【翻　訳】

投資と資産市場*

永　冨　隆　司

目　　次

翻訳にあたって[1]

本稿は，O. Olsson 著の ‘*Essentials of Advanced Macroeconomic Theory, Routledge, 2012*’ の第 9 章 ‘Investment and Asset Markets’ および第 15 章の “Mathematical Appendix” の全訳である[2]。本書は，最近のマクロ経済学の議論を広く，かつコンパクトに見通すことができる上級テキストとなっており，大学院修士レベルの学生が一応の主たる読者層として念頭に置かれている。ただ，専門論文で議論される重要な概念が初歩から丁寧に紹介されているということもあって，マクロ経済学を学ぶ学部上級生や大学院博士課程の学生にとっても適切なテキストになっている。

今後，数回にわたって各章の翻訳を分担で『政経論叢』に掲載させていただく予定になっているため，初回目である今回は本翻訳について若干の説明をさせていただきたい。

本書の翻訳は，2015 年 6 月に立ち上げた経済学研究会の第 1 期のプロジェクト「翻訳プロジェクト」として行っている事業である。今回のプロジェクトに加わったメンバーは 5 名で，私（発起人）のほかに，石山健一（研究会幹事）准教授，中岡俊介准教授，加藤将貴専任講師（以上，国士舘大学），そして黒岩直特任講師（東京福祉大学）となっている[3]。研究会は，毎月 1 〜2 回程度開催し，各回 1 つの章を取り上げて担当者が作成した下訳を踏まえて内容を報告，その後全員による共訳・協訳という形で検討を行うという方法で進めている[4]。

以下に全 15 章からなる本書の章立てを示しておく。

第 1 章　序論
第 2 章　マルサスの世界
第 3 章　ソロー成長モデル
第 4 章　内生的成長理論

はじめに[5)]

投資は，通例，物的資本のストックを増加させることを目的とした活動をいう[6)]。新古典派成長モデルで示されるように，一国の投資はその国の貯蓄と密接な関係がある。本章では，標準的な新古典派投資モデルを説明する。このモデルは，個々の企業の利潤最大化行動に基づいている。第 2 節では，トービンの限界 q（*Tobin's marginal q*）と資本の使用者費用（*user cost of capital*）の 2 つの概念を導出する。第 3 節では，調整費用の性質とはどんなものか，またそれが企業の投資決定に対してどのような影響を与えるかについて議論する。本稿で議論される投資理論の説明は，Branson（1989），Caballero（1979），そして Romer（2005）に多くを負っている。

最後に，第 4 節において住宅市場に関する簡潔な考察を行う。そこでは，住宅需要と均衡価格水準の決定について分析が行われる。

9.1　ケインズ型投資関数

最も簡単なケインズモデルでは，物的資本への総投資は総所得水準 Y_t と利子率 r_t の関数 $I_t(Y_t, r_t)$ として表されている。当該関数について，$\frac{\partial I_t(Y_t, r_t)}{\partial Y_t}>0$，$\frac{\partial I_t(Y_t, r_t)}{\partial r_t}<0$ が仮定される。投資が所得 Y とともに増加すると考えているのは，資本ストック K_t と所得 Y_t の間には長期的な関係が存在すると仮定しているからである[7)]。利子率 r_t の上昇は生産者にとって資本の所有をより費用のかかるものにしてしまうということを意味する。その結果，投資量は減少する。これはちょうど賃金水準が上昇すると，企業が雇用を減らそうとするのと同じ原理である。しかしながら，ケインズ型投資関数は企業行動に関するミクロ（経済学）的な基礎づけをもっていない。この点について次節で見てみることにしよう。

9.2　企業の投資決定

最適な投資水準を考えるに際して，企業の所有者は将来にわたって生じる利潤流列の現在価値を最大化する。

$$V(0)=\sum_{t=0}^{T}\frac{\Pi_t}{(1+r)^t}$$

$$=\sum_{t=0}^{T}\frac{1}{(1+r)^t}[P_t F(L_t, K_t)-w_t L_t-P_t^I I_t] \tag{9.1}$$

(9.1) 式において，Π_t はその経済の t 時点における利潤総額，r は利子率，P_t は企業が生産する財（総産出量 Y）の価格（指数）である。w_t は賃金率，P_t^I は投資財価格，そして I_t は総粗投資である。産出量 $Y_t=F(L_t, K_t)$ は，労

働 L_t と物的資本 K_t の関数として定式化され，$\dfrac{\partial F(L_t, K_t)}{\partial L_t}=F_{L_t}>0$，および $F_{K_t}>0$ が仮定される。また，企業は 0 期から T 期まで存続すると仮定する。

資本は次式にしたがって蓄積される。

$$\begin{aligned} K_{t+1} &= K_t + I_t - \delta K_t \\ &= K_t(1-\delta) + I_t \end{aligned} \tag{9.2}$$

ここで，I_t は粗投資（$I_t=K_{t+1}-K_t+\delta K_t$，すなわち純投資 $K_{t+1}-K_t$ と更新投資 δK_t の和），δ は減価償却率である。

企業の最大化問題は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} &\max_{L_t, K_t, I_t} \quad V(0) = \sum_{t=0}^{T} \frac{\Pi_t}{(1+r)^t} \\ &\qquad s.t.\ K_{t+1} = K_t(1-\delta) + I_t \qquad \text{各期} \quad t=(0, 1, ..., T) \end{aligned} \tag{9.3}$$

ラグランジュ関数を次式のように定義する。

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sum_{t=0}^{T} \frac{1}{(1+r)^t}[P_t F(L_t, K_t) - w_t L_t - P_t^I I_t] \\ &\quad + \sum_{t=0}^{T} \lambda_t [I_t + K_t(1-\delta) - K_{t+1}] \end{aligned} \tag{9.4}$$

最大化問題の 1 階の条件は以下で与えられる。

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial L_t} = \frac{1}{(1+r)^t}(P_t F_{L_t} - w_t) = 0 \tag{9.5}$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial K_t}=\frac{P_t f_{K_t}}{(1+r)^t}+\lambda_t(1-\delta)-\lambda_{t-1}=0 \tag{9.6}$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial I_t}=-\frac{P_t^I}{(1+r)^t}+\lambda_t=0 \tag{9.7}$$

(9.6) 式の中で λ_{t-1} となっているのは，K_t が t−1 期の制約，すなわち $\lambda_{t-1}[I_{t-1}+K_{t-1}(1-\delta)-K_t]$ の中にも表れるからである。

9.2.1　資本の使用者費用

(9.7) 式から次式が得られる。

$$\lambda_t=\frac{P_t^I}{(1+r)^t}$$

および

$$\lambda_{t-1}=\frac{P_{t-1}^I}{(1+r)^{t-1}}$$

これらを（9.6）式に代入すると次式が得られる。

$$\frac{P_t F_{K_t}}{(1+r)^t}+\frac{P_t^I(1-\delta)}{(1+r)^t}-\frac{P_{t-1}^I}{(1+r)^{t-1}}=0$$

第 1 項の $\frac{P_t F_{K_t}}{(1+r)^t}$ だけを左辺に残して整理し，さらに両辺に $\frac{(1+r)^t}{P_t}$ をかけると次式が得られる。

$$F_{K_t} = \frac{\delta P_t^I + rP_{t-1}^I - (P_t^I - P_{t-1}^I)}{P_t}$$
$$= \frac{C_t}{P_t} \tag{9.8}$$

（9.8）式は資本の実質使用者費用（*real user cost of capital*）$\frac{C_t}{P_t}$ を表している。資本の使用者費用 C_t は3つの項からなっている。すなわち，資本投資の償却費用（*depreciation cost*）δP_t^I と $t-1$ 時点で評価した t 期間中の資本保有の利子費用（*interest cost*）rP_{t-1}^I の和から，資本財価格の上昇分（ここから投資家は利益を得る）$P_t^I - P_{t-1}^I$ を差し引いた額の3つである。資本の実質使用者費用は，名目使用者費用 C_t を物価指数 P_t で除して求められる。

（9.8）式が意味するところは，企業は資本の限界生産力 F_{K_t} と実質使用者費用 $\frac{C_t}{P_t}$ が等しくなる水準まで投資を行うことが最適であるということである。資本ストックの均衡水準を陰関数で表記すると次式のようになる。

$$K_t^* = K(Y_t, C_t, P_t)$$

ここで，$Y_t = F(L_t, K_t)$ はその経済の総産出量である。

9.2.2　コブ＝ダグラスの例

ここでは，広く用いられているコブ＝ダグラス型生産関数を用いて K^* の特定化を考えてみよう。

$$Y_t = AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \tag{9.9}$$

ここで，A は正の生産性パラメータ，α は0と1の間（$0 < \alpha < 1$）をとる資本の生産弾力性である。（9.9）式から，資本の限界生産力は

$F_{K_t}=A\alpha K_t^{\alpha-1}L_t^{1-\alpha}=\dfrac{\alpha Y_t}{K_t}$ となる。これを，（9. 8）式に代入すると次式が得られる。

$$\frac{\alpha Y_t}{K_t^*}=\frac{C_t}{P_t}$$

ここから

$$K_t^*=\frac{\alpha P_t Y_t}{C_t}$$

を求めることができる。

この式から，資本の最適水準 K_t^* は価格水準 P_t と総生産量 Y_t とともに増加し，（名目）使用者費用 C_t とともに減少することがわかる。

9. 2. 3　トービンの q

資本の実質使用者費用の式を書き換えると次式が得られる。

$$P_t F_K^{\,t}+P_t^I(1-\delta)-P_{t-1}^I(1+r)=0$$

ここで，$P_{t-1}^I(1+r)$ だけを左辺に残して整理し，さらに両辺に $\dfrac{1}{[P_{t-1}^I(1+r)]}$ をかけると次式が得られる。

$$\frac{1}{1+r}\,\frac{P_t F_{K_t}+P_t^I(1-\delta)}{P_{t-1}^I}=1 \qquad (9.\ 10)$$

左辺の項は，ノーベル賞を受賞した James Tobin にちなんで，トービンの限界 q（*Tobin's marginal q*）と呼ばれている。トービンの限界 q は，t-1 期に資本ストックが 1 単位増加したときの t 期における企業価値の変化分 $P_t F_{K_t} + P_t^I(1-\delta)$ を，資本を 1 単位取得するのに要した取得費用 P_{t-1}^I で除し，さらにそれを割引率 $\frac{1}{1+r}$ で t-1 期に割り戻した価値として表される。

企業価値の上昇は，収入の増加 $P_t F_{K_t}$ と資本価値の上昇 $P_t^I(1-\delta)$ から生じる。F_{K_t} は収益の逓減性という性質から K_t が増加するにつれて減少する。均衡では，企業の割引価値の増分と資本が 1 単位増加したときの費用 P_{t-1}^I が等しくなる。トービンの q が 1 よりも大きい（あるいは小さい）場合は，企業が均衡状態にないことを意味する。このとき資本ストックが増加（減少）した場合の限界的な利益が限界費用を上回る状態にあることを意味する。したがって，資本ストックは最適水準 K^* に達するまで拡張するが，K^* に到達したときのトービンの限界 q は 1 であることが要請される。

9.3　調整費用

企業にとって投資費用は資本財の購入費用だけではない。調整費用は，通常，企業内部で必要となる諸活動の再組織化全般にその源泉があると考えられている。たとえば，新しいソフトを搭載した新しいコンピュータを考えると，インストールに加えて，それを使う労働者を訓練することも必要となる。こうした訓練費用は購入費用に加えてさらに必要となる費用である。

調整費用を $A(I_t)$ と定義しよう。調整費用は投資規模が増加するにつれて増大するという性質 $A'(I_t) > 0$ があると仮定する。調整費用を考慮すると，利潤関数は次式のように書き換えられる。

$$\sum_{t=0}^{T} \frac{1}{(1+r)^t} \left[P_t F(L_t, K_t) - w_t L_t - P_t^I I_t - A(I_t) \right] \tag{9.11}$$

投資の１階の条件は新たに，

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial I_t}=\frac{-P_t^I-A'(I_t)}{(1+r)^t}+\lambda_t=0 \tag{9.12}$$

となるが，他の１階の条件は前と同じである。

（9.12）式から，

$$\lambda_t=\frac{P_t^I+A'(I_t)}{(1+r)^t} \tag{9.13}$$

が得られる。

（9.13）式は，調整費用が存在するとそれがない場合に比べて投資の限界費用は増大することを示している。その結果，投資規模は概して縮小する。

9.3.1　調整費用の種々の形態

投資に関する文献では主に３つのタイプの調整費用が議論される。調整費用が発生する源泉の１つに投資の不可逆性（*investment irreversibility*）が挙げられる。企業が資本を１単位購入した後，その資本財の中古価格（下取り価格）は著しく低いものになるであろう。資本ストックを増加させることはたやすいが，それを減らすことはかなり難しい場合が多い。工場はそうした例の１つである。工場はその企業が目指す生産量に見合う規模で建設される。まったく同じような企業が，これまたまったく同じ必要性をもって近隣に存在する（立地している）という可能性は低い。そのため，必要なときにその工場をすぐに売却するということは難しい。

不可逆性に起因する費用を盛り込む簡単な方法は，調整費用を

$$A(I_t)=(P^I-P^S)I_t \tag{9.14}$$

のように定式化することである。ここで，$P^I - P^S$ は資本の購入価格と将来の潜在的な売却価格の差を表す。この差が大きければ，企業は資本を将来売却する必要がないと確信できるときにだけ購入することになる。

調整費用の第２のタイプは，大きな固定費用を構成要素として含むという定式化である。

$$A(I_t) = F + \kappa(I_t) \tag{9.15}$$

(9. 15) 式では，調整費用は $F>0$ である固定費用と $\kappa'(I_t)>0$ である可変要素の２つからなっている。固定費用には投資を実施した後に財の生産方法を大きく，かつ不連続な形で変化させる必要性が生じたという状況も含んでいる。不可逆性や固定的な調整費用を考慮した調整費用モデルはともに，長い間投資が行われなかった期間が突然の大規模な投資によって終了するという非連続的（一括的）な形で投資が行われる場合も想定している。

それに対して，調整費用の第３のタイプは費用が徐々に増加していくように定式化するというもので，これまでのタイプとは性質が大きく異なる。

$$A(I_t) = \frac{aI_t^2}{2} \tag{9.16}$$

(9. 16) 式において，$a>0$ はパラメータである。また，資本ストックが減少するとき投資 I_t は負にもなりうる。(9. 16) 式を微分すると，$I>0$ のときは $A'(I_t) = aI > 0$，$I<0$ のときは $A'(I_t) = aI < 0$ となる。したがって，正の投資も負の投資もともに正の限界費用を発生させる。さらに，$A''(I_t) = aI > 0$ を仮定する。これは，費用が（投資に対して）凸であることを意味する。この凸性という性質は，資本ストックが変化するときの費用が資本が増加する以上の割合で増加してしまうということを表している。このような場合，投資家は資本を漸進的に変化させようとするであろう。もちろん，企業の調整費

用が実際どのタイプであるかはその企業の生産構造や体質に依存することはいうまでもない。

9.4　住宅市場

典型的な家計が生涯において決断する最も重要な投資決定は，住む家を購入するかどうか，またそれをいつ購入するかという選択であろう。住宅投資の決定に際して，家族は消費する通常の財の最適な組み合わせや住宅を保有することから得られる効用について考える必要がある。

住宅投資の問題を静学的な問題として考えることにしよう。ある時点における住宅ストックの総額を住宅ストックの規模 H（平米数）に住宅 1 単位当たりの価格 p^H をかけて表すことにする[8)]。すなわち，$p^H H$ である。住宅を購入するとき，家計はその全額を借入によって賄うものとする。各期において家計は $rp^H H$ の利子を支払う。簡単化のため，当面の間，家計は借入資金を返済する必要はないものと仮定する。ただし，利子のほかに $\delta p^H H$ に相当する住宅の修繕費や維持費用も負担しなければならないとする。ここで，$\delta>0$ は住宅ストックの減価償却率である。以上を考慮すると，住宅を 1 期間保有するときにかかる費用総額は $(r+\delta)p^H H$ で表される。

家計は毎期 y の所得を稼ぐとする。そしてその所得は次式のように消費 c と住宅に対して支出される。

$$c+(r+\delta)p^H H \leq y$$

簡単化のため，貯蓄は考えないものとする。

さらに，消費活動と住宅の双方から効用は得られると仮定する。効用関数については対数線形を想定する。

$$U=\ln c+\eta \ln H \tag{9.17}$$

（9. 17）式において，$\eta>0$ であるが，これは住宅に対する相対的な重要度を表している。もし，$\eta>1$ であれば，家計は財の消費より住宅からより大きな限界効用を得ていることを意味する。

家計の選択は，最適な住宅保有量を選択することである。予算制約式を効用関数に代入すると次式が得られる。

$$U=\ln[y-(r+\delta)p^{H}H]+\eta\ln H$$

最大化のための1階の条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial U}{\partial H}=-\frac{(r+\delta)p^{H}}{Y-(r+\delta)p^{H}H}+\frac{\eta}{H}=0$$

この条件式を変形すると，家計の住宅に対する需要を求めることができる。

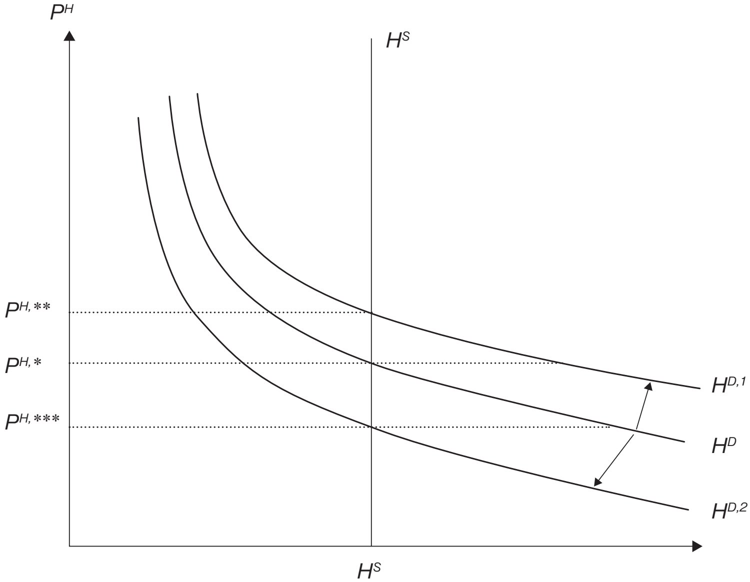
$$H^{D}=\frac{\eta y}{p^{H}(r+\delta)(1+\eta)} \tag{9.18}$$

住宅供給は短期的に H^{S} の水準で固定されているとしよう。均衡では，需要量と供給量は等しいから，$H^{S}=H^{D}$ である。以上から，住宅の均衡価格を求めることができる。

$$p^{H,*}=\frac{\eta y}{(r+\delta)(1+\eta)H^{S}}$$

住宅価格は住宅の供給量 H^{S} が増加すると低下する。これは特に驚くべきことではない。現存する住宅のストック量が多いほど価格が低くなるのは明らかである。より興味深く思われる点，あるいは多くの家計にいつも関係し

図 9. 1　住宅の均衡価格に対する利子率および所得の低下の影響



てくる点というのは，住宅の均衡価格が利子率 r の上昇とともに低下するということである。中央銀行が金融政策を実施した結果，利子率が突然低下したとしよう。予期せぬ金利の低下は需要曲線を外側へシフトさせる。そのため，一時的ではあるが住宅の超過需要が発生する。図 9. 1 には住宅価格がより高い新しい水準（$p^{H,**}$）へと上昇する様子が描かれている。

景気が後退して家計の所得 y が減少した場合の影響についても見ておこう。典型的な動きとして，物価は短期的には初期水準 $p^{H,*}$ からゆっくりと調整される。そのため，空き家の超過供給が発生する。賃金がまさにそうであるように，住宅価格も傾向性として下方に対しては硬直的である。住宅価格の下落は住宅を保有する人たちの資産の減少を意味する。人々は自分たちが支払った購入価格より低い価格で住宅を手放すのは嫌がるものだ（担保価値がローンを下回るという事態が米国において生じた）。したがって，価格の下方への調整はゆっくりしたものとなる。最終的には，価格はより低い新

しい均衡水準 $p^{H,***}$へと落ち着いていく。

15. 数学付録[9)]

15.1 はじめに

本書を読むには，微分の演算に多少馴染んでいることが必要である。ただ幸いなことに，本書の分析は１変数関数に限定されている。本章では以下の点について論じていく。

・いくつかの基本的な関数の導関数
・簡単な微分の法則
・チェーン（鎖）ルールによる微分
・陰関数の微分
・マクロ経済学への応用

この数学付録で取り上げられている内容は標準的である。より詳細な説明が必要な場合は，微分の初級テキストを参照されたい。

15.2 いくつかの基本的な関数の導関数

ある実数値関数$f(x)$を考えよう。ここで，$x \in R$ である。ある点 x_0 で評価した関数 f の導関数を，$f'(x_0)$ あるいは $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$ と表すと，それは x_0 を微小量変化させた時の関数 f の値の変化に等しい。

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{15-1}$$

この式の極限が存在するとき，関数fはx_0で微分可能であるといわれる。

ところが，（15.1）式を用いて極限値を計算することは困難な場合が多い。そのため，実際は，導関数の定義式を使わずに種々の方法で微分の演算が行われている。

定数関数：　$f(x)=c$

定数関数の導関数は以下で与えられる。

$$f'(x)=0 \qquad \forall x \in R \tag{15.2}$$

恒等関数：　$f(x)=x$

$$f'(x)=1 \qquad \forall x \in R \tag{15.3}$$

べき関数：　$f(x)=x^n$

原則として，指数は任意の定数nである。べき関数の導関数は次式で与えられる。

$$f'(x)=nx^{n-1} \qquad \forall x \in R \tag{15.4}$$

恒等関数は指数が$n=1$の場合の特殊ケースである。上記の法則を確かめるために，（15.4）式に$n=1$を代入してみよう。すると，$f'(x)=x^0=1$が得られる。

指数関数：　$f(x)=e^x$

指数は微積分学において恐らく最も重要な関数である。指数関数の底は無理数の$e \approx 2.7$である。この関数は，微分しても変化しないという，とても面白い性質を持っている[10)]。

$$f'(x)=e^x \qquad \forall x \in R \tag{15.5}$$

対数関数：　$f(x)=\ln x$

自然対数 ln は，指数関数の逆関数である。任意の数 $x \in R$ に対して $y=e^x$ の値を求めるのに，y の対数をとって $\ln y=x$ を求めることができる。ただし，対数関数は正の実数でのみ定義されることに注意せよ。対数関数の導関数は，次式のように与えられる。

$$f'(x)=\frac{1}{x} \qquad \forall x \in (0, \infty) \tag{15.6}$$

15.3　微分の法則

一般に関数は複雑な構造を持つ場合が多い。そのため，導関数を求めることは厄介なことがある。そこで，微分を簡単にするために，当初の関数を扱いやすいより小さな部分へと分割していくという方法がある。それらの方法についていくつか見ていくことにしよう。

15.3.1　関数の和

2つの関数 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ を考える。関数 $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ の導関数は次式で与えられる。

$$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) \tag{15.7}$$

この法則は，任意の有限な数の関数の和に一般化することができる。たとえば，次のような関数，$f(x)=x^2+e^x$ を考えてみよう。この関数は明らかに2つの関数，$f_1(x)=x^2$ と $f_2(x)=e^x$ の和である。f_1 と f_2 の両方の導関数を求めることはやさしい。関数 f の導関数を求めると，$f'(x)=2x+e^x$ となる。

15.3.2　スカラー積

ある関数 g について関数 f を $f(x)=cg(x)$ のように定義する。ここで $c \in R$ である。関数 f の導関数は次式で与えられる。

$$f'(x)=cg'(x) \qquad \forall x \in A \tag{15.8}$$

例として，関数 $f(x)=4x^3$ を考えてみよう。ここで，$f'(x)=4 \cdot 3x^{3-1}=12x^2$ であることはすぐにわかるであろう。$c=-1$ とおき，2つの法則（関数の和の法則とスカラー積の法則）を合わせると，微分の差 $f=f_1-f_2$ の法則，すなわち $f'(x)=f_1'(x)-f_2'(x)$ を導くことができる。

15.3.3　関数の積

2つの関数 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ について，$f(x)=f_1(x)\,f_2(x)$ の導関数は次式で与えられる。

$$f'(x)=f_1'(x)\,f_2(x)+f_1(x)\,f_2'(x) \tag{15.9}$$

例として，関数 $f(x)=xe^x$ を考えてみよう。関数 f の導関数は次式で与えられる。

$$f'(x)=(x)'e^x+e(e^x)'=e^x+xe^x$$

15.3.4　関数の商

2つの関数 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ について $f(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ の導関数は次式で与えられる。

$$f'(x) = \frac{f_1'(x)\,f_2(x) - f_1(x)\,f_2'(x)}{[f_2(x)]^2}$$
$$= \frac{f_1'(x)}{f_2(x)} - \frac{f_1(x)\,f_2'(x)}{[f_2(x)]^2} \tag{15.10}$$

この関数は，f_2 が 0 とはならない x に対してのみ定義される。そうでなければ，そもそも割り算は定義できないからである。そのような関数の例として，$f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ を考えてみよう。$f(x)$ の導関数は，$x \neq 1$ に対して，$f'(x) = \dfrac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-1}{x^2-2x+1}$ と求めることができる。

15.4　チェーン（鎖）ルールによる微分

前節で示された法則は全て，いくつかの簡単な関数に分割できる場合に限定されていた。しかし，これらがすべてのケースであるわけではない。例として，関数 $h(x) = e^{x^2+1}$ を考えてみよう。この関数は，h が x の関数である他の関数 g の関数になっているという意味で合成関数と呼ばれる。つまり，$g(x) = x^2+1$，$f(y) = e^y$ とおいたとき，y の中に $g(x)$ を代入すると，$h(x) = f(g(x)) = e^{g(x)}$ となる。g は x に依存し，f は g に依存しているため，結局 f は x に依存していると考えることができる。

形式的には，2 つの関数 $g(x)$ と $f(g(x))$ を考えると，合成関数は次式のように定義することができる。

$$h(x) = f(g(x)) \tag{15.11}$$

では，x に関して $h(x)$ をどのように微分したらよいだろうか。直感的には，x の微小な変化に対して h がどれくらい変化するかを見てやればよい。

x が微小に変化すると g の導関数の分だけ $g(x)$ は変化する。$g(x)$ が変化すると g に依存する f も変化する。したがって，x が微小に変化すると反応が連鎖して引き起こされるわけである。中間に介在する関数の効果を通じて f が変化する。この変化の大きさは，g の変化の大きさと g が f に及ぼす変化の大きさの積に等しい。

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{df(g(x))}{dx} \\
&= \frac{df(g(x))}{dg(x)} \frac{dg(x)}{dx} \\
&= f'(g(x))g'(x)
\end{aligned}
\tag{15.12}
$$

例として，$h(x)=\mathrm{e}^{x^2+1}$ を考えると，導関数は，$h'(x)=2xe^{x^2+1}$ となる。

15.5　陰関数の微分

ある関数 $f(x)$ を考える。ただし，具体的な関数形は明示されていないと仮定する。つまり，利用可能な情報は，$[f(x)]^2+f(x)-x+1=0$ という関数関係のみである。この方程式を $f(x)$ について解いて，それから x について微分するということは簡単ではない。そのため，チェーン・ルールの方法を用いて方程式の両辺の微分をとることにする。すると，$2f(x)f'(x)+f'(x)-1=0$ が得られるが，この式は $f'(x)$ について線形である。最終的に，$f'(x)=\dfrac{1}{2f(x)+1}$ が得られる。

15.6　マクロ経済学への応用

マクロ経済学は，経済変数間の量的な関係やそれらの変数の時間を通じた

変化について研究する学問である。そうした理由から，もっぱら成長率に関心の目が向けられる。

15.6.1　乗法的関係にある関数の成長率

以下のような形の関数をしばしば見かける。

$$Y(t) = X(t)Z(t)$$

$Y(t)$ の成長率を求めるには，積のルールとチェーン・ルールを用いればよい。

$$\begin{aligned}\frac{dY(t)}{dt}\frac{1}{Y(t)} &= \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)}\\ &= \frac{\dot{X}(t)Z(t)+X(t)\dot{Z}(t)}{Y(t)}\\ &= \frac{\dot{X}(t)Z(t)+X(t)\dot{Z}(t)}{X(t)Z(t)}\\ &= \frac{\dot{X}(t)}{X(t)}+\frac{\dot{Z}(t)}{Z(t)}\end{aligned}$$

15.6.2　対数関数の微分としての成長率

所得の成長率やインフレ率といった経済変量は相対的な変化という概念を具体的に表現している。離散時間で考えた場合には，これらの量はたいてい百分率で表現されるが，時間が連続的に流れていると捉えた場合には極限を考えて，そしてほんの僅かな時間が経過したときの相対的な変化について検討しなければならなくなる。

たとえば，ある変数 $X(t)$ が時間の関数であるとしよう。瞬間的に変化する相対的な変化は時間に対する変数 X の成長率として表すことができる。時間 t で微分した変数 X を $\dot{X}(t)$ と表記すると，関数の成長率は $\dfrac{\dot{X}(t)}{X(t)}$ と表

すことができる[11]。

対数関数の微分が $\dfrac{d(\ln X)}{dX}=\dfrac{1}{X}$ と与えられたことを思い出してほしい。$\ln X(t)$ を時間 t で微分するときにチェーン・ルールを用いると，次式が得られる。

$$\frac{d\ln X(t)}{dt}=\frac{1}{X(t)}\frac{dX(t)}{dt} \tag{15.13}$$

通常，（15.13）式は次式のように書き換えられる。

$$\frac{d\ln X(t)}{dt}=\frac{\dot{X}(t)}{X(t)} \tag{15.14}$$

（15.14）式をみると，$X(t)$ の成長率は対数関数の微分そのものであることがわかる。

15.7　指数および対数の基本的な性質

15.7.1　指数

1. $x^0=1,\ x\neq 0$
2. $x^1=x$
3. $x^n x^m=x^{n+m}$
4. $\dfrac{x^n}{x^m}=x^{n-m},\ x\neq 0$
5. $(x^n)^m=x^{nm}$
6. $(xy)^n=x^n y^n$

7. $\dfrac{x^n}{y^n},\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^n,\ y \neq 0$

15.7.2　対数

1. $\ln 1 = 0$
2. $\ln e = 1$
3. $\ln x + \ln y = \ln(xy)$
4. $\ln x - \ln y = \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$
5. $\ln(x^c) = c\ln x$
6. $x = e^{\ln x}$

注

＊　本翻訳は，原著「Essentials of Advanced Macroeconomic Theory」の著者である Ola Olsson，ならびに権利者である TAYLOR & FRANCIS（UK）の許諾を得て行っている。

1）『政経論叢』へは，章の順序に従わず，順不同で掲載していく予定であることをあらかじめお断りしておきたい。マクロ経済理論の上級テキストである本書は，内容的に各章はそれぞれ独立しており，順不同で掲載しても特に問題とはならない。また，翻訳は研究会メンバー5 名による分担であるため，『政経論叢』への投稿者も章ごとに変わることについてもあらかじめご承知おきいただきたい。

2）次号では，第 11 章 “IS-MP, Aggregate Demand, and Aggregate Supply” を掲載する予定である。

3）研究会のメンバーは，2015 年 5 月 30 日（土）と 31 日（日）の両日，国士舘大学において開催された日本経済政策学会の第 72 回全国大会に役員として携わっていただいた運営委員会のメンバーから構成されている。第 72 回大会の開催にご協力いただいた国士舘大学ならびに全国の諸機関の先生方，および国士舘大学の事務職員ならびに日本経済政策学会の事務局の方々に大会運営委員会委員長としてこの場を借りて改めて衷心より御礼を申し上げたい。

4）本プロジェクトの成果は，翻訳書として 2017 年春に出版する予定である。今後もわれわれの「経済学研究会」では経済学の様々な領域を研究するプロジェクトを展開していきたいと考えている。

5）本節は原著では第 9 章にあたるため，式の通し番号も変更せずに（9. 1），（9. 2），…，のまま連番表記することにした。また，図表等の番号についても同様である。

6） 経済には，たとえば教育を通じた人的資本投資や，何らかの経済的な目的に対してなされる社会資本投資といったものもある。
7） 加速度モデルにしたがって $K_t=\kappa Y_t$ を考える。ここで，$\kappa>0$ は資本産出量比率（一定）である。この関係から，もし Y_t が ΔY_t だけ増加したとすると，K_t もまた増加する。したがって，$I_t=\kappa\Delta Y_t$ だけの投資が行われることになる。
8） 以下の部分は，Sørensen and Whitta-Jakobsen（2005, Chapter 15）の分析と類似している。
9） 本節は原著では第 15 章にあたるため，式の通し番号も変更せずに（15. 1），（15. 2），…，のまま連番表記することにした。
10） 実際，指数関数の属 $f(x)=ce^x$，$c\in R$ のすべてがこの性質を有している。
11） マクロ経済学では，こうした表記法がしばしば用いられる。

参考文献

以下，参考文献として原著の第 9 章と第 15 章の本文および脚注の中で記載のあった文献について記載する。

Branson, W. H.（1989）*Macroeconomic Theory and Policy*, 3rd edition. New York: Harper & Row.
Caballero, R.（1997）Aggregate Investment. NBER Working Paper 6264, NBER.
Romer, D.（2005）*Advanced Macroeconomics*. Boston: McGraw-Hill.
Sørensen, P. B. and H. J. Whitta-Jakobsen（2005）*Introducing Advanced Macroeconomics: Growth and Business Cycles*. Maindenhead: McGraw-hill.