

レイリー・ラム方程式の心室中隔壁への応用 Rayleigh-Lamb Equation in Human Heart Wall

戸次直明¹, 新谷正嶺²

超音波医療診断装置により、拍動によって動いている人の心臓の心室中隔壁 (IVS) 上に励起された微小なパルス状の興奮波が観測されている。その興奮波の寿命は数ミリ秒で非常に短いけれども、その位相速度の力学特性を明らかにするために、ここでは、血液中に浸かった IVS を平板と仮定して、レイリー・ラム分散方程式を拡張した場合を考察する。この拡張されたレイリー・ラム分散方程式は、超越方程式なので、長波長のラム波の場合において摂動展開して、単純化された分散関係式を求める。この分散関係式を、観測された興奮波に適用して、その妥当性について検討する。このラム波モデルに基づく単純化された近似分散方程式によって、拍動によって励起された心臓壁上のパルス波状の興奮波の位相速度の分散関係の物理的意味と、超音波医療診断装置による観測結果とが、定性的によく説明できることを示す。

1. はじめに

約 100 年ほど前、19 世紀後半、レイリー卿とラム卿は、純粋に流体力学的見地から、境界のある弾性体中を伝播する線形波動について、精力的に研究した^(1, 2, 3)。その後、数十年の間、これらの研究はあまり注目されなかった。しかし、皮肉なことに、20 世紀前半における世界大戦に際して、敵潜水艦探知の必要性などから、超音波探信儀 (ソーナー, Sound navigation and ranging) が開発されて、境界のある弾性体中を伝播する波動 (ガイド波, guided waves^(3, 4)) についての重要性が再認識された。レイリー卿やラム卿が偉大なのは、現実の仔細な事柄や時を超えて、純粋な学問的興味から研究成果を挙げたからだと思われる。現在では、ソーナーの技術は、民生用途でも、魚群探知機や医療用超音波検査装置などとして普及し、工業製品などに対する非破壊検査などの分野でも広く利用されている。

ガイド波は境界をもつ様々な形状の弾性体構造物に沿って伝播する弾性波の総称であり、その多くは、弾性体に斜角入射された縦波超音波が境界面で反射されることでその一部が横波超音波に変換されて (モード変換) 弾性体内部を伝播する。また、横波超音波の伝播においても、境界面での反射を繰り返す過程でモード変換が生じて、一部は縦波超音波に変換されて伝播する。このように、平板ガイド波は、縦波と横波が伝播する過程でモード変換を繰り返すことにより、平板表面が うねる ような伝播挙動を示す。このように伝播する超音波がラム波 (Lamb wave) である^(2, 5)。複雑にモード変換を繰り返すラム波の伝播挙動は非常に複雑で、入射する超音波の周波数や弾性体の形状に強く依存する。そのため、平板や円柱などのように、形状が比較的単純な場合を除き、境界条件の複雑さのために、線形波動伝播にもかかわらず、ガイド波の伝播挙動を理論的に把握することは現在でも簡単ではない。

ラム波は、空気 (境界) に接する平板 (弾性体) 中を伝播するガイド波の一種であり、その伝播特性は、矩形の断面を持つ平板の材質やその厚さ、超音波の周波数に強く依存することが、ラム卿によって、初めて明らかにされた⁽²⁾。また、その伝播モードには、ラム波の平板表面の うねり方 に応じて、対称モード (Symmetric, S_m) と非対称モード (Antisymmetric, A_m) の 2 種類のモードが存在し、さらにそれぞれの

¹ 早稲田大学理工学術院・物理及応用物理

² 東京大学大学院・理学系研究科・物理

高次モード（次数， $m = 0, 1, 2, \dots$ ）が同時に伝播することが示された．ラム卿が論じたのは，空気に接する平板中を伝播する場合の弾性波の特性であり，平板中を伝播する超音波は平板と空気との境界面において，一部は空気中へ透過するけれども，そのエネルギーの大部分は平板内部へ反射されるので，空気中への透過エネルギーの損出は小さいので無視できた．しかしながら，血液などに浸った平板中を伝播するラム波の場合には，血液中之の透過エネルギーの損出は小さくないので，これらのエネルギー損出を考慮しなければならない．比較的最近，超音波の医療診断への応用を目指して，Kundu は，ラム波を液体に浸った平板中を伝播するガイド波の場合へ拡張した⁽⁴⁾．

心臓は，脊椎動物などがもつ筋肉質の臓器であり，心筋組織の収縮によって血液の循環を行うポンプの役目を担っている．東北大学の金井研究室で開発された超音波医療診断装置では，胸壁上から計測した反射超音波の直交検波出力信号の振幅と位相の両者を用いて，対象の瞬時的な位置を決定することによって高精度トラッキングを行い，拍動によって大きく動いている人の心臓壁上の微小な興奮波振動を高精度に計測した．この興奮波の寿命は数ミリ秒で非常に短いけれども，その位相速度の力学特性を説明するために，金井^(6,7)はラム波モデルに基づいて，Kundu が導出した分散関係式をこの興奮波に適用した．また，若い健康な男性の心室中隔壁（IVS）の粘弾性係数を，非線形最適化法を使って，非侵襲的 *in vivo* に初めて推定した．ここでは，そのラム波モデルの非線形最適化法の妥当性について再考察する．今回の再考察によって，拍動によって励起された心臓壁上のパルス波状の興奮波の位相速度の分散関係の物理的意味と，超音波医療診断装置による観測結果が定性的によく説明できること等が示される．

観測された興奮波の非線形性が強くなった場合，心基部から心尖部の方向に，ラム波が非線形変調を受けて，そのラム波の位相欠陥が発現したローカルポイントが源になってラム波を前後にヘテロクリニックに励起し，その位相欠陥による位相の飛びが振幅の落ち込みを伴いながら伝播することが観察された．即ち，収縮末期の大動脈弁閉鎖時に，大動脈弁の閉鎖に伴って心室中隔壁（IVS）上に沿って伝播するパルス波状の非線形ラム波の位相特異点が伝播しながら生成消滅することが観察された．そして，ラム波の非線形変調による位相特異点の力学特性が詳しく調べられた．幸いなことに，この非線形粘弾性ラム波の位相特異点の 1 次元の力学特性は，1 次元複素ギンツバーク・ランダウ方程式における Bekki-Nozaki (BN) ホール 解⁽⁸⁾で記述できることが既に示されている^(9,10)．ここでは，心臓壁上の微小な興奮波伝播を説明するモデルとして，主に，ガイド波としてのラム波の応用的視点について考察する．

2. ラム波モデルに基づく非線形最適化法

金井は従来の医用超音波診断装置にはなかった，高精度・高分解能の位相差トラッキング法を用いて，収縮末期の大動脈弁閉鎖時に，拍動で大きく動く心筋内の各点の速度を，周波数解析可能な波形データとして非侵襲計測できる手法を開発した^(6,7)．この計測法で，心筋の速度波形の 10 Hz から 90 Hz までの成分のパルス波状の興奮波の位相情報の計測が高い精度で実現できた．この位相データに基づいた最小二乗法により，パルス波状の興奮波の位相速度の分散関係を求めた．結果は，20 Hz 成分を除くと，だいたい次のように近似される：

$$c_{ph}(f) = c_0 \sqrt{f}, \quad (1)$$

ただし， c_0 は定数 ($0.4 \leq c_0 \leq 0.6$) で， f はサンプリング周波数である ($10 \leq f \leq 90$)．上式の分散関係に従うパルス波状の興奮波は，収縮末期の大動脈弁閉鎖時前後の約 70 [ms] の測定時間内で粘弾性のため

減衰するけれども, IVS 上の波形のパターンから, 非対称モード 0 次 (A_0) のラム波の分散関係に対応していることが分かる⁽⁶⁾.

この定数の物理的意味を明らかにするために, 金井⁽⁶⁾が採用した 2 次元ラム波モデルに基づく分散方程式を再考察する. まず, 血液に浸った心室中隔壁を厚さ $2h$ [m] の粘弾性の屈曲した板上を伝播する非対称モードの 2 次元ラム波を仮定する. ここでは, $h = 0.005$ [m], 心筋の密度は $\rho_0 = 1.1 \times 10^3$ [kg/m³] とする. 心基部から心尖部の方向に縦波が, 心室中隔壁の厚さ方向に剪断 (シアー) 波が伝播する場合, 詳細は文献に譲るとして^(4,6), 金井は, 非対称モード A_0 のパルス波状の興奮波に対して, 次のような超越方程式である分散方程式を採用した:

$$4k_L^3 \sqrt{k_L^2 - k_S^2} \tanh[h\sqrt{k_L^2 - k_S^2}] - (2k_L^2 - k_S^2)^2 \tanh[hk_L] = k_S^4. \quad (2)$$

ただし, 波数 k_L [rad/m] は心基部から心尖部の方向に伝播するラム波の波数, 波数 k_S [rad/m] は心室中隔壁の厚さ方向に伝播するシアー波の波数である. ラム卿が導いた分散方程式は, 平板外への透過エネルギーの損出が小さい場合で, 分散方程式 (2) の右辺を無視したこと, 即ち, 0 と置いたことに相当する. また, Voigt モデルを導入して, ラメ定数を複素数に拡張すると,

$$\mu = \mu_1 + i\omega\mu_2, \quad (3)$$

なので, ラム波の速さ c_L [m/s] とシアー波の速さ c_S [m/s] はそれぞれ

$$c_L(\mu, \omega) = \frac{\omega}{k_L}, \quad (4)$$

$$c_S = \frac{\omega}{k_S} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}. \quad (5)$$

で与えられる. ここで, 角周波数 $\omega = 2\pi f$, μ は複素ラメ定数の大きさとする ($\mu = \sqrt{\mu_1^2 + (\omega\mu_2)^2}$). ただし, μ_1 は弾性係数 [Pa], μ_2 は粘性係数 [Pa·s] である. 式 (3) から (5) を式 (2) に代入すると, 式 (2) の左辺は, ラム波の速さ c_L とシアー波の速さ c_S と複素ラメ定数とサンプリング角周波数 f に依存することを示す. そこで, 分散方程式 (2) は次のような代数方程式で書ける;

$$F(c_L, \mu, \omega) = 0. \quad (6)$$

即ち, 式 (6) はシアー波の波数と速さを消去した表現になっている. あるサンプリング角周波数に対して, 式 (6) を満たすような複素ラメ定数をパラメータとして含むラム波の速さ c_L を選んで, このラム波と式 (1) の位相速度との距離を次のように定義する:

$$d(\mu_1, \mu_2) \equiv \sqrt{\frac{\sum_{\omega} w(\omega)^2 |c_{ph}(\omega) - c_L(\mu, \omega)|^2}{\sum_{\omega} w(\omega)^2}}. \quad (7)$$

ただし, $w(\omega)$ は重み関数で, 位相速度の逆数を仮定する. 最後に, 最適化された複素ラメ定数 $\hat{\mu}$ を推定するため, ラム波モデルの非線形最適化法を, 式 (7) を使って最小二乗法により次のように定義する:

$$\hat{\mu} = \min_{(\mu_1, \mu_2)} [d(\mu_1, \mu_2)]. \quad (8)$$

一般に、ラム波の高次モードでは、対象モード S_m にしろ非対称モード A_m にしろ、それぞれ切断周波数が存在して⁽⁴⁾、式 (7) の最小値が存在するかどうかは自明ではないし、分散方程式 (2) は陽に使われていないので、パルス波状の興奮波の位相速度 (1) の物理的な意味も明確でない。即ち、これら一連の非線形最適化法では、観測した興奮波の位相速度がラム波の速さなのかシアー波の速さなのかがはっきりしないし、定数 c_0 も物理的に説明できない。それ故、これらの物理的意味を明らかにするためには、ラム波の伝播において、シアー（横）波とラム（縦）波の関係を超越分散方程式 (2) に立ち戻って調べなければならない。

3. 心筋興奮波の超越分散方程式に対する近似関係式

ここで、金井が採用した分散方程式 (2) に立ち戻って、再考察する。もし、分散方程式 (2) が解析的に解けて、シアー波の波数とラム波の波数との関係が明らかになれば、ラム波モデルに基づく非線形最適化法を使わないで、ラム波の位相速度が簡単に求まり、観測された位相速度と直接比較出来る。しかしながら、分散方程式 (2) は超越方程式であるので、その解析的な関係を見つけることは難しい。そこで、分散方程式 (2) を数値的に解いてみたところ、我々は、非対称モード A_0 の長波長のラム波 ($0 < hk_L < 1$) に対して、シアー波の波数 k_S とラム波の波数 k_L との間に近似的に非常に簡単な関係があることを見出した；

$$k_S = s(h) \times k_L^2, \quad (9)$$

ただし、

$$s(h) = \tau h. \quad (10)$$

ここで、 τ は普遍定数で、 $\tau = 0.56 \pm 0.03$ である。

以後、簡単のため、心室中隔壁の厚さの半値巾の値 $h[\text{m}]$ で無次元化したラム波の波数 x とシアー波の波数 y を導入すると、式 (9) は、 $0 < x < 1$ に対して、

$$y = \tau x^2, \quad (11)$$

と書き直せる。実際、図 1 に示されているように、式 (11) は、超越分散方程式 (2) のよい近似になっていることがわかる。

また、超越分散方程式 (2) を無次元の形で次のように書き直す；

$$4x^3 z \tanh[z] - (x^2 + z^2)^2 \tanh[x] = (x^2 - z^2)^2.$$

ただし、 $z^2 = x^2 - y^2$ とおいた。この超越分散方程式を数値的に解いた曲線が図 1 のブルーの線であり、普遍定数 $\tau = 0.56$ の近似曲線 (11) が赤い曲線である。ここでは、無次元超越分散方程式の自明解 $y = 0$ ($x = z$) は除いた。また、図 1 において、原点付近では、数値計算で用いたアルゴリズムに依存する数値エラーが大きいかれども、後で示すように、摂動計算により、この数値エラーは物理的見地から無視出来る。

数値的に得た普遍定数 $\tau \approx 0.56$ の値が Euler-Mascheroni (オイラー-マスケローニ) 定数 γ にかなり近い値であることに着目して、普遍定数 $\tau = 0.56$ を γ に置き換える。このとき、 $0 < x < 1$ に対して、

$$y = \gamma x^2,$$

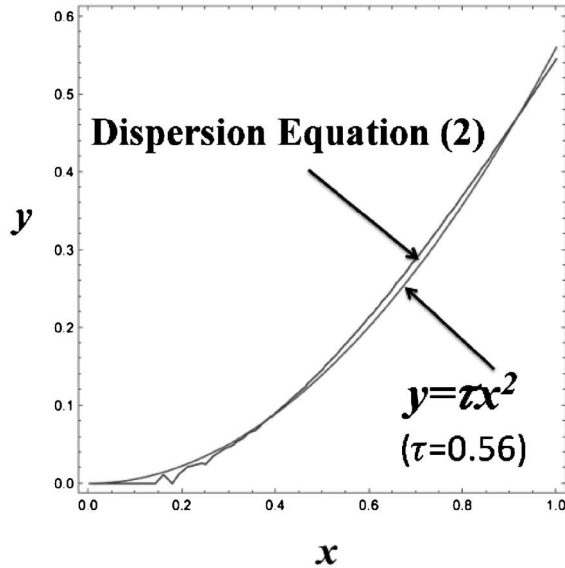


図1 超越分散方程式 (2) を数値的に解いた曲線と近似分散曲線 (11). ただし、普遍定数 $\tau = 0.56$ の値を採用した.

なる関係式は、驚くほど分散方程式 (2) の良い近似になっていることが分かる (図1が見難くなるので省略した). このことは、この超越分散方程式の解の中にオイラー-マスケローニ定数 γ が含まれる可能性を示唆しているようにみえるけれども、分散方程式 (2) は双曲線関数を含んでいるだけで、ガンマ関数などを含んでいないので、そのような可能性はない. ただし、オイラー-マスケローニ定数 γ は、

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0.57721567 \dots$$

である. このオイラー-マスケローニ定数 γ は有名な定数であるけれども、それが無理数なのか超越数 (有理数係数の 0 でない多項式の根になる複素数を代数的数といい、代数的数でない複素数のこと) なのかは、いまだに証明されていない. 因みに、ドイツ人の数学者リンデマンが円周率が超越数であることを証明した (1882 年) のは、丁度、イギリス人の物理学者レイリー卿が弾性体表面を伝播する波動を研究していた頃である. 円周率 π が超越数であることの証明は、実用上は全く意味がないかもしれないけれども、我々の魂に安らぎを与えてくれる. なぜなら、もしこの証明がなかったら、円周率 π の定義多項式を求めようとする研究者がまだいるかもしれないからである.

このことは偖置き、長波長のラム波に対して ($0 < x < 1.5$), 双曲線関数はテイラー展開できるので、

$$\tanh[x] \approx u \left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4 \right), \quad \tanh[z] \approx z \left(1 - \frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 \right),$$

となり、超越分散方程式 (2) に代入すると、次のような無次元型での近似分散関係式

$$y^2 = \frac{1}{3}x^4 \left(1 - \frac{2}{5}y^2 \right), \quad (12)$$

を得る. 特に、ラム波の波数が小さい場合 ($0 < x < 1$), 式 (12) の右辺の第二項が無視出来るので、

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x^2. \quad (13)$$

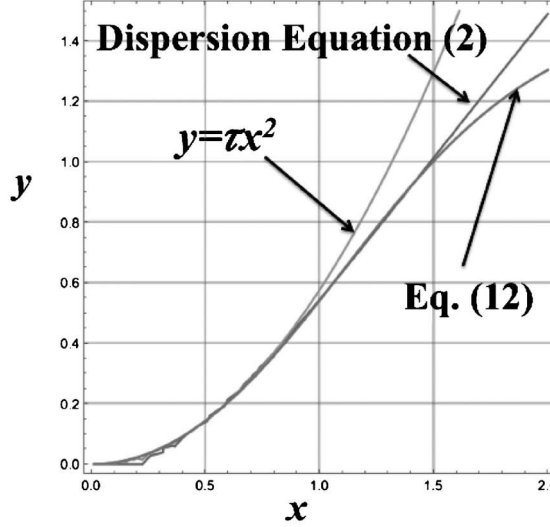


図2 超越分散方程式 (2) を数値的に解いた曲線と近似分散曲線 (12) と (13). ただし、普遍定数 $\tau = 1/\sqrt{3}$ を採用した.

を得る. このように, 式 (13) より, ラム波の波数が小さい場合 ($0 < x < 1$), 超越分散方程式 (2) における普遍定数は,

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (14)$$

であることが示された. また, 式 (13) の係数 $1/\sqrt{3} (= 0.57735027\dots)$ がオイラー-マスケローニ定数と近い値であることが分かった. 図2に示されているように, 式 (12) と (13) は, ラム波の波数が小さいとき ($0 < x < 1.5$) 超越分散方程式 (2) のよい近似関係式を与えていることが分かる. 一方, $x \gg 1$ の場合は, 無次元化された超越分散方程式は,

$$z^4 - 2x^3 z + x^4 \approx 0. \quad (15)$$

と近似できる. この代数方程式において,

$$z = \alpha x, \quad (16)$$

の形の解は, 次の方程式

$$\alpha^4 - 2\alpha + 1 = 0, \quad (17)$$

を満たす. これを解いて非自明な解 ($\alpha \neq 1$) $\alpha \approx 0.5437$ が得られる. 式 (4) と (5) を使うと, 十分大きなラム波の波数 ($hk_L \gg 1$) に対して, ラム波の速さ c_L [m/s] とシアー波の速さ c_S [m/s] との関係は

$$c_L \approx \sqrt{1 - \alpha^2} c_S, \quad (18)$$

となる.

4. ラム波とシアー波の近似分散方程式の導出

非対称モード A_0 の長波長のラム波 ($0 < hk_L < 1$) に対して, 式 (4) と式 (5) を式 (13) に代入すると, ラム波の速さ c_L [m/s] とシアー波の速さ c_S [m/s] と周波数 f [Hz] との関係を与える近似分散方程式

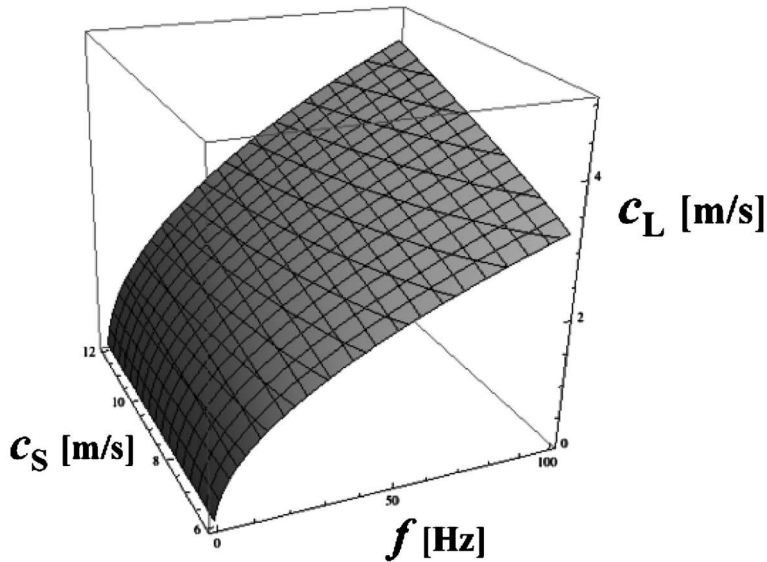


図3 ラム波の速さ c_L とシアー波の速さ c_S と周波数 f の近似分散方程式 (19). ただし, $h=0.005$ [m] の場合を図示した.

$$c_L^2 - K \cdot f \cdot c_S = 0, \quad (19)$$

を得る. ここで, K は定数で $K \equiv 2\pi h/\sqrt{3}$ である.

今後は, 特に断らない限り, 十分小さなラム波の波数 ($hk_L < 1$) の場合を考察する. 心室中隔壁の厚さの半値巾の値 $h = 0.005$ [m] に対して, 近似分散方程式 (19) を図示すると, 図3のようになる.

シアー波の速さ c_S が一定のとき, 近似分散方程式 (19) から,

$$c_L(f) = c_0 \times \sqrt{f}, \quad (20)$$

が導ける. ただし, $c_0 \equiv \sqrt{Kc_S}$. 確かに, この関係式 (19) は, 式 (13) の近似により, 超越方程式である分散方程式 (2) に較べて著しく簡単化されていることが分かる. また, ラム波の速さとシアー波の速さは同時に直接測定されていないけれども, 一方の速さが測定出来れば, 式 (19) から推定できる. 例えば, サンプリグ周波数 $f = 60$ [Hz] の場合, 式 (19) から, $c_S=10$ [m/s], $c_L=3.3$ [m/s] と見積もることが出来る. このとき,

$$c_0 = \sqrt{Kc_S} \approx 0.42, \quad (21)$$

を得る. 一般に, 観測された位相速度 (1) はラム波の速さとは同等ではないけれども, シアー波の波数や速さを直接測定することが困難なこともあり, サンプリグ周波数 f が固定されているとき, 観測された興奮波の位相速度とラム波の速さが同じであると仮定する ($c_{ph} = c_L$) ことによって, 定性的に, 式 (19) から, シアー波の速さが求まり, 式 (5) から, 粘弾性係数 (μ_1, μ_2) が推定出来て⁽¹¹⁾, ラム波の伝播特性を説明することができる. これは, 観測された興奮波の位相速度 c_{ph} (1) における定数 c_0 の物理的意味を説明しており, $0.4 < c_0 < 0.6$ なので, 定性的によい近似になっていることを示している. 一

方, ラム波の速さが一定の場合は, シアー波の速さ $c_S(f)$ は, 近似分散方程式 (19) より,

$$c_S(f) = \left(\frac{c_L^2}{K} \right) \frac{1}{f}. \quad (22)$$

となる. 式 (22) は, 非線形最適化法で採用した重み関数 $w(\omega)$ の物理的意味を与えている. 式 (7) において, 重み関数 $w(\omega)$ はローパスフィルターの役目を果たしている.

5. 近似分散方程式による粘弾性係数の推定

先に述べたように, 観測した心臓壁上の興奮波に対して, 金井はラム波モデルに基づいて, 若い健康な男性の心室中隔壁の粘弾性係数を, 非線形最適化法, 即ち, 式 (7) と式 (8) を使って, 非侵襲的 *in vivo* に初めて推定した⁽⁶⁾. この結果によると, ラメ定数は, サンプリング周波数 $f = 60$ [Hz] を固定したとき, $\mu_1 \approx 30$ [kPa], $70 < \mu_2 < 400$ [Pa·s] であった. 金井は, このラメ定数の値が, *in vitro* の場合とかなり異なっていることを初めて示した.

これらの結果を, 小さなラム波の波数 ($hk_L < 1$) の場合において, 非線形最適化法を使わずに, 本考察で見つけたシアー波の波数とラム波の波数の近似関係式 (9) あるいは近似分散方程式 (19) で説明できることを以下に簡単に述べる. 詳細は文献に譲る⁽¹¹⁾. 単一 Voigt モデルを導入すると, ラメ定数は式 (3) のように複素数になるので, シアー波の速さは, 式 (3) と (5) より, 次のように拡張されて,

$$c_S(f, \mu_1, \mu_2) = \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_m}} \left[1 + \left(2\pi f \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{4}}, \quad (23)$$

となる. 従って, 近似分散関係式 (19) と (23) より, 粘性係数 μ_2 は,

$$\mu_2 = \frac{\mu_1}{2\pi f} \sqrt{\left(\frac{c_L^2}{K f v_1} \right)^4 - 1} = \frac{\mu_1}{2\pi f} \sqrt{\left(\frac{c_S}{v_1} \right)^4 - 1}, \quad (24)$$

となる. ただし, v_1 はラメ定数の粘性係数を $\mu_2 = 0$ としたときのバイアス成分 ($f \approx 0$) のシアー波の速さである:

$$v_1 = \lim_{\mu_2 \rightarrow 0} c_S(f, \mu_1, \mu_2) = \lim_{f \rightarrow 0} c_S(f, \mu_1, \mu_2). \quad (25)$$

式 (24) より, $v_1 \leq c_S$ が成り立つ. ラム波の波数 k_L が観測されているとき, シアー波の波数 k_S は式 (9) から求まるので, 拡張されたシアー波の速さは, 式 (5) で決まる. 式 (24) と (25) より, バイアス成分も含めてシアー波の速さ c_S が直接観測できれば, 粘弾性係数 μ が求まる.

図4に示されているように, 金井の推定したラメ定数を式 (23) に代入すると, シアー波の速さが $6 < c_S < 12$ [m/s], ラム波の速さが式 (19) より $2.5 < c_L < 3.6$ [m/s] となることが, 非線形最適化法 (式 (7) と式 (8)) を使わずに, すべてコンシステントに説明することができて, 推定された粘弾性係数の根拠が明確になった.

しかしながら, 観測されたラム波の位相速度の値において, 上限値と下限値が存在し, それらの閾値を理論的に説明するためには, ラム波の伝播を記述する基礎方程式系を非線形波動方程式の場合に拡張して, 式 (2) よりも更に複雑な非線形分散方程式を扱わねばならない. このような基本的問題は非常に重要であるけれども, ここでの考察の範囲を著しく越えているので, ここでは, 議論しない.

一方, v_1 (あるいは μ_1) と c_S が与えられたとき, 式 (24) より,

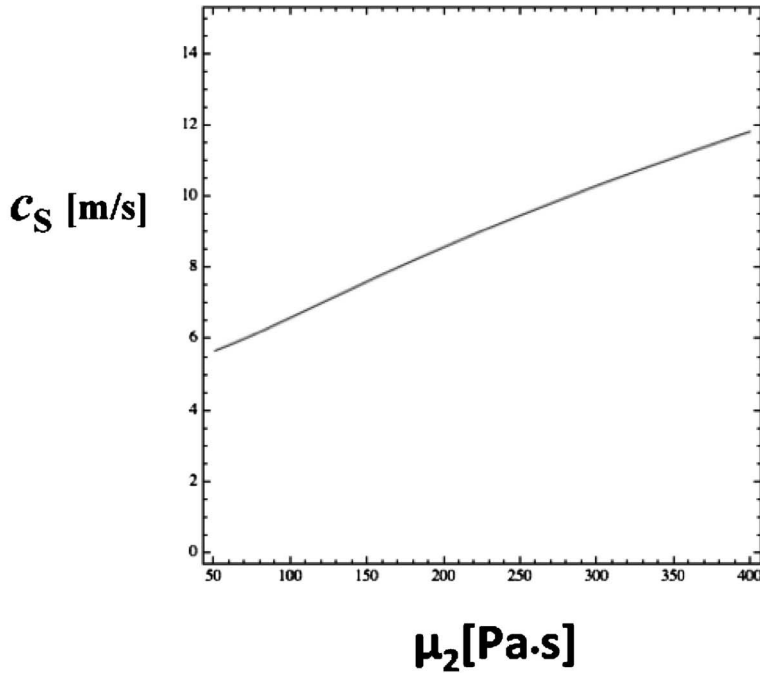


図4 シアー波の速さ c_s と粘性係数 μ_2 の関係式 (23). ただし, $f=60$ [Hz], $\mu_1=30$ [kPa] の場合を図示した.

$$\mu_2 = \left\{ \frac{\mu_1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{c_s^2}{v_1^2} \right)^4 - 1} \right\} f^{-1}, \quad (26)$$

が近似的に成り立つことが分かる ($v_1 \leq c_s$). 詳細は文献に譲るとして⁽¹¹⁾, サンプリング周波数 $f=60$ [Hz] の場合, 式 (19) から, $c_s=10$ [m/s] と $c_L=3.3$ [m/s] が推定できて, 式 (26) から, 粘性係数 $\mu_2 \approx 300$ [Pa.s] が得られる. また, 式 (4) から, ラム波の波長 $L_{IVS} \approx 5.5$ [cm] が求まり, これは, IVS の心基部から心尖部の方向のシステム長に相当することが分かる. また, 式 (26) は, 周波数が高くなるにつれて, 粘性が減少することを示している.

6. 結 論

超音波医療診断装置により観測された心室中隔壁 (IVS) 上の微小なパルス状の興奮波伝播特性を説明するため, 血液中に浸かった IVS を矩形平板と仮定して, レイリー・ラム分散方程式を拡張した場合を考察した. また, 金井⁽⁶⁾ が, 非線形最適化法を使って, 非侵襲的 in vivo に初めて推定した健康な男性の IVS の粘弾性係数について再考察し, そのラム波モデルの非線形最適化法の妥当性について調べた. 今回の考察によって, 拍動によって励起された心臓壁上のパルス波状の興奮波の位相速度の分散関係の物理的意味と, 超音波医療診断装置による観測結果が定性的によく説明できること等が示された. 換言すれば, 超音波医療診断装置による観測結果が, 非線形最適化法を使わずに, 我々が見つけた近似分散方程式 (19) で定性的に説明できることが示された.

観測された興奮波の非線形性が強くなった場合、心基部から心尖部の方向に、ラム波が非線形変調を受けて、そのラム波の位相欠陥が発現したローカルポイントが源になってラム波を前後にヘテロクリニックに励起し、その位相欠陥による位相の飛びが振幅の落ち込みを伴いながら伝播することが観察された。即ち、収縮末期の大動脈弁閉鎖時に、大動脈弁の閉鎖に伴って心室中隔壁上に沿って伝播するパルス波状の非線形ラム波の位相特異点が伝播しながら生成消滅することが観察された。そして、ラム波の非線形変調による位相特異点の力学特性が詳しく調べられた。幸いなことに、この非線形粘弾性ラム波の位相特異点の1次元の力学特性は、1次元複素ギンツバーグ・ランダウ方程式における Bekki-Nozaki (BN) ホール 解⁽⁸⁾で記述できることが明らかにされた^(9,10)。しかし、非線形粘弾性ラム波の伝播挙動を記述する基礎方程式系はまだ確立されていないけれども、我々の研究から、筋収縮系における非線形波動現象を理解するためのパラダイムとして、1次元複素ギンツバーグ・ランダウ方程式がその候補として有望であることが示唆される⁽¹²⁾。

心臓壁上のパルス波状の興奮波の弾性係数 μ_1 と粘性係数 μ_2 の値に対して、観測値では上限値と下限値が存在するけれども、これらの閾値を理論的に推定するためには、ラム波の伝播挙動を記述する非線形偏微分方程式系を確立しなければならない。また、長波長のラム波に対して、近似分散方程式 (19) が役立つかどうかはバイアス成分 ($f \approx 0$) を含めたシアー波の速さ c_S の計測に懸かっているので、更に、高精度・高分解能に、バイアス成分を含めたシアー波の速さを計測することが重要である。このように、まだ重要な基本的課題が残されているけれども、ここで考察した心臓壁上で励起された興奮波は、筋収縮系におけるサルコメア長の自励振動 (SPOC, HSOs)^(13,14)などの現象と密接に関係しているので、今後の研究でこれらのことを明らかにしていきたい。

謝 辞

高精度・高分解能の計測が可能な超音波医療診断装置を開発して、心室中隔壁上のパルス状興奮波が伝播する様子を観測した貴重なデータを提供して下さい東北大学大学院の金井浩教授に感謝致します。また、有益なコメントをしていただいた早稲田大学理工学術院の石渡信一教授に感謝致します。

参 考 文 献

- (1) L. Rayleigh, Proc. Lond. Math. Soc. **12**, 4 (1885).
- (2) H. Lamb, Proc. Roy. Soc. London. Ser. A **93**, 114 (1917).
- (3) A. H. H. Love, *A Treatise Mathematical Theory of Elasticity* (Cambridge, New York, 1906).
- (4) T. Kundu, *Ultrasonic Nondestructive Evaluation*, 223(CRC Press, New York, 2003).
- (5) T. Wakaki and K. Imano: 計測自動制御学会東北支部, 第 266 回研究集会, 資料番号 266-3 (2011).
- (6) H. Kanai, IEEE Trans. on Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr. **51**(11), 1931 (2005).
- (7) H. Kanai, Ultrasound Med. Biol. **35**(6), 936 (2009).
- (8) N. Bekki and K. Nozaki, Phys. Lett. A **110**, 133 (1985).
- (9) N. Bekki, Y. Harada, and H. Kanai, J. Phys. Soc. Jpn. **81**, 073801 (2012).
- (10) N. Bekki, Y. Harada, and H. Kanai, AIP Conf. Proc. **1493**, 96 (2012).
- (11) N. Bekki and S. A. Shintani, J. Phys. Soc. Jpn. **84**, 12482 (2015).
- (12) N. Bekki, S. A. Shintani, S. Ishiwata and H. Kanai, J. Phys. Soc. Jpn., in press.
- (13) S. Ishiwata, Y. Shimamoto, and N. Fukuda, Prog. Biophys. Molec. Biol. **105**, 187 (2011).
- (14) S. A. Shintani, K. Oyama, N. Fukuda, and S. Ishiwata, Biochem. Biophys. Res. Commun. **457**, 165 (2015).