot,t)\|_\infty \leq M \quad \textit{for } t \in [0,T). \tag{1.4}$$

ただし，$\|h\|_\infty = \sup_{x \in \mathrm{R}^N} |h(x)|$ *for* $h \in L^\infty(\mathrm{R}^N)$である。この時，$v(x, 0) \leq u(x, 0)$ *in* R^Nならば，全領域$\mathrm{R}^N \times [0, T)$において$v \leq u$が成り立つ。

この定理は次の命題からの直接の帰結である。

命題1.3. uを$\mathrm{R}^N \times (0, T)$ における（1.1）の優解とし，vを$\mathrm{R}^N \times (0, T)$ における（1.1）の劣解とする。この時，ある数$M > 0$が存在して（1.4）が成り立つならば，各$t \in (0, T)$に対し次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^N} [v(x,t) - u(x,t)]_+ e^{-\langle x\rangle}\,dx \\
&\leq e^{3K_1 t} \int_{\mathbf{R}^N} [v(x,0) - u(x,0)]_+ e^{-\langle x\rangle}\,dx
\end{aligned} \tag{1.5}$$

ただし，$[a]_+ = \max\{a, 0\}$であり，

* 国士舘大学理工学部

$$K_1 = \sup\left\{ \frac{\xi_1^m - \eta_1^m}{\xi_1 - \eta_1} + \frac{\xi_2^p - \eta_2^p}{\xi_2 - \eta_2} \,\middle|\, 0 \le \xi_i,\, \eta_i \le M,\ \xi_i \ne \eta_i\,(i = 1, 2) \right\} + 1 < \infty \tag{1.6}$$

である。

従って，解の一意性を示すためには、この命題を示せば十分であり，その証明は次のセクションで行われる。

2. 命題1.3の証明

このセクションでは，命題1.3を示す。証明の方法はBertsch-Kersner-Peletier［2］の方法と同様である。

命題1.3の証明. u（またはv）を$\mathrm{R}^N\times(0, T)$における（1.1）の優解（または劣解）とし，ある数$M>0$に対して（1.4）が成り立つと仮定する。この時，$\theta\ge 0$より，

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty + \|v(\cdot,t)\|_\infty \le \|\langle\cdot\rangle^{\theta/(p-1)}u(\cdot,t)\|_\infty + \|\langle\cdot\rangle^{\theta/(p-1)}v(\cdot,t)\|_\infty \le M \quad \text{for } t\in[0,T) \tag{2.1}$$

である。更に，$B_R=\{x\in\mathrm{R}^N \,|\, |x|<R\}$と置くと，任意の非負関数$\varphi\in C^{2,1}(\overline{B}_R\times[0, T))$（ただし，境界$\partial B_R$で零になる）に対して，

$$\int_{B_R}(v(x,\tau)-u(x,\tau))\varphi(x,\tau)\,dx - \iint_{Q_\tau}(v-u)(\varphi_t+\phi\Delta\varphi)\,dxdt \le \int_{B_R}(v(x,0)-u(x,0))\varphi(x,0)\,dx + \iint_{Q_\tau}(v-u)g\varphi\,dxdt - \int_0^\tau\int_{\partial B_R}(v^m-u^m)\,\partial_\nu\varphi\,dSdt \tag{2.2}$$

が成り立つ。ただし，$Q_\tau=B_R\times(0,\tau)\,(\tau<T)$，$\nu$は境界の外向き単位法線ベクトル，

$$\phi(x,t) = \frac{v^m-u^m}{v-u} = m\int_0^1(\xi v+(1-\xi)u)^{m-1}\,d\xi,$$

$$g(x,t) = \frac{h^p-w^p}{h-w} = p\int_0^1(\xi h+(1-\xi)w)^{p-1}\,d\xi,$$

$h=\langle x\rangle^{\theta(p-1)}v$，$w=\langle x\rangle^{\theta(p-1)}u$である。ここで，(1.4)と(2.1)より，次の事に注意する。

$$0\le\phi+g+1\le K_1 \quad \text{in } Q_\tau = B_R\times(0,\tau). \tag{2.3}$$

ただし，K_1は（1.6）で定義されたものである。

我々は，滑らかな正の関数列$\{\phi_n\}\subset C^\infty(\mathrm{R}^N\times(-\infty,\ \infty))$で次の事が成り立つようなものを選ぶ（see［1］）：

$$\frac{1}{n}\le\phi_n\le\|\phi\|_{L^\infty(Q_\tau)}+\frac{1}{n} \quad \text{in } Q_\tau, \tag{2.4}$$

$$\frac{\phi_n-\phi}{\sqrt{\phi_n}}\to 0 \quad \text{in } L^2(Q_\tau) \quad \text{as } n\to\infty. \tag{2.5}$$

更に，$\chi\in C_0^\infty(\mathrm{R}^N)$を$0\le\chi\le 1$を満たすようにとる。$R_1>0$を$\mathrm{supp}\chi\subset B_{R_1}$が成り立つように大きくとり，$R>2R_1$とする。そして，$\psi_{n,R}\in C^\infty(\overline{B}_R\times[0,\tau])\,(n\ge 1)$を次の方程式の解とする。

$$\begin{cases}\psi_t+\phi_n\Delta\psi = 2K_1\psi & \text{in } B_R\times[0,\tau),\\ \psi=0 & \text{on } \partial B_R\times[0,\tau),\\ \psi(x,\tau)=\chi e^{-\langle x\rangle} & \text{in } B_R.\end{cases} \tag{2.6}$$

この時，次の補題が必要である。 □

補題2.1. $n\ge 1$，$R>\max\{2R_1, 2\}$である時，次が成り立つ。

(i) $0\le\psi_{n,R}\le e^{-\langle x\rangle}$ *in* $\bar{Q}_\tau$;
(ii) $\iint_{Q_\tau}\phi_n(\Delta\psi_{n,R})^2\,dxdt<C$;
(iii) $\sup_{0\le t\le\tau}\int_{B_R}|\nabla\psi_{n,R}|^2(t)\,dx<C$;
(iv) $0\le -\int_{|x|=R}\partial_\nu\psi_{n,R}\,dS\le CR^{N-2}e^{-\langle R/2\rangle}$ *on* $\partial B_R\times[0,\tau]$.

ただし，$\langle R\rangle=\sqrt{R^2+1}\ (R>0)$で，$C>0$は$\chi$にのみ依存する定数である（$n$，$R$には依存しない）。

証明. まず，(i）と（iv）を示す。$\zeta(x,t)=\psi_{n,R}(x,\tau-t)$と変数変換する。その時，$\zeta$は次の問題の解である。

$$\begin{cases}\zeta_t-\hat{\phi}_n\Delta\zeta=-2K_1\zeta & \text{in } B_R\times(0,\tau],\\ \zeta=0 & \text{on } \partial B_R\times(0,\tau],\\ \zeta(x,0)=\chi e^{-\langle x\rangle} & \text{in } B_R.\end{cases} \tag{2.7}$$

ただし，$\hat{\phi}_n(x,t)=\phi_n(x,\tau-t)$である。$k(x)=e^{-\langle x\rangle}$と置き$k$と$\zeta$の大きさを$\overline{B}_R\times[0,\tau]$で比較する。まず，(2.3)と（2.4）より，次の事に注意する。

$$\hat{\phi}_n\le\|\phi\|_{L^\infty(Q_\tau)}+\frac{1}{n}\le K_1 \quad \text{in } Q_\tau.$$

よって，

$$\Delta k(x)\le 2e^{-\langle x\rangle}=2k(x) \tag{2.8}$$

であるので，

$$-\hat{\phi}_n\Delta k\ge -2K_1k \quad \text{in } B_R$$

が成り立つ。故に，kは$B_R\times[0,\tau]$で（2.7）の方程式の優解であることがわかる。不等式$\zeta\le k$が，領域$B_R\times(0, T)$の放物型境界で成り立つ事に注意すると，線形放物型方程式に対する比較定理より，$\zeta\le k$ in $B_R\times(0, T)$が成り立つことがわかる。$\zeta\ge 0$ in Q_τも示すのは難しくない。よって，(i）を得る。

次に，(iv)を示す。我々は，次の問題の解$\hat{k}$を利用する。

$$\begin{cases}\Delta\hat{k}=2\hat{k} & \text{in } B_R\backslash\bar{B}_{R_1},\\ \hat{k}=e^{-\langle x\rangle} & \text{on } |x|=R_1,\\ \hat{k}=0 & \text{on } |x|=R.\end{cases} \tag{2.9}$$

その時，線形楕円型方程式に対する比較定理より$0\le\hat{k}\le$

$k=e^{-\langle x\rangle}$ in $B_R\setminus\overline{B}_{R_1}$である。なぜならば，$\hat{k}=k=e^{-\langle x\rangle}$ on $|x|=R_1$，$\hat{k}=0\leq k$ on $|x|=R$であり，更に（2.8）が成り立つからである。さらに，不等式$\hat{k}\geq 0$と不等式$0\leq\phi_n\leq K_1$より，$-\phi_n\Delta\hat{k}\geq -2K_1\hat{k}$が成り立つ。よって，$\zeta(x,0)=0\leq\hat{k}(x)$ in $\overline{B}_R\setminus B_{R_1}$と$\zeta(x,t)=\psi_{n,R}(x,\tau-t)\leq\hat{k}(x)$ on $\partial(B_R\setminus\overline{B}_{R_1})\times[0,\tau]$であるので，線形放物型方程式に対する比較定理より，$\psi_{n,R}(x,\tau-t)=\zeta(x,t)\leq\hat{k}(x)$ in $\overline{B}_R\setminus B_{R_1}\times[0,\tau]$となる。故に，

$$0\leq -\partial_\nu\psi_{n,R}(x,t)\leq -\partial_\nu\hat{k}(x)\quad\text{on } |x|=R \text{ and } t\in[0,\tau]\tag{2.10}$$

が成り立つ。

一方，$\xi(x)$をR^Nで非負のC^∞-関数で，次の条件を満たすものとする：$\xi(x)=0$ in $|x|\leq 1$であり$\xi(x)=1$ in $|x|\geq 2$。$R>\max\{2R_1,2\}$に対して$\xi_R(x)=\xi(2x/R)$と置く。この時，

$$\xi_R(x)=0\quad\text{in } |x|<\frac{R}{2},\quad \xi_R(x)=1 \text{ in } |x|>R$$

であり

$$\begin{aligned}&|\nabla\zeta_R(x)|\leq\frac{2}{R}|\nabla\xi(2x/R)|\leq\frac{C}{R},\\&|\Delta\xi_R(x)|\leq\frac{4}{R^2}|\Delta\xi_R(2x/R)|\leq\frac{C}{R^2}\ \text{in } \mathbf{R}^N\end{aligned}\tag{2.11}$$

が成り立つ。(2.9）の方程式の両辺にξ_Rを掛け，次に$B_R\setminus\overline{B}_{R/2}$で積分し，部分積分することにより，

$$\begin{aligned}&\int_{|x|=R}\partial_\nu\hat{k}\,dS+\int_{R/2\leq|x|\leq R}\hat{k}\Delta\xi_R\,dx\\&\quad-\int_{|x|=R}\hat{k}\partial_\nu\xi_R\,dS=\int_{R/2\leq|x|\leq R}2\hat{k}\xi_R\,dx.\end{aligned}\tag{2.12}$$

よって，$0\leq\hat{k}(x)\leq k(x)=e^{-\langle x\rangle}$ in $B_R\setminus\overline{B}_{R_1}$に注意し，(2.9）と（2.10）と（2.11）を使えば，以下の事を得る。

$$\begin{aligned}&-\int_{|x|=R}\partial_\nu\psi_{n,R}\,dS\\&\quad\leq-\int_{|x|=R}\partial_\nu\hat{k}\,dS\leq\int_{R/2\leq|x|\leq R}\hat{k}\Delta\xi_R\,dx\\&\quad\quad\leq\frac{C}{R^2}\int_{R/2\leq|x|\leq R}e^{-\langle x\rangle}\,dx\leq C'R^{N-2}e^{-\langle R/2\rangle}\\&\quad\quad\quad\text{for } R>\max\{2R_1,2\}.\end{aligned}$$

ただし，CとC'は正の定数である。よって（iv）を得る。

最後に，(ii）と（iii）を証明する。(2.6）の方程式の両辺に$\Delta\psi_{n,R}$を掛け，$B_R\times(t,\tau)\,(t<\tau)$で積分し，部分積分すると

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{B_R}|\nabla\psi_{n,R}|^2(t)\,dx+\int_t^\tau\int_{B_R}\phi_n(\Delta\psi_{n,R})^2\,dxdt\\&\quad\quad+K_3\int_t^\tau\int_{B_R}|\nabla\psi_{n,R}|^2\,dxdt\\&=\frac{1}{2}\int_{B_R}|\nabla\psi_{n,R}|^2(\tau)\,dx\leq C\int_{\mathbf{R}^N}\big(|\nabla\chi|^2+|\chi|^2\big)\,dx\end{aligned}$$

が得られ，これから（ii）と（iii）が導かれる。 □

命題1.3の証明（続き）．(2.2）のテスト関数として，$\varphi(x,t)=\psi_{n,R}(x,t)$を考える。この時，各$\tau\in(0,T)$に対して，

$$\begin{aligned}&\int_{B_R}(v(x,\tau)-u(x,\tau))\chi e^{-\langle x\rangle}\,dx\\&\leq\iint_{Q_\tau}(v-u)(\phi-\phi_n)\Delta\psi_{n,R}\,dxdt\\&\quad+\int_{B_R}(v(x,0)-u(x,0))\psi_{n,R}(x,0)\,dx\\&\quad\quad+\iint_{Q_\tau}(2K_1+g)(v-u)\psi_{n,R}\,dxdt\\&\quad\quad\quad-\int_0^\tau\int_{\partial B_R}(v^m-u^m)\partial_\nu\psi_{n,R}\,dSdt,\\&\leq 2M\iint_{Q_\tau}|(\phi-\phi_n)\Delta\psi_{n,R}|\,dxdt\\&\quad+\int_{B_R}[v(x,0)-u(x,0)]_+\psi_{n,R}(x,0)\,dx\\&\quad\quad+3K_1\iint_{Q_\tau}[v-u]_+\psi_{n,R}\,dxdt\\&\quad\quad\quad-2M^m\int_0^\tau\int_{\partial B_R}\partial_\nu\psi_{n,R}\,dSdt\end{aligned}\tag{2.13}$$

が成り立つ。ただし，$[u]_+=\max\{u,0\}$．なお，この計算においては，$\partial_\nu\psi_{n,R}\leq 0$ on $\partial B_R\times(0,\tau)$という事実および不等式（2.1）と（2.3）を使っている。
ここで，補題2.1（ii）と（2.5）から，次の事実に注意する。

$$\begin{aligned}&\|(\phi-\phi_n)\Delta\psi_{n,R}\|_{L^1(Q_\tau)}\\&\leq\left\|(\phi-\phi_n)/\sqrt{\phi_n}\right\|_{L^2(Q_\tau)}\left\|\sqrt{\phi_n}\Delta\psi_{n,R}\right\|_{L^2(Q_\tau)}\\&\qquad\qquad\qquad\to 0 \text{ as } n\to\infty.\end{aligned}$$

故に，(2.13）で$n\to\infty$とすれば，補題2.1（iv）を用いることにより，

$$\begin{aligned}&\int_{B_R}(v(x,\tau)-u(x,\tau))\chi e^{-\langle x\rangle}\,dx\\&\leq\int_{B_R}[v(x,0)-u(x,0)]_+e^{-\langle x\rangle}\,dx\\&\quad+3K_1\iint_{Q_\tau}[v-u]_+e^{-\langle x\rangle}\,dxdt\\&\quad\quad+2CM^m\tau R^{N-2}e^{-\langle R/2\rangle}\end{aligned}\tag{2.14}$$

を得る。(2.14）で$R\to\infty$とすれば，$0\leq\chi\leq 1$を満たす任意の$\chi\in C_0^\infty(\mathrm{R}^N)$に対して，

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbf{R}^N}(v(x,\tau)-u(x,\tau))\chi e^{-\langle x\rangle}\,dx\\&\leq\int_{\mathbf{R}^N}[v(x,0)-u(x,0)]_+e^{-\langle x\rangle}\,dx\\&\qquad\qquad+3K_1\int_0^\tau\int_{\mathbf{R}^N}[v-u]_+e^{-\langle x\rangle}\,dxdt.\end{aligned}$$

従って,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^N} [v(x,\tau) - u(x,\tau)]_+ e^{-\langle x \rangle}\, dx \\
&\le \int_{\mathbf{R}^N} [v(x,0) - u(x,0)]_+ e^{-\langle x \rangle}\, dx \\
&\qquad\qquad + 3K_1 \int_0^\tau \int_{\mathbf{R}^N} [v-u]_+ e^{-\langle x \rangle}\, dxdt \\
&\qquad\qquad\qquad \text{for } \tau \in (0,T).
\end{aligned}
$$

ここで,グロンウォールの補題を用いれば,(1.5) を得ることができる。 □

参考文献

1) D. G. Aronson, M. G. Crandall and L. A. Peletier, Stabilization of solutions of a degenerate nonlinear diffusion problem, Nonlinear Anal. 6 (1982), 1001-1022.
2) M. Bertsch, R. Kersner and L. A. Peletier, Positivity versus localization in degenerate diffusion equations, Nonlinear Anal. 9 (1985), 987-1008.