第 **8** 回森和英記念計算科学研究会

複雑系を記述する同一分布を与える 3 種のベータ過程について
On the tree types of Beta processes with the same distribution in complex systems

金　野　秀　敏

1. は じ め に

我々は複雑系の確率過程を用いた記述と応用を長年実行してきた [1–22]：[A] 原子炉雑音の解析（原子炉の異常診断，構造物の非線形振動，商業用原子炉出力振動），[B] 脳波の解析（認知症診断，光駆動による脳波の引き込み），[C] RR 間隔の解析（Beck-Cohen Superstatistics の適用），[D] ソリトン乱流の解析（ベニー方程式，外力駆動された非線形シュレディンガー方程式，外力駆動された MKdV 方程式，複素ギンスブルグ・ランダウ方程式），[E] 心室細動現象の数理モデルの解析（マスター方程式による生成・死滅過程の解析）などである．

これらの複雑系に関係した非線形力学が確率過程モデルの骨格となっており，Duffing 振動子，Van der Pol 振動子，Duffing-Van der Pol 振動子，Complex Ginzburg Landau 方程式，Nonlinear Mathieu 方程式，Logistic 方程式，Nonlinear Schrödiner 方程式，Burgers 方程式，KdV 方程式，修正 KdV 方程式，KdV-Burgers 方程式，Benney 方程式，Aliev-Panfilov モデル，Beeler-Reuter モデルなどの現象論的心筋方程式と関係していた．

複雑なシステムからのデータを「簡単な非線形項を含む方程式から出発し，簡単化して確率モデルを作成し，実験データを説明出来るように修正してゆく」帰納法的アプローチを採用して統計数理解析を総括すると，いかにして「単一パラメータの簡単な確率過程を不均一化した確率過程を作成するか」を考えてきたといえる．解析を実行する哲学と方法簡単なモデルを基礎として多種多様な方法でモデル拡張して適用する必要がある．

本報では，ベータ過程に関連した不均一化の報告を行う：2 章では Ornstein-Uhlenbeck (OU) 過程の不均一化モデルの典型例としてのコーシー過程について述べる．3 章ではポアソン (Poisson) 過程を取り上げ，Beck-Cohen [23]，Barnsdorff-Nielsen [24] 流の Beta 分布を用いた不均一化によって多様な確率過程が出現することを示す．4 章では同じ定常ベータ分布を持つ異なる確率過程の同定とメカニズムの推定問題についても言及する．5 章はまとめと展望に言及する．

2. OU 過程の不均一化

OU 過程 [25, 26] はよく知られておりランジュバン方程式は次式となる：

$$\frac{d}{dt}x = -kx + F(t). \tag{1}$$

ここで，ランダムな力 $F(t)$ は平均ゼロの正規白色雑音と仮定される：

筑波大学名誉教授

$$\langle F(t)\rangle = 0 \quad \text{and} \quad \langle F(t)F(t')\rangle = 2D_a\delta(t-t'). \tag{2}$$

また，ランダムな外力は初期値の影響を受けない，すなわち，無相関とする（因果律）：

$$\langle F(t)x(0)\rangle = 0. \tag{3}$$

これを (1) 式に適用すると相関関数の従う方程式は次式で与えられ，

$$\frac{d}{dt}\langle x(t)x(0)\rangle = -k\langle x(t)x(0)\rangle \tag{4}$$

相関関数の指数則を簡単に導くことができる：

$$\langle x(t)x(0)\rangle = \langle x^2\rangle \exp(-kt). \tag{5}$$

(1) 式のランジュバン方程式に対応するフォッカー・プランク方程式は次式のように書ける：

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}[kxP(x,t)] + D_a\frac{\partial^2}{\partial x^2}[P(x,t)] \tag{6}$$

これから定常分布は正規分布となることが導かれる：

$$P_s(x) = \sqrt{\frac{k}{2\pi D_a}}\exp\left(-\frac{kx^2}{2D_a}\right). \tag{7}$$

逆温度や分散と次の関係があることに注意する：

$$\beta = \frac{k}{2D_a} = \frac{k}{\sigma^2}. \tag{8}$$

(1) 散逸係数の不均一化

散逸係数 k が定数でなく，時間変化しない部分 k_0 と揺らいでいる部分 $k_1(t)$ からなる，

$$k = k_0 + k_1(t), \tag{9}$$

とすると対応するランジュバン方程式は次の一般化コーシー過程となる：

$$\frac{d}{dt}x = -k_0x - k_1(t)x + F(t), \tag{10}$$

ここで，$k_1(t)$ が平均ゼロの正規白色雑音である，

$$\langle k_1(t)\rangle = 0 \quad \text{and} \quad \langle k_1(t)k_1(t')\rangle = 2D_m\delta(t-t') \tag{11}$$

とすれば対応するフォッカー・プランク方程式は次式のようになる：

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}[k_0xP(x,t)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}[(D_a + D_mx^2)P(x,t)]. \tag{12}$$

このように，不均一化すれば定常分布は裾の厚い「一般化コーシー分布」に帰着する．

$$P_s(x) = \frac{a^{2b-1}}{B(b-1/2,1/2)}\frac{1}{(x^2+a^2)^b}, \tag{13}$$

ここで，

$$a^2 = \frac{D_a}{D_m} \quad \text{and} \quad b = \frac{k_0}{2D_m} + \frac{1}{2}. \tag{14}$$

ここで，定常分布を計算するにあたり，ランジュバン方程式をストラットノビッチ型と解釈し，ノイズ補正を行っていることに注意する．

(2)　Beck-Cohen superstatistics

Beck と Cohen [23] によれば，確率過程の不均一化による重ね合わせの効果は，逆温度 β の分布を重みとしたベイズの定理として表現できる：

$$P_s(x) = \int_0^\infty P_s(x|\beta) g(\beta)\, d\beta. \tag{15}$$

OU 過程の場合には条件付き正規分布が

$$P_s(x|\beta) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \exp(-\beta x^2), \tag{16}$$

であるので，逆温度 β の分布 $g(\beta)$ として，例えばガンマ分布

$$g(\beta) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \beta^{a-1} \exp(-b\beta), \tag{17}$$

を仮定すれば，ベイズの定理を使って上述の裾の厚い「一般化コーシー分布」が得られる．

$$P_s(x) = \frac{a^{2b-1}}{B(b-1/2, 1/2)} \frac{1}{(x^2+a^2)}. \tag{18}$$

パラメータに不均一性が存在すれば，正規過程であっても，それらを重ね合わせれば裾の厚い分布が出現することが導かれる．相関関数の場合は重ね合わせの影響でどう変化するであろうか？　均一系の時間相関は OU 過程の場合指数減衰であるが，上記と同様にベイズの定理を適用してみると，逆温度が $\beta = \frac{k}{\sigma^2}$ であることに注意して相関係数 $R(t) \equiv C(t)/\langle x^2 \rangle$ は

$$R(t) = \int_0^\infty \exp(-kt) g(\beta)\, d\beta = \int_0^\infty \exp(-\beta\sigma^2 t) g(\beta)\, d\beta = \frac{1}{(1+\frac{\sigma^2}{b}t)^a} \tag{19}$$

のようにパレート則に従って減衰することが導かれる [24]．分散の時間変動も許せばランジュバン方程式で,$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1(t)$ と置いてパラメータの均一モデルを不均一系に拡張することができるが，このようなモデル化の詳細は別報に譲る．

(3)　非線形項の追加

一般化コーシー分布はよく使われるモデルのひとつではあるが，分散が発散するなど，実データ解析の観点からは好ましくない特性を持っている．発散を回避するためには，カットオフを設定するなどの対処法が必要になる．ここでは，3 次の非線形項を不均一化として追加すると次式を得る：

$$\frac{d}{dt}x = -\alpha x - \gamma x^3 + \sqrt{2D_p(x^2+a^2)} F_m(t) \tag{20}$$

ここで，相乗性雑音に $\sqrt{x^2+a^2}$ の項が掛かっているが変数変換をすれば，一般性を失うことなくこのような形に変形出来ることを注意する．対応する定常分布は一般化コーシー分布と正規分布の折衷型の分布となっている：

$$P_s(x) = \frac{c^{1/2-b}}{\Gamma(1/2, b; ca^2)} \frac{\exp(-cx^2)}{(x^2+a)^b} \tag{21}$$

ここで，$a^2 = \frac{D_a}{D_p}$，$b = \frac{\alpha}{2D_p} + \frac{1}{2} - \frac{D_a\gamma}{2D_p^2}$，$c = \frac{\gamma}{2D_p}$ であり，また，一般化されたガンマ関数を次式で定義する：

$$\Gamma(z, \lambda; v) = \int_0^\infty \exp(-t) t^{z-1} (t+v)^{-\lambda} dt. \tag{22}$$

3. Poisson 過程の不均一化

(1) 生成率の時間変動の導入

これまでは連続変数の確率過程の重ね合わせによる不均一化を示したが，離散変数の不均一化をポアソン過程を表現するマスター方程式で考えよう：

$$\frac{d}{dt}P(n,t)=\nu[P(n-1,t)-P(n,t)], \tag{23}$$

ここで，ν は事象や粒子の生成率を表す．解は次式で与えられる：

$$P(n,t)=\frac{(\nu t)^n}{n!}\exp(-\nu t) \tag{24}$$

平均と分散は $\langle n(t)\rangle=\sigma_n^2(t)=\nu t$ となることは周知の事実である．待ち時間分布は指数分布である：

$$f(\tau)=-\frac{d}{d\tau}P(0,\tau)=\nu\exp(-\nu\tau). \tag{25}$$

ここで，生成率 ν が一定値をとらず時間変動を許して $\nu(t)$ のように不均一化してみよう．すなわち，$\nu(t)$ がランダムな変動成分を持たず，決定論的な時間変動をするとしよう．このような拡張は非定常ポアソン過程と呼ばれており，記憶効果のひとつの導入方法となっている．この場合，確率密度関数は次式で与えられる：

$$P(n,t)=\frac{A(t)^n}{n!}\exp\big(-A(t)\big), \tag{26}$$

ここで,

$$A(t)=\int_0^t\nu(\tau)d\tau. \tag{27}$$

この場合，平均と分散の値は任意の時間で同一の値をとる：

$$\langle n(t)\rangle=V(n(t))=A(t). \tag{28}$$

また，待ち時間分布は次式で与えられる：

$$f(\tau)=\nu(\tau)\exp\bigg(-A(\tau)\bigg). \tag{29}$$

よく使われるのが次の3種の関数である：(i) $\nu_1(t)=\frac{\nu_2}{1+\nu_1 t}$ このとき，生成率の積分は $A(t)=\frac{\nu_2}{\nu_1}\log(1+\nu_1 t)$ となり，この量は平均と分散に等しいことがわかる．ただし，平均数の増加が時間ではなく，時間の対数に比例する．(ii) 一方，$\nu_d(t)=\nu_1 t^{\nu_2-1}$ ならば，$A(t)=\frac{\nu_1}{\nu_2}t^{\nu_2}$ となり，時間の非整数ベキとなっている．(iii) さらに，$\nu_d(t)=\nu_0 t+\frac{\nu_2}{1+\nu_1 t}$ なら，$A(t)=\nu_0+\frac{\nu_2}{\nu_1}\log(1+\nu_1 t)$ となって，2つのモードの競合が出現する．絶滅確率は次式のようになるから，$P(0,t)=\frac{1}{(1+\nu_1 t)^{\frac{\nu_2}{\nu_1}}}\exp(-\nu_0 t)$, これを微分して，待ち時間分布は次のような指数緩和とベキ緩和の折中型となる：$f(\tau)=\frac{\nu_2}{(1+\nu_1 t)^{1+\nu_2/\nu_1}}\exp(-\nu_0 t)+\frac{\nu_0}{(1+\nu_1 t)^{\nu_2/\nu_1}}\exp(-\nu_0 t)$.

(2) ガンマ・ポアソン過程

ν が一定でなく，(11) 式と同様のパラメータ (a,b) を持つガンマ分布に従うと考え，ポアソン過程を重ね合わせるとベイズの定理によって次式が得られる：

$$P(n,t)=\int_0^\infty P(n,t|\nu)g(\nu)d\nu=\frac{\Gamma(n+a)}{n!\Gamma(a)}\left(\frac{b}{b+t}\right)^a\left(\frac{t}{b+t}\right)^n \tag{30}$$

これは負の2項分布である．ポアソン分布と比べると分散の値が大きいことが確かめられる：

$$\langle n\rangle = \frac{ta}{b}, \quad \sigma^2 = \frac{ta}{b}\left(1+\frac{t}{b}\right) \tag{31}$$

すなわち，分散は常に平均よりも大きな値 $F = 1+\frac{t}{b}$（$t>0$ は時間，$b>0$ だから）になる．また，対応する待ち時間分布はパレート則

$$f(\tau) = -\frac{d}{d\tau}P(0,\tau) = \frac{ab^a}{(\tau+b)^{a+1}}. \tag{32}$$

となって，ベキ緩和することがわかる．$g(\nu)$ の分布形を変化させると，様々な離散的確率過程が生成されることに注意する．指数分布の場合 $a=1$ でもベキ緩和が得られる．

このような時間を入れたポアソン過程の Beck-Cohen 流の重ね合わせによる確率過程の構成は行われていないし，妥当性も示されていない．しかし，興味深い点は一般化ポリア過程

$$\frac{d}{dt}P(n,t) = \lambda(n-1,t)P(n-1,t) - \lambda(n,t)P(n,t), \tag{33}$$

$$\lambda(t) = \kappa(t)(\alpha n+\beta) \tag{34}$$

の解は $\kappa(t)$ を任意関数として求められており，$\kappa(t) = \frac{1}{1+\kappa_0 t}$ のときに完全に一致する．従って，時間が入ったポアソン過程の確率過程の一般化は非定常ポアソン過程とは異なる分散の大きな分布を与える物理的に妥当なモデル化を与えると考えられる．

(3)　ベータ・ポアソン過程

パラメータの分布がベータ分布

$$g(\nu) = \frac{1}{B(a,b)}\nu^{a-1}(1-\nu)^{b-1}, \tag{35}$$

であると仮定しよう．ここで，$B(a,b)$ はベータ関数であり，次式で定義される：

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx. \tag{36}$$

このとき，ベータ・ポアソンモデルの「粒子（事象）数の分布」は次式で与えられる：

$$P(n,t) = \frac{t^n}{n!}\frac{\Gamma(n+a)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(n+a+b)}M(n+a,n+a+b,-t), \tag{37}$$

ここで，$M(\alpha,\beta,z)$ は合流型超幾何関数，即ち，Kummer の M 関数の積分表示である：

$$M(\alpha,\beta,z) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}\int_0^1 \exp(zy)\,y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-\alpha-1}\,dy. \tag{38}$$

平均と分散は次式で与えられる：

$$\langle n(T)\rangle = \frac{a}{a+b}T \quad \text{and} \quad V(n(T)) = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}T^2 + \frac{a}{a+b}T. \tag{39}$$

また，絶滅確率から，待ち時間分布は次式で与えられることが導かれる：

$$f(\tau) = \frac{a}{a+b}M(a+1,a+b,-\tau). \tag{40}$$

整数次モーメントは

$$\langle \tau^m \rangle = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(a-m)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b-m)}. \tag{41}$$

もし $a < m$ 及び $a+b < m$ なら整数次モーメントは発散する．このような場合でも，$f(0) = \frac{1}{a}$，及び対数キュムラント

$$\langle \log \tau \rangle = -\gamma + \psi(a+b) - \psi(a) \tag{42}$$

及び

$$\langle (\log \tau)^2 \rangle_c = \frac{\pi^2}{6} + \gamma^2 - \psi'(a+b) + \psi'(a) \tag{43}$$

は発散しないので，これらを用いてパラメータを推定することができる．(42)，(43) 式で $\psi(z), \psi'(z)$ はジ・ガンマ関数，トリ・ガンマ関数である：$\psi(z) = \frac{d}{dz}\log\Gamma(z), \psi'(z) = \frac{d}{dz}\psi(z)$．また，分布 $f(\tau)$ は指数分布族にはならず，最尤推定量は定義できない．

4.　ベータ過程

(1)　第 1 種ベータ過程

脳波を用いた認知症診断を行っていたとき，樋口法を用いて局所フラクタル次元 (local fractal dimension) を計算しその確率過程を構成した (Saji and Konno [13])．結果として得られた確率過程はベータ分布に従うベータ過程であった．次元の最大値は 2 であるので $[0, 2]$ 区間分布が得られたがここでは規格化し，最大値が 1 になるようにして議論する：

$$P(x) = \frac{1}{B(\mu,\nu)} x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1} \tag{44}$$

この定常分布を与える確率過程が数多いが，そのうち最も簡単なものは次の第 1 種ベータ過程であろう：

$$\frac{d}{dt}x = a - bx + \sqrt{2Dx(1-x)}F_m(t), \tag{45}$$

ここで，雑音は正規白色性を仮定する：

$$\langle F_m(t) \rangle = 0 \quad \text{and} \quad \langle F_m(t)F_m(t') \rangle = \delta(t-t'). \tag{46}$$

力学部分は線形関数であるが，雑音成分に非線形関数が入る．対応するフォッカー・プランク方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}[(a-bx)P(x,t)] + D\frac{\partial^2}{\partial x^2}[x(1-x)P(x,t)]. \tag{47}$$

定常分布は次のようなベータ分布となる：

$$P_s(x) = \frac{1}{B(\nu,\nu)} x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}, \tag{48}$$

ここで，パラメータは次式で与えられる．

$$\mu = \frac{a}{D}, \quad \nu = \frac{b-a}{D}. \tag{49}$$

フォッカー・プランク方程式の解 $P(x,t)$ を定常分布 $P_s(x)$ でスケールし，

$$P(x,t) = P_s(x)Q(x,t), \tag{50}$$

後退方程式の解 $Q(x,t)$ の変数分離を $Q(x,t) = \exp(-\Lambda t)\phi(x)$ として，次式が得られる：

$$Dx(1-x)\frac{d^2}{dx^2}\phi(x,t)+(a-bx)\frac{d}{dx}\phi(x)+\Lambda\phi(x)=0. \tag{51}$$

これは超幾何の微分方程式で書ける．一般には離散固有値と連続固有値が存在するが，この場合には連続固有値しか存在せず，結局，Jacobi の微分方程式で書けることになる：

$$x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}\phi(x,t)+((\alpha+1/2)-(\beta+1)x)\frac{d}{dx}\phi(x)+\lambda\phi(x)=0. \tag{52}$$

ここで，固有値は次式で与えられる：

$$\lambda=n(n+\beta). \tag{53}$$

結局，フォッカー・プランク方程式の解は次式のように書ける：

$$P(x,t|x_0)=P_s(x)\sum_{n=0}^{\infty}\exp\biggl(-n(n+\mu+\nu+1)t\biggr)A_nP_n^{\mu,\nu}(x)P_n^{\mu,\nu}(x_0), \tag{54}$$

ここで，Jacobi の直行多項式は次式で定義される：

$$P_n^{\mu,\nu}(x)=\frac{x^{1-\nu}(1-x)^{\nu-\mu}}{\Gamma(\nu+n)/\Gamma(\nu)}\frac{d^n}{dx^n}[x^{\nu+n-1}(1-x)^{\mu+n-\nu}]. \tag{55}$$

また，解の展開係数は次式のように求められる：

$$A_n=\frac{\Gamma(2n+\mu+\nu+1)\Gamma(n+\mu+\nu+1)}{\Gamma(n+\mu+1)\Gamma(n+\nu+1)n!}. \tag{56}$$

(2)　その他のベータ過程

このほかにも，同一の確率密度を与えるベータ過程も存在する．以下にそれらを記しておく：
第 2 種ベータ過程：

$$\frac{d}{dt}x=ax-bx^2+\sqrt{2Dx^2(1-x)}F_m(t). \tag{57}$$

これも相乗性雑音を有する確率微分方程式である.「非線形ポテンシャル形が時間的に変動するときのブラウン粒子の運動」の物理的なイメージでとらえることができる．力学部分も雑音成分部分の両方が非線形関数になっているが，雑音成分の非線形関数の物理的な解釈は難しい．解の詳細は省略するが後退方程式はガウスの超幾何微分方程式に従う．
第 3 種ベータ過程：

$$\frac{d}{dt}x=\frac{a}{x}+\frac{a-b}{1-x}+\sqrt{D}F_m(t). \tag{58}$$

これは相加性雑音を有する方程式である．この場合「対数ポテンシャル中でのブラウン粒子の運動」の物理的なイメージでとらえることができる．解の詳細は省略するが後退方程式は合流型のホインの微分方程式に従う．

5.　まとめと展望

現実の複雑系で観測されるゆらぎの時系列データや，複雑な時間空間変動を示す偏微分方程式からのシミュレーションデータを用いて現象論的な特性を定量的に行う試みを行ってきた．非線形相互作用を陽に取り入れた確率過程を構成して解析するのは，一般には高度な数理解析が要求されることが多い．Beck-Cohen [23] や Barnsdorff-Nielsen ら [24] によって示されたように，現実のシステムでは空間的ある

いは時間的な不均一性の存在によって，異なるパラメータを持つ OU 過程を重ね合わせが物理的に妥当である場合が数多く存在すると考えられる．実際，ベイズの定理を用いて（逆温度の分布について）重ね合わせを実行すると裾の厚い分布が得られた．Barnsdorff-Nielsen と同様に相関係数にも（同様に逆温度の）重ね合わせを適用すると緩和特性が指数関数からベキ緩和が出現する．非線形項を陽に取り入れた確率過程を用いなければ現象の記述がうまくゆかない場合も数多く存在する．代表例として，3 次の非線形項を有する一般化コーシー過程を紹介した．

また，ポアソン過程の重ね合わせから作られる，生成率の分布がベータ分布になる場合の Beta-Poisson 過程の諸特性を紹介した．ベータ分布は多様な形状の分布を表現可能であるから，ベイズ更新の先験分布にも多用されている．しかし，同一のベータ分布を与える確率過程は無数に存在する．本報ではそれらの 3 つの確率過程をランジュバン方程式の形で具体的に示した．対応するフォッカー・プランク方程式の解や固有値や相関関数などの特性の詳細は別報で述べる．

謝　　辞

本研究は科学研究費補助金の支援を受けている（JSPS，挑戦的萌芽研究，No. 15K11993）．

参 考 文 献

[1] H. Konno and P. S. Lomdahl, Stochastic Processes Having Fractional Order Nonlinearity Associated with Hyper Gamma Distribution, J. Phys. Soc. Jpn. **73** (2004) 573-579.

[2] H. Konno, On the fractal nature of the fractional Poisson process, Adv. Stud. Theor. Phys. **6** (2012) 1039-1058.

[3] 確率論的リスク解析の数理と方法（コロナ社，東京，2010）．

[4] ベッドフォード・クック，確率論的リスク解析，基礎と方法（丸善，東京，2005）．

[5] K. Kiyono and H. Konno, Log-amplitude statistics for Beck-Cohen superstatistics, Phys. Rev. **E 87** (2013) 052104 1-10.

[6] H. Konno and Y. Tamura, A Generalized Cauchy Process Having Cubic Nonlinearity, Reports on Mathematical Physics., **67** (2011) 179-195.

[7] H. Konno and Y. Uchiyama, Long-Memory and Features of Fluctuation in a Fractional Generalized Cauchy Process, Proc. of the 44th ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications, **1** (2012) 180-186.

[8] H. Konno and F. Watanabe, Maximum Likelihood Estimators for Generalized Cauchy Process, J. Math. Phys., **48** (2007) 103303 1-13, 2007.

[9] H. Konno, On the Exact Solution of a Generalized Polya Process, Advances. Math. Phys., **2010** (2010) 504267 1-12.

[10] Y. Uchiyama and H. Konno, Birth-death process of local structures in defect turbulence described by the one-dimensional complex Ginnzburg-Landau equation, Phys. Lett. **A318** (2014) 1350-1355.

[11] Y. Uchiyama T. Kadoya and H. Konno, Anomalous velocity fluctuation in 0ne-dimensional defect turbulence, Phys. Rev. **E91** (2015) 022127 1-6.

[12] H. Konno, Y. Uchiyama and I. Pazsit, Superstatistics and System Identification for a Class of Generalized Cauchy Processes, Proceedings of the 45th ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications, **1** (2013) 126-136.

[13] R. Saji and H. Konno, Dynamical Features of the Local Fractal Dimension of Brain Waves and Its Applicability for Diagnosis of Senile Dementia, Jpn. J. Appl. Phys. Vol. **39** (2000) 679-684.

[14] R. Saji and H. Konno, Local Non-Stationary Nature of Brain Waves from Demented Persons, Vol. **40** (2001) 2570-2579.

[15] A. Suzuki and H. Konno, Stochastic dynamics of phase singularities under ventricular fibrillation in 2D Beeler-Reuter model, AIP Advances **1** (2011) 032103 1-13.

[16] R. Harada and H. Konno, Numerical Analysis of Aliev-Panfilov Model, Pacific Science Review, **12** (2011) 208-213.

[17] H. Konno, A. Suzuki and Y. Uchiyama, Characterization of Ventricular Fibrillation in 2D Beeler-Reuter Model by Stochastic Predator-Prey Dynamics, Proc. of AIP, Sydney, Australia (2012) 00289 1-4.

[18] H. Konno and I. Pazsit, Composite Fractional Time Evolutions of Cumulants in Fractional Generalized Birth Processes, Adv. Studies Theor. Phys. Vol. 8 (2014) 195-213.

[19] H. Konno and P. Lomdahl, A Nonlinear Transformation Method for Obtaining Approximate Analytic Steady-State Solutions of Nonlinear Stochastic Differential Equations, J. Phys. Soc. Jpn **69** (2000) 1619-1628.

[20] H. Konno, H. Chatani, Y. Takahashi, A. Sakata and S. Tobimatsu, Physical/Physiological Meaning of Frequency Modula-

tion in Brain Wave with/without Photostimulation, Proc. of SPIE (2007) Vol. 6602 660218 1-12.
[21] H. Konno and K. Nishimura, Effect of Memory on Measures of Complexity, Proc. of SPIE (2005) Vol. 5841 609088 1-12.
[22] H. Konno, On the Exact Solution of a Generalized Polya Process, Advances in Mathematical Physics, Vol. 2010 (2010) 540267 1-12.
[23] C. Beck and E. G. D. Cohen, Physica **A 322**, (2003) 267-275.
[24] O. E. Barndorff-Nielsen, Theory Proba. Appl. **45**, (2000) 175-194.
[25] C.W. Gardiner, Handbook of Stochastic Methods, Springer (1983).
[26] W. Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Wiley (1968).