第 **8** 回森和英記念計算科学研究会

心臓壁に対する非線形弾性波動モデルを目指して
Nonlinear Elastic Waves in Heart Wall

戸 次 直 明[1]，石 井 啓 翔[2]，城 戸 真 弥[2]，
新 谷 正 嶺[3]，鷲 尾 巧[4]

心臓壁に対する非線形弾性波動伝播モデルの構築を目指して，等方的弾性体における変形が大きい場合を扱う非線形弾性論について考察し，そのような弾性体を伝播する大振幅表面波が典型的なソリトン解を持つような方程式系で記述できるかどうかの可能性について議論する．

1. は じ め に

今から約 100 年ほど前，19 世紀後半，レイリー卿は，境界のある弾性体表面を伝播する線形弾性波動について，最初に研究したので，弾性体表面を伝播する線形弾性波動は，レイリー波 と呼ばれている(1)．現在では，レイリー波を含めて境界のある弾性体中を伝播する波動（ガイド波）の技術は，民生用途でも，魚群探知機や医療用超音波検査装置などとして普及し，工業製品などに対する非破壊検査などの分野でも広く利用されている．

レイリー波を含めてガイド波は境界をもつ様々な形状の弾性体構造物に沿って伝播する弾性波の総称であり，その多くは，弾性体に斜角入射された縦波超音波が境界面で反射されることでその一部が横波超音波に変換されて（モード変換）弾性体内部を伝播する．また，横波超音波の伝播においても，境界面での反射を繰り返す過程でモード変換が生じて，一部は縦波超音波に変換されて伝播する．このように，ガイド波は，縦波と横波が伝播する過程でモード変換を繰り返すことにより，境界表面が うねる ような伝播挙動を示す．このように，弾性体表面付近を伝播する弾性波に対して，その法線方向に変位しながら伝播する弾性波のことをレイリー波といい，その水平方向に変位しながら伝播する弾性波のことをラブ波という(2)．複雑にモード変換を繰り返すガイド波の伝播挙動は非常に複雑で，入射する超音波の周波数や弾性体の形状に強く依存する．そのため，平板や円柱(3, 4) などのように，形状が比較的に単純な場合を除き，境界条件の複雑さのために，線形波動伝播にもかかわらず，ガイド波の伝播挙動を理論的に把握することは現在でも簡単ではない．

ラム波は，空気（境界）に接する平板（弾性体）中を伝播するガイド波の一種であり，その伝播特性は，矩形の断面を持つ平板の材質やその厚さ，超音波の周波数に強く依存することが，ラム卿によって，初めて明らかにされた(3)．また，その伝播モードには，ラム波の平板表面の うねり方 に応じて，対称モード（Symmetric, S_m）と非対称モード（Antisymmetric, A_m）の 2 種類のモードが存在し，さらにそれぞれの高次モード（次数，$m = 0, 1, 2, \cdots$）が同時に伝播することが示された．ラム卿が論じたのは，空気に接する平板中を伝播する場合の弾性波の特性であり，平板中を伝播する超音波は平板と空気との境界面において，一部は空気中へ透過するするけれども，そのエネルギーの大部分は平板内部へ反射されるので，

1 早稲田大学理工学術院・理工学研究所
2 早稲田大学基幹理工学部・応用数理学科
3 東京大学大学院・理学系研究科
4 東京大学大学院・新領域創成科学研究科

空気中への透過エネルギーの損出は小さいので無視できた．しかしながら，血液などに浸った平板中を伝播するラム波の場合には，血液中への透過エネルギーの損出は小さくないので，これらのエネルギー損出を考慮しなければならない．比較的最近，超音波の医療診断への応用を目指して，Kundu や Kanai は，ラム波を血液に浸った平板中を伝播するガイド波の場合へ拡張した[5, 6]．

東北大学の金井研究室で開発された超音波医療診断装置では，胸壁上から計測した反射超音波の直交検波出力信号の振幅と位相の両者を用いて，対象の瞬時的な位置を決定することによって高精度トラッキングを行い，拍動によって大きく動いている人の心臓壁上の微小な興奮波振動を高精度に計測した．この興奮波の寿命は数ミリ秒で非常に短いけれども，その位相速度の力学特性を説明するために，金井[6] はラム波モデルに基づいて，Kundu が提案した分散関係式をこの興奮波に適用した．また，若い健康な男性の心室中隔壁（IVS）の粘弾性係数を，非線形最適化法を使って，非侵襲的 in situ に初めて推定した．最近，ラム波モデルの非線形最適化法の妥当性について再考察して，拍動によって励起された心臓壁上のパルス波状の興奮波の位相速度の分散関係の物理的意味と，超音波医療診断装置による観測結果が定性的によく説明できること等が示された[7]．

観測された興奮波の非線形性が強くなった場合，心基部から心尖部の方向に，ラム波が非線形変調を受けて，そのラム波の位相欠陥が発現したローカルポイントが源になってラム波を前後にヘテロクリニックに励起し，その位相欠陥による位相の飛びが振幅の落ち込みを伴いながら伝播することが観察された．即ち，収縮末期の大動脈弁閉鎖時に，大動脈弁の閉鎖に伴って心室中隔壁（IVS）上に沿って伝播するパルス波状の非線形ラム波の位相特異点が伝播しながら生成消滅することが観察された．そして，ラム波の非線形変調による位相特異点の力学特性が詳しく調べられた．この非線形粘弾性ラム波の位相特異点の 1 次元の力学特性は，1 次元複素ギンツバーグ · ランダウ方程式における Bekki-Nozaki (BN) ホール 解[8] で記述できる場合があることなどが既に示されている[9, 10, 11]．

一方，鷲尾らは，心拍動における心筋の収縮弛緩とサルコメア長の変化を記述する筋原線維の連続体モデルを用いて，数値シミュレーションを実行し，サルコメアの振舞いを定量的に説明することに成功している[12]．

ここでは，心臓壁に対する非線形弾性波動伝播モデルの構築を目指して，等方的弾性体における変形が大きい場合を扱う非線形弾性論について考察し，そのような弾性体を伝播する大振幅表面波が典型的なソリトン解を持つような方程式系で記述できるかどうかの可能性について議論する．

2.　弾性体の方程式と線形弾性波

ここでは，心臓の筋原繊維を等方弾性体で近似できる場合を考察する．まず，そのような線形弾性波を記述する弾性体の方程式を導出する．弾性体内の変形が微小である場合，密度 (ρ) の時間的変化は密度自体に比べて無視することができるので，密度は時間的に一定であると近似できる．このとき，弾性体の微小変形に対して，Lagrange 表示は，時刻 t と Cartesian 座標（x_j）を用いた Euler 表示で近似できる．従って，弾性体を記述する運動方程式は，外力が無い場合，

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i = \frac{1}{\rho}\sum_j \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}, \tag{1}$$

と書ける．ただし，$\boldsymbol{u} = u_i (i = 1, 2, 3)$ は速度，P_{ij} は応力テンソルで，ラメの弾性定数 λ と μ（古典的微小弾性論），と歪みテンソル E_{ij} を用いて，

$$P_{ij} = \lambda \sum_k E_{kk}\delta_{ij} + \mu(E_{ij} + E_{ji}), \tag{2}$$

と表される．応力テンソルの時間微分は，上式より，

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial t} = \lambda \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \mu\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big), \tag{3}$$

のように表される．運動方程式 (1) の両辺を時間微分して，上式を代入すると，速度 u_i に対する方程式，

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho}\sum_j \Big[(\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\Big) + \mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}\Big], \tag{4}$$

が得られて，これは弾性体の方程式と呼ばれている．速度の発散 (divergence) は，

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{u} = \frac{\partial}{\partial t}\sum_i E_{ii} = \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \tag{5}$$

のように書けるので，式 (4) の両辺の発散をとると，

$$\frac{\partial^2 \mathrm{div}\ \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = c_l^2 \nabla^2 \mathrm{div}\ \boldsymbol{u}, \tag{6}$$

となり，弾性体に対する速度の発散が，3 次元空間における疎密波の縦波として，位相速度 $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ で伝播することを示している．同様に，式 (4) の両辺の回転 (rotation) をとると，

$$\frac{\partial^2 \mathrm{rot}\ \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = c_t^2 \nabla^2 \mathrm{rot}\ \boldsymbol{u}, \tag{7}$$

となり，弾性体に対する速度の回転（渦度）が，3 次元空間における横波として，位相速度 $c_t = \sqrt{\mu/\rho}$ で伝播することを示している．式 (6) と (7) から，等方弾性体の中の任意の弾性波は，回転のない発散波（縦波）とソレノイダルな回転波（横波，シアー波）とから成ることがわかる[13]．

3.　2 次元レイリー波

任意のベクトル場は，回転を伴わない場と発散を伴わない場との和として表せるので，Lagrange 表示における座標（X_1, X_2, X_3）を用いる．式 (1) では $\boldsymbol{u}$ は速度として使用したが，今後，$\boldsymbol{u}$ は，変位ベクトル $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ として，

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_l} + \boldsymbol{u_t}, \tag{8}$$

と書くことにする．ただし，

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{u_l} = 0,$$
$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{u_t} = 0.$$

弾性体の表面付近だけに存在して，その表面に沿って伝播する表面波を考察する．このような弾性波をレイリー波（Rayleigh wave）という．今後，簡単のために，弾性体は，2 次元 (X_1, X_2) 平面における，正の X_2 軸上の $X_2 = 0$ を境界とする半無限空間 $X_2 \geqq 0$ を占めているとし，X_1 軸方向に伝播する 2 次元レ

イリー波 ($u_3 = 0$) を考える．

一般に，密度 ρ_0 の 2 次元レイリー波を記述する運動方程式は，Lagrange 表示で，

$$\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j}, \tag{9}$$

と書ける[14]．ただし，T_{ij} はパイオラ・キルヒホッフの応力テンソルである．一方、式 (8) を自動的に満たすようなスカラーの変位ポテンシャル $\phi_1(X_1, X_2), \phi_2(X_1, X_2)$ を導入する：

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2) = \mathrm{grad}\ \phi_1 + \mathrm{rot}(\phi_2 \hat{X}_3). \tag{10}$$

ただし，$\hat{X}_3$ は X_3 軸方向の単位ベクトル，

$$\phi_1 = -iAe^{-\kappa_1 X_2} e^{i(kX_1 - \omega t)}, \tag{11}$$

$$\phi_2 = Be^{-\kappa_2 X_2} e^{i(kX_1 - \omega t)}. \tag{12}$$

ここで，A と B は任意の定数で，k と ω はそれぞれレイリー波の波数と角周波数であり，$\kappa_1 = \sqrt{k^2 - (\omega/c_l)^2}$, $\kappa_2 = \sqrt{k^2 - (\omega/c_t)^2}$．このとき， X_1 方向と X_2 方向の変位は，それぞれ次のように表される：

$$u_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial X_1} + \frac{\partial \phi_2}{\partial X_2} = \Big(kAe^{-\kappa_1 X_2} - \kappa_2 Be^{-\kappa_2 X_2}\Big) e^{i(kX_1 - \omega t)}, \tag{13}$$

$$u_2 = \frac{\partial \phi_1}{\partial X_2} - \frac{\partial \phi_2}{\partial X_1} = i\Big(\kappa_1 Ae^{-\kappa_1 X_2} - kBe^{-\kappa_2 X_2}\Big) e^{i(kX_1 - \omega t)}. \tag{14}$$

一方，応力テンソルを求めるために，グリーンの歪みテンソル E_{ij} と歪みエネルギー密度 $W(E_{ij})$ の歪みテンソルについての微分を導入する；

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\Big), \tag{15}$$

$$\frac{\partial W}{\partial E_{ij}} = \frac{\partial W}{\partial I_1}\delta_{ij} + 2\frac{\partial W}{\partial I_2}E_{ij} + 3\frac{\partial W}{\partial I_3}E_{ik}E_{kj}. \tag{16}$$

ここで，同じ添字が現れたときはその和を取るというアインシュタイン規約を使った．以後もこの規約を使う．ただし，歪みエネルギー密度 W は，歪みテンソル E_{ij} で，次のように一般化されたテイラー級数に展開される[14]；

$$W = \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + \mu I_2 + \alpha I_1^3 + \beta I_1 I_2 + \gamma I_3. \tag{17}$$

また，I_1, I_2, I_3 は，それぞれ，歪みテンソルの第 1，第 2 および第 3 不変量である；

$$I_1 = E_{ii}, \tag{18}$$

$$I_2 = E_{ij}E_{ij}, \tag{19}$$

$$I_3 = E_{ij}E_{jk}E_{ki}. \tag{20}$$

これらの関係式と次の定義式：

$$T_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{kj}}\Big(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k}\Big), \tag{21}$$

から，等方的な弾性体に対する応力テンソル T_{ij} が求められる．

後で，各式のオーダーを評価するため，微小パラメータ ϵ を次のように決める；

$$\epsilon = O\Big(\Big|\frac{\partial u_i}{\partial X_j}\Big|\Big) \simeq u_1^{(1)} \simeq u_2^{(1)}. \tag{22}$$

ここで，$u_i^{(1)}$ は，$O(\epsilon)$ を表す．これらの関係式を用いて，Kalyanasundaram[15] は，$O(\epsilon^2)$ まで，レイリー波の応力テンソルを求めた：

$$\begin{aligned} T_{11} = (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \lambda\frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \rho_0 c_1^2\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2 + \rho_0 c_2^2\frac{\partial u_2}{\partial X_2}\left(2\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right) \\ +\rho_0 c_3^2\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \rho_0 c_4^2\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)^2\right\}, \end{aligned} \tag{23}$$

$$T_{12} = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) + \rho_0\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right)\left(c_3^2\frac{\partial u_2}{\partial X_1} + 2c_4^2\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right). \tag{24}$$

ここで，各係数は，次のように置いた：

$$c_1^2 = \frac{3}{2\rho_0}\left(\lambda + 2\mu + 2\alpha + 2\beta + 2\gamma\right),$$

$$c_2^2 = \frac{1}{2\rho_0}\left(\lambda + 6\alpha + 2\beta\right),$$

$$c_3^2 = \frac{1}{2\rho_0}\left(2\mu + 2\alpha + 2\beta + 3\gamma\right),$$

$$c_4^2 = \frac{1}{4\rho_0}\left(2\lambda + 4\mu + 2\beta + 3\gamma\right).$$

これらの関係式を式 (9) に代入すると，変位 u_1 に対する運動方程式が得られる：

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_1 = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial T_{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial X_2}\right). \tag{25}$$

整理すると，

$$\ddot{u}_1 - c_l^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial X_1^2} - c_t^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial X_2^2} - (c_l^2 - c_t^2)\frac{\partial^2 u_2}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial}{\partial X_1}F_1 + \frac{\partial}{\partial X_2}F_2 \tag{26}$$

となる．ただし，F_1 と F_2 は，$O(\epsilon^2)$ であり，

$$F_1 = c_1^2\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2 + c_2^2\frac{\partial u_2}{\partial X_2}\left(2\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right) + c_3^2\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\frac{\partial u_2}{\partial X_1} + c_4^2\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)^2\right\}, \tag{27}$$

$$F_2 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right)\left(c_3^2\frac{\partial u_2}{\partial X_1} + 2c_4^2\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right). \tag{28}$$

全く同様にして，変位 u_2 に対する運動方程式も求まる．まず，応力テンソルは，

$$T_{21} = \mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right) + \rho_0\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right)\left(c_3^2\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + 2c_4^2\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right), \tag{29}$$

$$T_{22} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \lambda\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \rho_0 c_1^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right)^2 + \rho_0 c_2^2 \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\left(2\frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)$$
$$+\rho_0 c_3^2 \frac{\partial u_1}{\partial X_2}\frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \rho_0 c_4^2 \left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)^2\right\}. \quad (30)$$

従って，変位 u_2 に対する運動方程式は，

$$\ddot{u}_2 - c_t^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial X_1^2} - c_l^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial X_2^2} - (c_l^2 - c_t^2)\frac{\partial^2 u_1}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial}{\partial X_1}G_1 + \frac{\partial}{\partial X_2}G_2, \quad (31)$$

となる．ただし，

$$G_1 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right)\left(c_3^2\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + 2c_4^2\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right), \quad (32)$$

$$G_2 = c_1^2\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2 1}\right)^2 + c_2^2\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\left(2\frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right) + c_3^2\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\frac{\partial u_2}{\partial X_1} + c_4^2\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)^2\right\}. \quad (33)$$

次に，表面で応力無し $T_{12} = T_{22} = 0$ $(X_2 = 0)$ という境界条件は，次のように書ける：

$$\mathcal{B}_1(u_1, u_2) = \left[\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{1}{c_t^2}F_2\right]_{X_2=0}, \quad (34)$$

$$\mathcal{B}_2(u_1, u_2) = \left[\left(\frac{c_l^2}{c_t^2} - 2\right)\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{c_l^2}{c_t^2}\frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{1}{c_t^2}G_2\right]_{X_2=0}. \quad (35)$$

4.　レイリー方程式の導出

式 (13), (14) における任意定数 A と B が，$O(\epsilon)$ の場合，$u_i = u_i^{(1)}$ となるので，運動方程式における非線形項はすべて無視出来る．即ち，非線形項はすべてオーダーが $O(\epsilon^2)$ なので，$F_1 = F_2 = G_1 = G_2 = 0$ となる．このとき，境界条件 $\mathcal{B}_1(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}) = 0$ から，

$$-2k\kappa_1 A + (k^2 + \kappa_2^2)B = 0, \quad (36)$$

を得る．同様に，境界条件 $\mathcal{B}_2(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}) = 0$ から，

$$(k^2 + \kappa_2^2)A - 2k\kappa_2 B = 0, \quad (37)$$

を得る．これら 2 つの式が，任意定数 A と B に対して成り立つための必要十分条件は，

$$\begin{vmatrix} -2k\kappa_1 & k^2 + \kappa_2^2 \\ k^2 + \kappa_2^2 & -2k\kappa_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (38)$$

結局，上の式より，レーリー方程式

$$(k^2 + \kappa_2^2)^2 - 4k^2\kappa_1\kappa_2 = 0, \quad (39)$$

を得る．

5. レイリー波の非線形変調

変位ポテンシャルと変位を次のように微小パラメータ ϵ で摂動展開する：

$$\phi_1 = -i\sum_{\alpha=1}^{\infty}\epsilon^{\alpha}A^{(\alpha)}e^{-\alpha\kappa_1 X_2}e^{i\alpha(kX_1-\omega t)}, \tag{40}$$

$$\phi_2 = \sum_{\alpha=1}^{\infty}\epsilon^{\alpha}B^{(\alpha)}e^{-\alpha\kappa_2 X_2}e^{i\alpha(kX_1-\omega t)}, \tag{41}$$

$$u_1 = \sum_{\alpha=1}^{\infty}u_1^{(\alpha)} = \sum_{\alpha=1}^{\infty}\epsilon^{\alpha}\alpha(kA^{(\alpha)}e^{-\alpha\kappa_1 X_2} - \kappa_2 B^{(\alpha)}e^{-\kappa_2 X_2})e^{i\alpha(kX_1-\omega t)}, \tag{42}$$

$$u_2 = \sum_{\alpha=1}^{\infty}u_2^{(\alpha)} = i\sum_{\alpha=1}^{\infty}\epsilon^{\alpha}\alpha(\kappa_1 A^{(\alpha)}e^{-\alpha\kappa_1 X_2} - kB^{(\alpha)}e^{-\kappa_2 X_2})e^{i\alpha(kX_1-\omega t)}. \tag{43}$$

今後，添字の煩雑さを避けるため，次のように，添字の表記法を変更する：$x = X_1, y = X_2, u = u_1, v = u_2, u_2 = u_1^{(2)}, v_2 = u_2^{(2)}, A_\alpha = A^{(\alpha)}$ など．このとき，レーリー波の運動方程式は，次のように書ける：

$$L_1(u,v) \equiv \ddot{u} - c_l^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c_t^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (c_l^2 - c_t^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}F_1(u,v) - \frac{\partial}{\partial y}F_2(u,v) = 0, \tag{44}$$

$$L_2(u,v) \equiv \ddot{v} - c_t^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - c_l^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (c_l^2 - c_t^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}G_1(u,v) - \frac{\partial}{\partial y}G_2(u,v) = 0. \tag{45}$$

境界条件も同様に，

$$\mathcal{B}_1(u,v) = \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{c_t^2}F_2\right]_{y=0}, \tag{46}$$

$$\mathcal{B}_2(u,v) = \left[\left(\frac{c_l^2}{c_t^2} - 2\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c_l^2}{c_t^2}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{c_t^2}G_2\right]_{y=0}, \tag{47}$$

となる．上の式を，任意の初期条件のもとに，解析的に解くことは難しいので，時間と空間に対して，多重スケール展開を導入する[4]：

$$\xi = \epsilon(x - \lambda_g t), \;\; \tau = \epsilon^2 t. \tag{48}$$

ただし，λ_g はレイリー波の群速度である．このとき，オーダーが $O(\epsilon)$ のときは，線形の場合に帰着する．従って，オーダーが $O(\epsilon^2)$ のとき，

$$L_1(u_2,v_2) = -2\lambda_g\frac{\partial^2 u_1}{\partial t\partial\xi} + 2c_l^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial\xi} + (c_l^2 - c_t^2)\frac{\partial^2 v_1}{\partial y\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial x}F_1(u_1,v_1) + \frac{\partial}{\partial y}F_2(u_1,v_1), \tag{49}$$

$$L_2(u_2,v_2) = -2\lambda_g\frac{\partial^2 v_1}{\partial t\partial\xi} + 2c_t^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial\xi} + (c_l^2 - c_t^2)\frac{\partial^2 u_1}{\partial y\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial x}G_1(u_1,v_1) + \frac{\partial}{\partial y}G_2(u_1,v_1). \tag{50}$$

境界条件も同様に，

$$\mathcal{B}_1(u_2,v_2) = \left[\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial\xi} + \frac{1}{c_t^2}F_2(u_1,v_1)\right]_{y=0} = 0, \tag{51}$$

$$\mathcal{B}_2(u_2,v_2)=\left[\left(\frac{c_l^2}{c_t^2}-2\right)\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{c_l^2}{c_t^2}\frac{\partial v_2}{\partial y}+\left(\frac{c_l^2}{c_t^2}-2\right)\frac{\partial u_1}{\partial \xi}+\frac{1}{c_t^2}G_2(u_1,v_1)\right]_{y=0}=0. \tag{52}$$

これまで，非線形レイリー波について多くの研究があるけれども，多重スケール展開を導入した非線形方程式 (49) ∼ (52) は，オーダーが $O(\epsilon^2)$ までにおいて，未だに解析的には解かれていない[16, 17]．最近，やっと，数値的に解かれたに過ぎない[18]．

そこで，非線形レイリー波について，解析的な研究を進めるための選択肢の 1 つとして，更に高次の項のオーダー $O(\epsilon^3)$ まで考慮して解析する方向がある．我々は，この方向に従って $O(\epsilon^3)$ までの計算を実行した[19]．この解析によって得られた予備的な結果について，以下に報告する．簡単のため，弾性体表面 $(y=0)$ に限って考察すると，境界条件により，$O(\epsilon^3)$ の非線形項は，$x(X_1)$ 方向だけを残せばよい．オーダー $O(\epsilon^3)$ における応力テンソル $T^{(3)}_{pq}$ は，一般に，

$$\sum_{i,j,k=1;l,m,n=1}^{2} C\begin{pmatrix} i & j & k \\ l & m & n\end{pmatrix}\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial X_l}\frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial X_m}\frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial X_n}, \tag{53}$$

の線形結合で表されることが分かった[19]．ただし，係数 C は，ラメ弾性定数 (λ,μ) を含む最大で 8 種類の実数の定数である（複素共役の場合まで含めると，もう少し増える）．また，この部分だけ，元の表記法を使った．たとえば，$(\partial u_1/\partial x)^3$ の係数 C は，歪みエネルギー密度における定数係数を用いて，

$$C\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{\lambda}{2}+\mu+6\alpha+6\beta+6\gamma, \tag{54}$$

で与えられる[19]．心筋などの場合は，粘弾性体モデルを導入することによって，この係数 C は，複素数の定数に拡張できる[7]．このとき，弾性体表面における運動方程式は，

$$\begin{aligned} L_1(u_3,v_3) \;=\;& 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial t\partial\tau}+(\lambda_g^2+c_l^2)\frac{\partial^2 u_1}{\partial\xi^2}+(c_l^2-c_t^2)\frac{\partial^2 v_1}{\partial\xi^2}+\left(2c_l^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\partial\xi}+(c_l^2-c_t^2)\frac{\partial^2 v_2}{\partial y\partial\xi}\right)\\ &-\frac{\partial}{\partial\xi}F_1(u_1,v_1)-\frac{\partial}{\partial x}T^{(3)}_{11}, \end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned} L_2(u_3,v_3) \;=\;& 2\frac{\partial^2 v_1}{\partial t\partial\tau}+(\lambda_g^2+c_l^2)\frac{\partial^2 v_1}{\partial\xi^2}+(c_l^2-c_t^2)\frac{\partial^2 u_1}{\partial\xi^2}+\left(2c_l^2\frac{\partial^2 v_2}{\partial x\partial\xi}+(c_l^2-c_t^2)\frac{\partial^2 u_2}{\partial y\partial\xi}\right)\\ &-\frac{\partial}{\partial\xi}G_1(u_1,v_1)-\frac{\partial}{\partial x}T^{(3)}_{21}, \end{aligned} \tag{56}$$

となる．

一方，オーダー $O(\epsilon^3)$ における境界条件は，

$$\left[\frac{1}{c_t^2}T^{(3)}_{12}+\frac{\partial u_3}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial\xi}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial\xi^2}\right]_{y=0}=0, \tag{57}$$

$$\left[\frac{1}{c_t^2}T^{(3)}_{22}+\frac{c_l^2}{c_t^2}\frac{\partial v_3}{\partial y}+\left(\frac{c_l^2}{c_t^2}-2\right)\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial\xi}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial\xi^2}\right)\right]_{y=0}=0, \tag{58}$$

で与えられる．オーダー $O(\epsilon^3)$ における上の運動方程式を上の境界条件のもとに解くことは，一般に，$O(\epsilon^2)$ の場合よりも，格段に難しい．しかしながら，$O(\epsilon^3)$ における運動方程式は，時間平均をすることにより，たとえば，ゆっくりとした非線形変調された複素場 $u_1(\xi,\tau)$ に対して，

$$i\frac{\partial u_1}{\partial \tau} + P(k,\kappa_1,\kappa_2)\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + Q(k,\kappa_1,\kappa_2)u_1 u_1^* u_1 = i\Gamma u_1, \tag{59}$$

のような形の方程式が，境界条件に抵触しないように，決めることができる可能性を秘めている[19]．ただし，u_1^* は u_1 の複素共役であり，正の定数 Γ は，粘弾性によるエネルギー損出を補給するため，筋収縮系における ATP の加水分解などによるエネルギー供給を表す．また，上の議論によって，定数 $P(k,\kappa_1,\kappa_2)$ と定数 $Q(k,\kappa_1,\kappa_2)$ は複素数と仮定することが許される．上の式は，1 次元複素係数ギンツバーグ · ランダウ方程式 (CGLE) と呼ばれているものに他ならない．特に，定数 $\Gamma=0$ で，定数 P と Q の虚数部が無視できるときは，非線形シュレディンガー方程式と呼ばれている．ここで議論しているモデルは，筋収縮系におけるサルコメアの自励振動 (SPOC) を説明するために導入された離散モデル[20] を，歪エネルギー変分法[14] に基づいて，連続体に拡張されたモデルに相当しているのかもしれない．

この CGLE 系を境界条件に抵触しないように決めることの問題と心臓壁についての弾性定数と定数 P と Q の評価などの問題がまだ残されている．

謝　　　辞

研究全般に対して有益なコメントをしていただいた早稲田大学先進理工学術院・物理および応用物理の大谷光春教授に感謝致します．

参　考　文　献

(1) L. Rayleigh, Proc. Lond. Math. Soc. **12**, 4 (1885).
(2) A. H. H. Love, *A Treatise Mathematical Theory of Elasticity* (Cambridge, New York, 1906).
(3) H. Lamb, Proc. Roy. Soc. London. Ser. A **93**, 114 (1917).
(4) M. Hirao and N. Sugimoto, J. Phys. Soc. Jpn. **42**, 2056 (1977).
(5) T. Kundu, *Ultrasonic Nondestructive Evaluation*, 223 (CRC Press, New York, 2003).
(6) H. Kanai, IEEE Trans. on Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr. **52**(11), 1931 (2005).
(7) N. Bekki and S. A. Shintani, J. Phys. Soc. Jpn. **84**, 12482 (2015).
(8) N. Bekki and K. Nozaki, Phys. Lett. A **110**, 133 (1985).
(9) N. Bekki, Y. Harada, and H. Kanai, J. Phys. Soc. Jpn. **81**, 073801 (2012).
(10) N. Bekki, Y. Harada, and H. Kanai, AIP Conf. Proc. **1493**, 96 (2012).
(11) N. Bekki, S. A. Shintani, S. Ishiwata and H. Kanai, J. Phys. Soc. Jpn. **85**, 044802 (2016).
(12) 鷲尾　巧，久田　俊明: 筋原線維の有限要素法モデルでの要素間相互作用について，Mem. Kokushikan Univ. Cent. Infor. Sci., Vol. 36, 28 (2016).
(13) 巽　友正,「連続体の力学」,（岩波書店，1995）.
(14) D. R. Bland, *Nonlinear Dynamic Elasticity* (Blaisdell, Waltham, MA, 1969).
(15) N. Kalyanasundaram, Int. J. Eng. Sci. **19**, 279 (1981).
(16) R. W. Lardner, Int. J. Eng. Sci. **23**, 113 (1985).
(17) E. A. Zabolotskaya, J. Acoust. Soc. Am. **91**, 2569 (1992).
(18) M. B. Morlock, J. Y. Kim, and L. J. Jacobs, J. Acoust. Soc. Am. **137**, 281 (2015).
(19) N. Bekki and S. A. Shintani, 投稿準備中.
(20) K. Sato, Y. Kuramoto, M. Ohtaki, Y. Shimamoto, S. Ishiwata: Phys. Rev. Lett. **111**, 108104 (2013).